V. I. アーノルド

古典力学の数学的方法

安 藤 韶 一
蟹 江 幸 博 訳
丹 羽 敏 雄

岩 波 書 店

В. И. АРНОЛЬД

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

序

古典力学は実にさまざまな数学上の概念と方法とを用いる．たとえば，微分方程式と相流，滑らかな写像と多様体，Lie 群と Lie 環，シンプレクティック幾何学とエルゴード理論等がある．現代の数学の理論は，その多くが力学に由来するが，後に，抽象論的，公理論的体裁を整えたため，その学習は今や容易なことではない．

本書は，古典力学に必要な数学的道具建てを，なんら予備知識を仮定することなく，その最初からを与える．読者は，解析学(微積分，微分方程式)，幾何学(線形空間，ベクトル)，線形代数(線形作用素，2次形式)の普通の課程さえ修めていれば十分であろう．

以上の道具建てで，振動論，剛体の運動論，Hamilton 形式など，力学系の基本的な問題を扱うことにする．ただ，力学現象の幾何学的，定性的側面は常に，明らかにするよう心掛けた．こうして，本書は数学者のための伝統的な理論力学の講義というより，理論物理学を学ぶ人々のための理論力学の講義といった方がよいであろう．

本書のかなりの部分を，変分原理と解析力学とが占める．かつて，F. Klein は《19 世紀数学史講義》の中で，解析力学を次のように評した．《この理論たるや，物理学者の問題に資するところ，甚だ少し，況や，技術者の問題においてをや》．その後の科学の発展を見れば，この説は完全に誤りである．たとえば，Hamilton 形式は量子力学の基礎となりえたし，現在でも，物理学においてもっとも頻繁に使われる数学的武器の1つである．また，シンプレクティック構造と Huygens の原理があらゆる最適問題において意義を認められて以来，Hamilton 方程式はこの方面の技術計算で不断に使われるものとなった．他方，天体力学は，宇宙探究からの要請もあって，最近再び発展を遂げ，解析力学の方法と問題が新たな関心を呼ぶこととなった．

古典力学と，数学および物理の他の分野との関係もまた多種多様である．付録においてその幾つかを扱う．すなわち，古典力学の応用として，Riemann 幾何学の基礎，完全流体の力学，条件周期運動の摂動に関する Kolmogorov の

理論，数理物理の方程式に対する短波領域における漸近(高周波近似)，幾何光学における焦面の分類等である．

付録は意欲的な読者を対象としたもので，必読を要するものではないが，その幾つかは専門的な話題(たとえば，非線形振動論の漸近的方法，準古典近似論)の基礎となるものである．また付録には，便覧としての性格をもつものがある．2次の Hamilton 関数の標準形の表がその1つである．本文の各章では，文献の引用を避けて証明はできる限り詳しく述べるように努めたが，付録では，主に結果をまとめるにとどめ，証明は文献を挙げてこれに代えた．

本書は，著者が1年半にわたって(1966–1968)，モスクワ大学力学－数学科でおこなった3，4年生必修の古典力学の講義がもとになった．

I. G. Petrovskii 教授からは，この講義録を出版するよう熱心なお勧めを受けた．出版準備にあたっては，L. A. Bunimovich，L. D. Weingortin，V. L. Novikov 各氏のノートを参考にした．とりわけ，N. N. Kolesnikov 氏には謄写版原稿(モスクワ大学，1968)をまとめて頂いた．以上の方々，並びにこの謄写版テキストに御意見を寄せられた聴講者，同僚の方々に深く感謝したい．今回の出版にあたって，その多くを採用させて頂いた．また，M. A. Leontvich 氏からは，極限移行を使って接続を解釈する仕方を御教示頂いた．I. I. Vorovich，V. I. Yudovich の両氏には原稿に細かく目を通して頂いた．御礼の言葉を申し上げる．

Vladimir Igorevich Arnold

目　　次

第III部 Hamilton 力 学

付　　録

第I部　Newton 力　学

Newton 力学は3次元 Euclid 空間における質点系の運動を扱う．この Euclid 空間には6次元である Euclid 運動群が働く．Newton 力学の主要な概念と定理は(たとえ Descartes 座標で表わされている時でも)，この群に関して不変である*)．

Newton のポテンシャル力学系は，質点の質量とポテンシャル・エネルギーによって与えられる．ポテンシャル・エネルギーを保つ空間の運動には，保存法則が対応する．

Newton 方程式によって，中心力場における運動など力学における一連の重要な問題が十分に研究できる．

第1章　経験的事実

この章では力学の基礎に横たわる基本的な経験的事実を述べる．すなわち，Galilei の相対性原理と Newton の微分方程式である．また，運動方程式が相対性原理にかなうための条件を考察し，簡単な例を2,3挙げる．

§1　相対性原理と決定性原理

ここでは慣性座標系の概念を導入し考察を加える．この節の主張は次の節で数学的に厳密に定式化される．

古典力学の基礎には少なからぬ経験的事実が存在する**)．その幾つかを挙げる．

A. 空間と時間　われわれの空間は3次元 Euclid 空間であり，時間は1次元である．

---

*)　さらに，時空の Galilei 変換からなる，より大きい群に関しても不変である．

**)　これらの経験的事実はすべて近似的にのみ正しく，より精密な実験では覆される．以下，簡明を期してこのことはいちいち断わらない．また，われわれの数学的モデルも一応，物理現象を正確に記述していると考えておく．

B. Galilei の相対性原理 次の性質をもつ座標系(慣性系)が存在する.

1) 自然法則はすべての慣性系において同一である.

2) 慣性系に対して等速直線運動をしている座標系はすべて慣性系である.

いいかえると，地球に固定された座標系が慣性系ならば，一定速度で走る列車内の実験者は，その客車内の実験だけでは列車の走っていることが分らない.

実際には，地球に固定された座標系は近似的にのみ慣性系である．太陽とか恒星とかに固定された座標系の方がより正確な慣性系である.

C. Newton の決定性原理 力学系の初期状態(系の点すべての或る時刻における位置と速度の総体)は，系の運動のすべてを一意的に決定する.

この事実は非常に古くからよく知られていて疑問の余地はない．系の未来を決定するのに，さらに初期時点の加速度が必要な世界も想像できるが，実験によれば，われわれの世界はそうではない.

§2 Galilei 群と Newton 方程式

ここでは時空の Galilei 変換群を定義し考察を加える．さらに，Newton 方程式と，それが Galilei 変換によって不変でなければならないことから，方程式が満たすべき簡単な条件とについて考察を加える*).

A. 記号 $\mathbf{R}$ は実数全体を，$\mathbf{R}^n$ は n 次元実線形空間を表わす．**n 次元アフィン空間** A^n は，《座標系の原点が固定されていない》ことだけが $\mathbf{R}^n$ と異なる．加法群 $\mathbf{R}^n$ は，A^n 上に**平行移動の群**として働く(図1)．つまり，$a \in A^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ ならば，$a+\boldsymbol{b} \in A^n$.

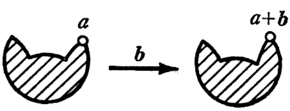


図1 平行移動

(すなわち，A^n の2点の和は定義されないものの，2点の差は $\mathbf{R}^n$ のベクトルとして定義される.)

線形空間 $\mathbf{R}^n$ 上の正定値双線形形式 $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$; $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^n$ の **Euclid 構造**といい，形式 $(\cdot, \cdot)$ を**スカラー積**という．$\mathbf{R}^n$ のスカラー積によってアフィン

*) §1の主張を数学的に定式化する必要を感じない読者は，§2を省いてもよい.

空間 A^n の 2 点間に，距離 ρ が定義できる：

$$\rho(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y, x-y)}.$$

このように距離を入れたアフィン空間を **Euclid 空間**といい，E^n と表わす．

B. Galilei 構造 時空の Galilei 構造は次の 3 要素から成る．

1) **世界**は 4 次元アフィン空間 A^4 である*)．A^4 の点を**世界点**または**事象**という．世界 A^4 の平行移動の全体は線形空間 $\mathbf{R}^4$ である．

2) **時間**とは，A^4 の平行移動の全体 $\mathbf{R}^4$ から実軸《時間軸》の上への線形写像 $t:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$ である．事象 $a\in A^4$ から事象 $b\in A^4$ までの**時間間隔**とは，実数 $t(b-a)$ をいう(図 2)．$t(b-a)=0$ となるとき，事象 a と b とは**同時**に起るという．

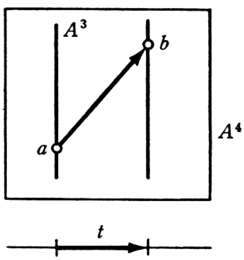


図2 時間間隔

同時に起る事象の全体は A^4 の 3 次元アフィン部分空間 A^3 をつくる．これを**同時事象の空間**という．

写像 t の核は，或る事象を(それゆえ，任意の事象を)これと同時に起る事象へ移すような平行移動の全体である．この核は線形空間 $\mathbf{R}^4$ の 3 次元部分空間 $\mathbf{R}^3$ である．

Galilei 構造はさらにもう 1 つの要素を含む．

3) **同時事象間の距離** これは空間 $\mathbf{R}^3$ のスカラー積で与えられる：

$$\rho(a, b) = \|a-b\| = \sqrt{(a-b, a-b)}, \qquad a, b\in A^3.$$

各同時事象の空間はこの距離によって 3 次元 Euclid 空間 E^3 となる．

空間 A^4 に時空の Galilei 構造を与えたとき，これを **Galilei 空間**という．

異なる 2 地点で同時に起る 2 事象は考えられるが，《2 事象 $a, b\in A^4$ が**異なる時刻に**

---

*) 昔は，世界はアフィン構造ではなく，線形空間の構造(天動説＋天地創造)をもつと考えられていた．

3次元空間の同一の点で起る》という命題は，座標系を入れない限り無意味である．

Galilei 構造を保つ変換全体からなる群を **Galilei 群**といい，その各元を **Galilei 変換**という．つまり，Galilei 変換は空間 A^4 のアフィン変換であって，時間間隔と同時事象間の距離を保つものである．

例 時間軸と Euclid 構造を1つ固定した3次元線形空間 $\mathbf{R}^3$ の直積*) $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ を考える．この空間は自然な Galilei 構造をもち，**座標 Galilei 空間**と呼ばれる．

この空間の Galilei 変換を3つ挙げよう．まず，**速度 $\boldsymbol{v}$ の等速運動**

$$g_1(t,\boldsymbol{x})=(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}t),\qquad \forall t\in\mathbf{R},\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3;$$

次に，**計測基点の平行移動**

$$g_2(t,\boldsymbol{x})=(t+s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}),\qquad \forall t\in\mathbf{R},\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3;$$

最後に，**座標軸の回転**

$$g_3(t,\boldsymbol{x})=(t,G\boldsymbol{x}),\qquad \forall t\in\mathbf{R},\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3$$

を挙げる．ここで，$G:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ は直交変換である．

問 空間 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ の Galilei 変換は，回転，平行移動，等速運動の積の形に $(g=g_1\cdot g_2\cdot g_3)$，一意的に表わされることを示せ．(よって，Galilei 群の次元は $3+4+3=10$ である．)

問 Galilei 空間はすべて同型である**)．とくに，座標空間 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ に同型であることを示せ．——

M を集合とする．M から $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ の上への1対1写像 $\varphi_1:M\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ を集合 M の **Galilei 座標系**という．また，座標系 φ_2 は写像 $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ が Galilei 変換であるとき，座標系 φ_1 に対して**等速運動**を行うという．このとき，Galilei 座標系 φ_1 と φ_2 は M に同一の Galilei 構造を与える．

C. 運動，速度，加速度 実軸上の区間 I から $\mathbf{R}^N$ への微分可能な写像 $\boldsymbol{x}:I\to\mathbf{R}^N$ を $\mathbf{R}^N$ における運動という．このとき，導関数

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)=\left.\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|_{t=t_0}=\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{x}(t_0+h)-\boldsymbol{x}(t_0)}{h}\in\mathbf{R}^N$$

---

*) 集合 A,B の直積とは，順序対 (a,b)，$a\in A$，$b\in B$ の全体を指し，$A\times B$ と書く．線形空間，アフィン空間，Euclid 空間同士の直積は，やはり同じ型の構造をもつ．

**) 1つの空間からもう一方の空間の上へ，Galilei 構造を保つ1対1写像が存在する．

を時刻 $t_0 \in I$ における**速度ベクトル**といい，2 次導関数

$$\ddot{x}(t_0) = \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_0}$$

を時刻 $t_0 \in I$ における**加速度ベクトル**という．

以下の関数は，何回でも必要なだけ連続微分可能であるとする．また，とくに断わらない限り，写像なども微分可能である．写像 $x: I \to \mathbf{R}^N$ の像を $\mathbf{R}^N$ の中の**軌跡**とか**曲線**とかいう．

問 平面上の微分可能な運動の軌跡が図 3 の曲線の形をもつことがあり得るか．また，図に指定したベクトルは加速度ベクトルになり得るか．

［解］ あり得る．なり得ない．

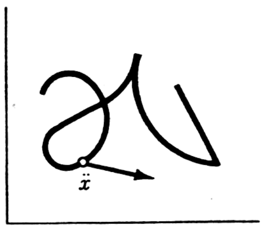


図 3 運動する点の軌跡

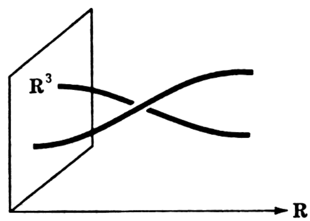


図 4 世界線

さて，**3 次元 Euclid 空間を運動する n 点からなる力学系**を定義したい．

$\mathbf{R}^3$ の中の運動を $x: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ とする．この写像のグラフ*) は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ の中の曲線である．

Galilei 空間の曲線は，或る（したがって，任意の）Galilei 座標系で運動のグラフであるとき，**世界線**であるという（図 4）．

n 点よりなる系（n 点系）の運動は，Galilei 空間では n 本の世界線で与えられる．Galilei 座標系を使えば，n 本の世界線は写像 $x_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ $(i=1, \cdots, n)$ で表わされる．ここで，n 個の $\mathbf{R}^3$ の直積を考え，n 点系の**配位空間**という．n 個の写像 $x_i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ によって時間軸から配位空間への写像

$$x: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^N, \qquad N = 3n$$

が決まる．この写像を $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ の Galilei 座標系における n 点系の運動という．

D. Newton 方程式 Newton の決定性原理（§1, C 項）によれば，系の運動

*) 写像 $f: A \to B$ のグラフは，直積 $A \times B$ の中の，点 $(a, f(a))$，$a \in A$ からなる部分集合である．

はすべて，初期位置 $\boldsymbol{x}(t_0)\in\mathbf{R}^N$ と初速度 $\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)\in\mathbf{R}^N$ とで一意的に決まる．

とくに，初期位置と初速度が加速度を決定する．つまり，或る関数 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^N$ によって

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t) \tag{1}$$

と表わされる．

Newton は方程式(1)を力学の基礎にすえた．この方程式は **Newton 方程式**と呼ばれる．

常微分方程式論の存在定理と一意性定理によれば，関数 $\boldsymbol{F}$ と初期条件 $\boldsymbol{x}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)$ は運動を一意的に決定する*)．

具体的な力学系では，関数 $\boldsymbol{F}$ の形は実験によって定められるが，数学的観点からすれば，各系は $\boldsymbol{F}$ の形を与えることによって定義される．

E. 相対性原理にかなうための条件　Galilei の相対性原理によれば，物理的時空に次のような特別な Galilei 構造《慣性座標系のクラス》が存在する．

力学系**)の各点の世界線に同一の Galilei 変換を施すと，(新しい初期条件をもつが)やはり，この力学系の世界線が得られる(図5)．

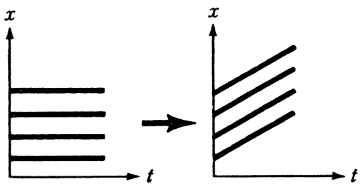


図5　Galilei の相対性原理

このことは，Newton 方程式を慣性座標系で表わすとき，方程式の形に幾つかの制限を加えることになる．方程式(1)の右辺は Galilei 変換に対して不変

---

*)　$\boldsymbol{F}$ には滑らかさの条件が必要である．ここでは，もちろんそれを仮定する．運動は方程式(1)によって，一般には時間軸上の或る**区間**の上でのみ決まる．簡単のために，この区間が時間軸全体であると考える．力学の問題は殆どがこの場合に該当する．

)　相対性原理を定式化するときは，閉じた**物理系(とくに，力学系)だけが対象となることに注意．したがって，或る物理現象を調べる時，何らかの相互作用を及ぼす物体はすべて系に含めなければならない．厳密には系は宇宙の全物体を含まねばならないが，実験によると，しばしばそのうちの多くの影響を無視してよい．たとえば，太陽を巡る惑星の運動を調べる時は他の恒星等の引力を無視してよい．

一方，地球の近くで物体の運動を調べる時，系が地球を含まなければ，その系は閉じていない．飛行機の運動を考える時，大気を除外すると系は閉じていない．以下《力学系》といえば大抵は閉じた系を考える．閉じていない系を問題とする時はとくに断わる(たとえば§3)．

でなければならないということである.

例 1 Galilei 変換の中に時間方向の平行移動がある. この平行移動によって不変なることから,《自然法則は時間に関して不変である》ことが分る. つまり, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ が方程式(1)の解ならば, 任意の $s\in\mathbf{R}$ に対して, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t+s)$ もまた(1)の解である.

以上より, 方程式(1)の右辺は, 慣性座標系では時間に依存しないことが分る. つまり, 次の形である.

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}).$$

注意 上式の右辺が時間を含むのは, 次のようなときである.

力学系 I+II の I の部分を調べているとしよう. このとき, 部分 II が I へ及ぼす影響は, 部分 I の運動方程式系に入るパラメーターの時間変化によって表わされることが多い.

例: 地上の現象を調べる時, 月の影響は普通無視してよいが, 潮の干満などを調べる時には考慮せねばならない. 月の引力は, 地球の重力が周期的に変化すると見なすことにより表わされる.

問題を解く途中の形式的操作の結果, 変数係数の微分方程式が現われることもある.

例 2 Galilei 変換の中に, 3次元空間の平行移動がある. この平行移動に対しても方程式(1)が不変であることから, **空間の等質性**:《空間の各点は平等である》が分る. つまり, $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$ が(1)を満たす n 点系の運動ならば, 任意の $\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^3$ に対して $\boldsymbol{\varphi}_i(t)+\boldsymbol{r}$ もまた, 方程式(1)を満足する. よって,

慣性座標系では, 方程式(1)の右辺は《相対座標》$\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_k$ にしか依存しない.

さらに, 等速運動している別の座標系へ移っても(このとき, $\ddot{\boldsymbol{x}}_i$, $\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_k$ は変らず, $\dot{\boldsymbol{x}}_i$ のすべてに一定ベクトル $\boldsymbol{v}$ が加わる)不変であるから, 慣性系では(1)の右辺は相対速度にしか依存しないことが分る. つまり

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i(\{\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_k, \dot{\boldsymbol{x}}_j-\dot{\boldsymbol{x}}_k\}), \qquad i, j, k = 1, \cdots, n.$$

例 3 Galilei 変換の中に, 3次元空間の回転がある. 回転で不変であることから, **空間は等方的**である. つまり空間には特別な方向は存在しない.

いま, $\boldsymbol{\varphi}_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ $(i=1, \cdots, n)$ が方程式(1)を満たす質点系の運動であり,

$G:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ が直交変換ならば，運動 $G\varphi_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ $(i=1,\cdots,n)$ も方程式(1)を満たす．いいかえると，

$$F(Gx, G\dot{x}) = GF(x, \dot{x}).$$

ただし，Gx は $(Gx_1,\cdots,Gx_n)$，$x_i\in\mathbf{R}^3$ の意味である．

問 力学系がただ1点からなる時，慣性系ではその加速度は0に等しい(Newton の第1法則)．これを示せ．

［ヒント］ 例1,2により，加速度は $x, \dot{x}, t$ に依存しない．例3からベクトル F は回転で不変である．

問 力学系が2点からなっていて，(或る慣性系で)初速度はすべて0であるとする．2点は最初2点が乗っていた直線上を動くことを示せ．

問 力学系が3点からなっていて，(或る慣性系で)初速度はすべて0であるとする．3点は最初3点が乗っていた平面上を動くことを示せ．

問 2点からなる力学系を考える．どんな初期条件のもとでも，適当な慣性座標系をとれば，2点は一定平面上にあることを示せ．

問 鏡の中の世界も，われわれの世界も，力学は同じであることを示せ．

［ヒント］ Galilei 群の中に鏡映変換がある．これは $\mathbf{R}^3$ の向きづけを変える．

問 慣性系のクラスはただ1つか．

［解］ 他のクラスは，空間と時間の単位を変更して，或いは，時間の方向を取りかえて得られる．

§3 力学系の例

すでに述べたように，Newton 方程式(1)に現われる関数 F は，力学系ごとに実験によって，その形が決定される．例を挙げよう．

具体的な系を考えるとき，宇宙にあるすべてのものを系に含めるのは賢明でない．たとえば，地上で起る現象のほとんどは月の影響を考慮しなくてよい．また，考えている過程が地球の運動に与える影響も普通は無視してよいし，地球に固定された座標系は《不動である》と見なしてもよい．もちろん，このような座標系で表わした運動方程式はもはや相対性原理には従わない．たとえば，地表近くでは，特別な方向，鉛直方向がある．

A. 例1 石の落下 石の地面からの高さを x とする．実験により

$$\ddot{x} = -g, \qquad g\approx 9.8\ \mathrm{m/sec^2} \quad \text{(Galilei)} \tag{2}$$

となることが知られている．

《ポテンシャル・エネルギー》$U=gx$ を導入すると，方程式(2)は次のようになる．

$$\ddot{x}=-\frac{\partial U}{\partial x}.$$

さて，$U:E^N\to\mathbf{R}$ が Euclid 空間上の滑らかな関数であるとき，$\partial U/\partial \boldsymbol{x}$ で関数 U のグラジエントを表わす．Euclid 空間の直積 $E^N=E^{n_1}\times\cdots\times E^{n_k}$ を考える．点 $\boldsymbol{x}\in E^N$ を $(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k)$ と表わし，$\partial U/\partial \boldsymbol{x}$ を $(\partial U/\partial \boldsymbol{x}_1,\cdots,\partial U/\partial \boldsymbol{x}_k)$ と表わすことにする．とくに，$x_1,\cdots,x_N$ が E^N の Descartes 座標ならば，ベクトル $\partial U/\partial \boldsymbol{x}$ の成分は偏微分 $\partial U/\partial x_1,\cdots,\partial U/\partial x_N$ である．

実験によれば，地上の1点 O から石へ至る動径(位置)ベクトルは，方程式

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}},\qquad U=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x} \tag{3}$$

を満たす(図6)．右辺のベクトルは地球の方を向いている．これを**重力加速度ベクトル**という．

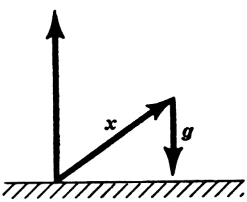


図6 石の落下

B. 例2 高空からの落下 実験的事実と同じく，運動法則(2)の適用範囲にも制限がある．より精密な実験による落下法則は Newton に負うが，それによると，加速度は地球の中心からの距離の2乗に反比例する：

$$\ddot{x}=-g\frac{r_0{}^2}{r^2}.$$

ただし，$r=r_0+x$ である(図7)．

地球の中心からの距離に反比例するポテンシャル・エネルギー

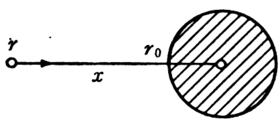


図7 地球の重力場

$$U = -\frac{k}{r}, \qquad k = gr_0^2$$

を導入すれば，この方程式もまた(3)の形に書ける．

問 石が地表より無限の彼方へ飛び去るには，どの位の速度で投げ出すべきか*)．

［解］ ≥ 11.2 km/sec ［$r_0 = 6400$ km である］†)．

C. 例3 バネの作用による錘の直線運動 実験によれば，錘が平衡点からそれほど隔たっていない時，その運動方程式は

$$\ddot{x} = -\alpha^2 x$$

である(図8)．この方程式もポテンシャル・エネルギー

$$U = \frac{\alpha^2 x^2}{2}$$

を導入すれば，やはり(3)の形に書ける．いまこの錘の位置にまったく同じ錘を2個置く．バネの張力が変らないならば，加速度は半分になる．

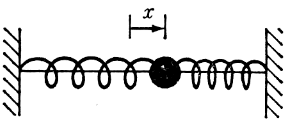


図8 バネをかけた錘

これも実験によるが，バネの張力が同じであれば，任意の2物体が受ける加速度の比 $\ddot{x}_1/\ddot{x}_2$ は一定である．(バネの強さとか材質には無関係で，2物体に固有のものである．) この比の逆数を質量比という．

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

質量単位としては，何か固定した物体，たとえば1 l の水††)の質量を採ってよい．われわれの経験では，物体の質量はすべて正である．

質量と加速度の積 $m\ddot{x}$ は物体にはよらず，バネに固有な張力である．この量をバネが物体に及ぼす**力**という．

力の単位として，《ニュートン》が採用されている．たとえば，地上で1 l の水を吊り下げると，バネは9.8ニュートン(=1 kG)の力を及ぼす．

---

*) これが，いわゆる第2宇宙速度 v_2 である．なお，この方程式には太陽引力が考慮されていない．石の初速度が16.6 km/sec 未満ならば，太陽引力のせいで，石は太陽系を離脱できない．

†) 以下では，角括弧［ ］は訳者が挿入したことを示す．訳者注は†で示す．

††) 厳密にいうならば温度，圧力も指示する必要がある．

D. 例 4 ポテンシャル系 3次元 Euclid 空間に n 点系があるとき，その配位空間を $E^{3n}=E^3\times\cdots\times E^3$ とする．さらに，$U: E^{3n}\to\mathbf{R}$ を微分可能な関数，$m_1, \cdots, m_n$ を正数とする．

定義 ポテンシャル・エネルギー U をもつポテンシャル場では，質量が $m_1, \cdots, m_n$ である n 点の運動は次の微分方程式で与えられる．

$$m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}_i}, \quad i=1, \cdots, n. \tag{4}$$

例 1-3 の方程式は，まさにこの形である．他の力学系でも運動方程式がこの形に書ける場合が多い．

たとえば，天体力学の3体問題は(4)において

$$U = -\frac{m_1m_2}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|}-\frac{m_2m_3}{\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3\|}-\frac{m_3m_1}{\|\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1\|}$$

となるときである．

電気振動の方程式のように，まったく起源が異なる方程式でも，(4)の形に変形できるものが少なくない．

次の章では主に微分方程式(4)を調べる．

第2章　運動方程式

運動方程式は，解くことも解の挙動を完全に調べることもできないのが普通である(たとえば3体問題)．この章では Newton 方程式が解けるような，簡単ではあるが重要な問題を幾つか扱う．

§4　自由度1の系

ここでは次の微分方程式(1)の相平面を調べる．このような方程式を定性的に調べるためには，そのポテンシャル・エネルギーのグラフを見れば十分である．なお，方程式(1)は求積法で解ける．

A. 定義　次のような1つの微分方程式

$$\ddot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

で表わされる系を**自由度1の系**という．さらに，2次形式

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

を**運動エネルギー**という．また**ポテンシャル・エネルギー**は次の関数で表わされる．

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi.$$

右辺の負符号は，石が高い所にあるほどそのポテンシャル・エネルギーが大きくなるようにするためである．

明らかに，ポテンシャル・エネルギー U を与えれば関数 f は決まる．したがって，系(1)を与えるには U を指定すればよい．なお，ポテンシャル・エネルギーに定数を加えても運動方程式(1)は変らない．

運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和 E を**全エネルギー**という：

$$E = T + U.$$

つまり，全エネルギーは関数 $E(x, \dot{x})$ である．

B. 定理(エネルギーの保存法則)　運動方程式(1)に従う動点の全エネルギーは一定である．つまり，$E(x(t), \dot{x}(t))$ は t に無関係である．

証明

$$\frac{d}{dt}(T+U)=\dot{x}\ddot{x}+\frac{dU}{dx}\dot{x}=\dot{x}(\ddot{x}-f(x))=0. \qquad \blacksquare$$

C. 相平面 方程式(1)は次の方程式系と同値である．

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=f(x). \tag{2}$$

ここで座標 x, y をもつ平面を考えよう．これを方程式(1)の**相平面**といい，その各点を**相点**という．系(2)の右辺は，相平面上にベクトル場を定める．この場を**相速度ベクトル場**という．

方程式系(2)の解は相平面上の相点の運動 $\boldsymbol{\varphi}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ であり，各瞬間における相点の速度はその時に相点が位置する点の相速度ベクトルに等しい*)．

写像 $\boldsymbol{\varphi}$ の像を**相曲線**という．こうして，相曲線は次のようなパラメーター表示で与えられる．

$$x=\varphi(t), \quad y=\dot{\varphi}(t).$$

問 各相点を1本の，そしてただ1本の相曲線が通ることを示せ．

［ヒント］ 常微分方程式の教科書を見よ．——

相曲線が1点だけから成ることもある．そのような点を**平衡点**という．平衡点の相速度ベクトルは0である．

エネルギーの保存法則を使うと，相曲線は簡単に見つけられる．実際，各相曲線上では全エネルギーは一定であり，相曲線はエネルギーのレベル集合，$E(x, y)=h$，のどれか1つの内に含まれるからである．

D. 例

例1 振動論の基本的な方程式

$$\ddot{x}=-x$$

を考える．このとき(図9)，

$$T=\frac{\dot{x}^2}{2}, \quad U=\frac{x^2}{2}, \quad E=\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{x^2}{2}$$

である．エネルギーのレベル集合は，原点中心の同心円と原点とである．相点 (x, y) での相速度ベクトルの成分は $(y, -x)$ である．これは動径ベクトルに垂直で，その長さは動径ベクトルの長さに等しい．よって，相点の運動は原点 O のまわりの等速回転：$x=r_0\cos(\varphi_0-t)$，$y=r_0\sin(\varphi_0-t)$ である．ゆえにエネルギーのレベル集合はどれも1つの相曲線である．

---

*) 簡単のために，ここでは解 φ が時間軸全体で定まるとしている．

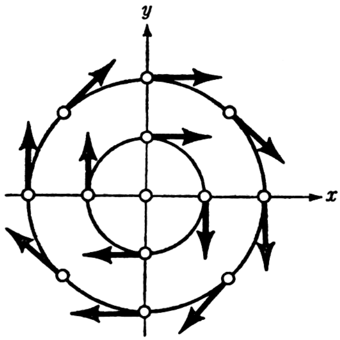


図9 方程式 $\ddot{x}=-x$ の相平面

例2 ポテンシャル・エネルギーがグラフで与えられているとする(図10). エネルギーのレベル集合, $y^2/2+U(x)=E$, を図示しよう. 次のことを考えに入れるとよい.

1. 系(2)の平衡点は相平面の x 軸上にある. ξ がポテンシャル・エネルギーの臨界点, つまり $dU/dx|_{x=\xi}=0$ ならば, 点 $(\xi, 0)$ は平衡点である.

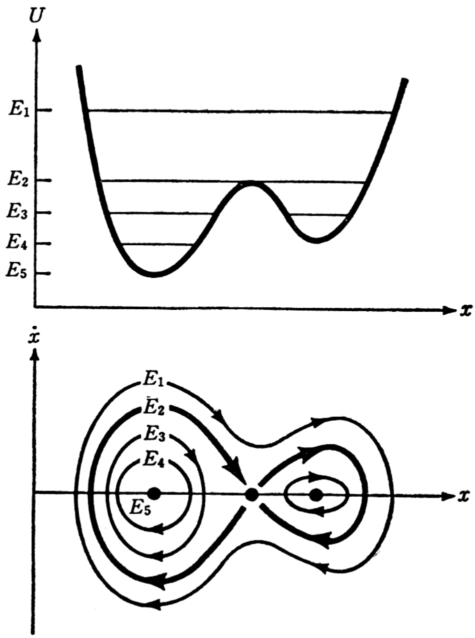


図10 ポテンシャル・エネルギーと相曲線

2. エネルギーのレベル集合は平衡点以外の点の近傍では**滑らかな**曲線である(これは陰関数の定理から分る). とくに E がポテンシャル・エネルギーの臨界値(ポテンシャル・エネルギーが臨界点でとる値)でなければ, エネルギー E のレベル集合は滑らかな曲線である.

エネルギーのレベル集合を調べるときには, E の臨界値とその近くの E の値に注意しなければならない. このとき, ポテンシャル U の窪みの中を転がる小球を想い浮べるとよい.

たとえば, 《運動エネルギーは負にならない. つまり, ポテンシャル・エネルギーは全エネルギー以下である. ポテンシャル・エネルギーが小さくなる程, 速度は大きくなる》という命題は, 次のようにいいかえられる. 《小球は最初のエネルギー・レベルを越えて, ポテンシャルの窪みを跳び出ることはできない. 窪みの底へ転げ落ちると, 小球は速さが増す》. もう1つ注意すると, ポテンシャル・エネルギーが極大になる点は不安定な平衡点であり, 極小になる点は安定な平衡点である.

問　これを示せ.

問　図10で, レベル E_2 に対応する8の字形のセパラトリックスは何個の相曲線から成るか.

［解］ 3個.

問　セパラトリックスに沿った運動時間を求めよ.

［解］ 一意性定理によって, この時間は無限である.

問　x_1 から x_2 へ行くのに要する最小時間は

$$t_2-t_1=\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}$$

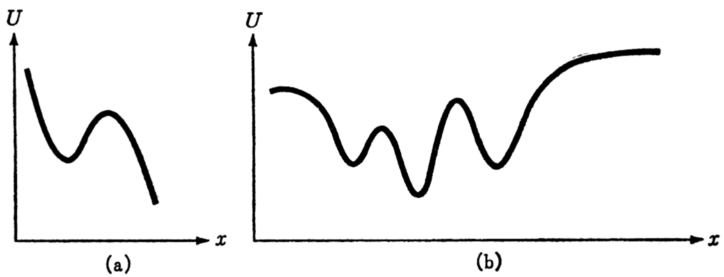


図11　ポテンシャル・エネルギー

に等しいことを示せ.

問　ポテンシャル・エネルギーのグラフから相曲線を描け(図11).

［解］ 図12.

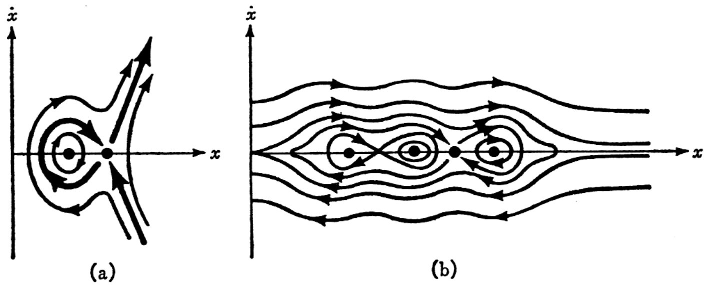


図12　相　曲　線

問　《平面単振子の方程式》 $\ddot{x}=-\sin x$ の相曲線を描け.

問　《軸が回転する振子の方程式》 $\ddot{x}=-\sin x+M$ の相曲線を描け.

注意　上の2問では, x は振子の振れの角度を表わす. 相平面上の2点は x 座標が 2π の差をもつと, 振子の同じ位置に対応する. こうして, 相平面の代りにこの場合は相円筒 $\{x\,(\mathrm{mod}\ 2\pi), y\}$ を考えるのが自然である.

問　ポテンシャル・エネルギーの最大値 $E=U(\xi)$ に対応する臨界レベル曲線の各分枝へ接線を引け(図13).

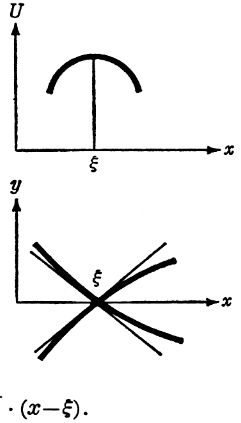


図13　エネルギーの臨界レベル曲線

［解］ $y=\pm\sqrt{-U''(\xi)}\cdot(x-\xi)$.

問　エネルギー・レベル E をもつ相曲線 C が閉じているとする. 曲線 C が囲む面積を $S(E)$ とすると, この曲線に沿う運動の周期は

$$T = \frac{dS}{dE}$$

に等しいことを示せ.

問　ポテンシャル・エネルギーが点 ξ_0 で最小値 E_0 をとるとする. 点 ξ_0 の近くの微小振動の周期

$$T_0 = \lim_{E \to E_0} T(E)$$

を求めよ.

[解]　$2\pi/\sqrt{U''(\xi_0)}$.

問　エネルギー・レベル E の相曲線が閉じている. この相曲線に沿う周期運動は, Liapunov の意味で安定†)であるか.

[解]　否*).

E. 相流　M を相平面上の点とする. $t=0$ のとき点 M を通るという初期条件のもとで, 系(2)の解を考えよう. いま, この系の任意の解が時間軸全体に及ぶと仮定する. 解が時刻 t で示す点は M に依存する. この相点を

$$M(t) = g^t M$$

と表わす(図14).

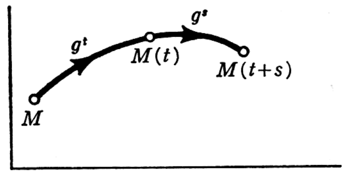


図14　相　流

こうして, 相平面をそれ自身の上へ写す写像 $g^t: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ が定義できた. 常微分方程式論のよく知られた定理によれば, 写像 g^t は微分同相(1対1写像で g^t も逆写像も微分可能)である. 微分同相 g^t, $t \in \mathbf{R}$, は群をなす: $g^{t+s} = g^t \circ g^s$. g^0 は恒等写像($g^0 M = M$)で, g^{-t} は g^t の逆写像である. 写像 $g: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g(t, M) = g^t M$ は微分可能である. 以上の性質をまとめて, 変換 g^t 全体は相平面の微分同相からなる1-パラメーター群をつくる, といえる. この群を系(2)(あるいは方程式(1))の**相流**ともいう.

例　方程式 $\ddot{x} = -x$ の相流は原点 O を角度 t だけまわる回転 g^t がなす群

---

†)　単に安定ともいう. 安定性の定義は, たとえば, Smale-Hirsch [1] を見よ.

*)　ただ1つ例外がある. それは周期がエネルギー・レベルに無関係なときである.

である.

問　ポテンシャル・エネルギーが $U=-x^4$ である系はどんな相流も定めないことを示せ.

問　ポテンシャル・エネルギーが正ならば相流は必ず存在することを示せ.

［ヒント］　エネルギーの保存法則を用いて，解が限りなく延長できることを示せ.

問　次の方程式の相流 g^t は円板: $x^2+(y-1)^2<1/4$ をどのように移すか図示せよ.

(a)《逆さ振子》$\ddot{x}=x$,　　(b)《非線形振子》$\ddot{x}=-\sin x$.

［解］　図15.

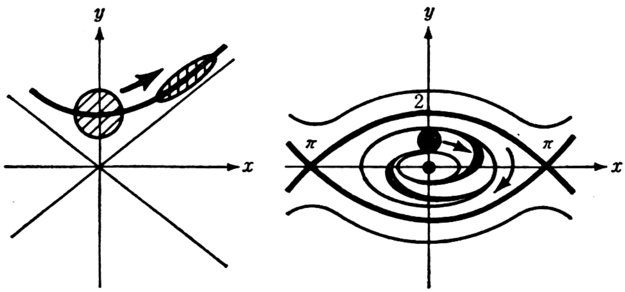


図15　円板への相流の作用

§5　自由度2の系

自由度2の一般的なポテンシャル系を解析することは現代数学の能力を超える. ここではもっとも簡単な例を考える.

A. 定義　自由度2の系とは，微分方程式

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in E^2$$

で与えられる系をいう. ここで，$\boldsymbol{f}$ は平面上のベクトル場である.

関数 $U: E^2\to\mathbf{R}$ が存在して，$\boldsymbol{f}=-\partial U/\partial\boldsymbol{x}$ となる系を**ポテンシャル系**という. したがって，ポテンシャル系の運動方程式は次の形で表わされる*).

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{1}$$

---

*)　E^2 上の Descartes 座標では

$$\ddot{x}_1=-\frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad \ddot{x}_2=-\frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

B. エネルギーの保存法則

定理　ポテンシャル系の全エネルギーは不変である．——

つまり

$$E=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2+U(\boldsymbol{x}),\qquad \dot{\boldsymbol{x}}^2=(\dot{\boldsymbol{x}},\dot{\boldsymbol{x}})$$

とおくと，$dE/dt=0$ である．

証明　運動方程式を使うと，

$$\frac{dE}{dt}=(\dot{\boldsymbol{x}},\ddot{\boldsymbol{x}})+\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}},\dot{\boldsymbol{x}}\right)=\left(\ddot{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}},\dot{\boldsymbol{x}}\right)=0.$$ ∎

系　初期時の全エネルギーが E ならば，運動の軌跡は領域：$U(x)\leq E$ 内にある．——

つまり，点は常にポテンシャルの窪み：$U(x_1,x_2)\leq E$ の内にとどまる．

注意　自由度1の系では，いつでも，

$$U(x)=-\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi$$

として，ポテンシャル・エネルギーを導入できる．自由度2の系ではこうは行かない．

問　$\ddot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in E^2$ なる形の系で，ポテンシャル系ではない例を挙げよ．

C. 相空間　運動方程式(1)は，次のように方程式系の形にも書ける．

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=y_1, & \dot{x}_2&=y_2,\\ \dot{y}_1&=-\frac{\partial U}{\partial x_1}, & \dot{y}_2&=-\frac{\partial U}{\partial x_2}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

座標 x_1,x_2,y_1,y_2 をもつ4次元空間を，自由度2の系の**相空間**という．

系(2)は4次元空間に相速度ベクトル場を，したがって*) 相流(4次元空間の微分同相からなる1-パラメーター群)を与える．系(2)の相曲線は4次元相空間の部分集合である．相空間全体は相曲線に分解される．相曲線を4次元空間から (x_1,x_2) 平面へ射影すると，動点が (x_1,x_2) 平面上に描く軌跡が得られる．この軌跡は**軌道**ともいう．相曲線が互いに交わらないにもかかわらず，2本の軌跡は交点をもつことがある．エネルギー

---

*)　例のごとく条件を付ける必要がある．

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = \frac{{y_1}^2 + {y_2}^2}{2} + U(x_1, x_2)$$

の保存法則は4次元空間の中に3次元超曲面：$E(x_1, x_2, y_1, y_2) = E_0$ を定める．この曲面 $\mathscr{S}_{E_0}$ は相流に関して不変である：$g^t \mathscr{S}_{E_0} = \mathscr{S}_{E_0}$．相流はエネルギーのレベル曲面に沿って流れるといってもよい．相速度ベクトル場は各点で，曲面 $\mathscr{S}_{E_0}$ に接する．したがって，曲面 $\mathscr{S}_{E_0}$ 全体が相曲線から成る(図16)．

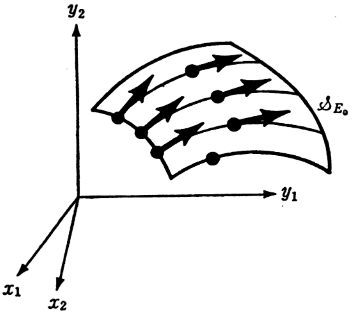


図16 エネルギーのレベル曲面と相曲線

D. 例1 《球面振子の微小振動》 $U = ({x_1}^2 + {x_2}^2)/2$ とする．(x_1, x_2) 平面上のポテンシャル・エネルギーのレベル曲線は同心円である(図17)．

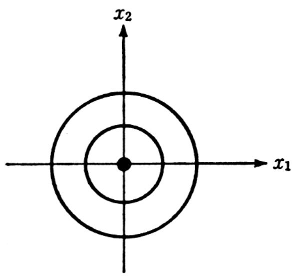


図17 球面振子のポテンシャル・エネルギーのレベル曲線

運動方程式 $\ddot{x}_1 = -x_1$，$\ddot{x}_2 = -x_2$ は次の方程式系に同値である．

$$\dot{x}_1 = y_1, \qquad \dot{x}_2 = y_2,$$
$$\dot{y}_1 = -x_1, \qquad \dot{y}_2 = -x_2.$$

この系は独立な2つの系に分かれる．いいかえると，x_1 も x_2 も自由度1の系そのものである．解の形は次の通りである．

$$x_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \qquad x_2 = c_3 \cos t + c_4 \sin t,$$
$$y_1 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \qquad y_2 = -c_3 \sin t + c_4 \cos t.$$

エネルギーの保存法則から

$$E=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=\text{const},$$

つまり，レベル曲面 $\mathcal{S}_E$ は4次元空間の球面である．

問　相曲線はこの球面の大円であることを示せ．(大円とは球面と，その中心を通る2次元平面との交線である．)

問　曲面 $\mathcal{S}_E$ 上の相曲線の全体は，2次元球面をなすことを示せ．正確に述べると，式 $w=(x_1+iy_1)/(x_2+iy_2)$ は，3次元球面 $\mathcal{S}_E$ から2次元球面(複素平面に無限遠点を付加したもの)の上への Hopf 写像を与える．われわれの相曲線は，Hopf 写像による1点の原像である．

問　相曲線を (x_1, x_2) 平面上へ射影せよ．(つまり，点の軌道を図示せよ．)

E. 例2 《Lissajous 図形》　もう1つ，平面運動《自由度2の微小振動》:

$$\ddot{x}_1=-x_1,\qquad \ddot{x}_2=-\omega^2 x_2$$

を考えよう．ポテンシャル・エネルギーは

$$U=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}\omega^2 x_2^2$$

である．最初，全エネルギーが

$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+U(x_1, x_2)=E$$

ならば，エネルギーの保存法則によって運動はすべて楕円 $U(x_1, x_2)\leq E$ の内部で起る．

しかも，この系は2つの独立な1次元系に分れるからエネルギーの保存法則がそれぞれについて成り立つ．つまり次の量が不変である．

$$E_1=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}x_1^2,\qquad E_2=\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}\omega^2 x_2^2\qquad (E=E_1+E_2).$$

このため，x_1 の変域は帯状領域 $|x_1|\leq A_1$，$A_1=\sqrt{2E_1}$ に限られ，x_2 も帯状領域 $|x_2|\leq A_2$，$A_2=\sqrt{2E_2}/\omega$ の中で振動する．2領域の交わりは長方形であるが，軌跡はこの中に閉じこめられる(図18)．

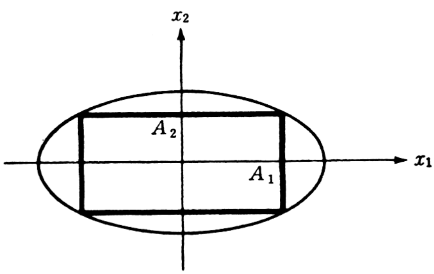


図18　領域 $U\leq E$ と領域 $U_1\leq E_1$，$U_2\leq E_2$

問 この長方形は楕円 $U=E$ に内接することを示せ．この方程式の一般解は，$x_1=A_1\sin(t+\varphi_1)$，$x_2=A_2\sin(\omega t+\varphi_2)$ である．動点は，水平方向には振動数1，振幅 A_1 で，垂直方向には振動数 ω，振幅 A_2 で，独立に振動する．

(x_1, x_2) 平面上に軌道を描くには次のようにする．底円が直径 $2A_1$ である円筒と幅 $2A_2$ のテープを考える．テープ上に周期 $2\pi A_1/\omega$，振幅 A_2 の正弦曲線を描いた後，このテープを円筒に巻きつける(図19)．円筒上の正弦曲線を (x_1, x_2) 平面へ正射影すると，求める軌道，いわゆる **Lissajous 図形**が得られる．Lissajous 図形はオシログラフで水平方向，垂直方向に独立な調和振動を与えれば手軽に見られる．

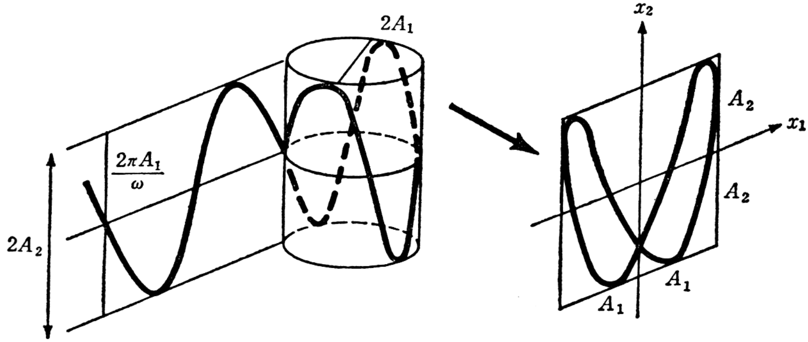


図19 Lissajous 図形の描き方

Lissajous 図形の形は振動数 ω に極めて密接に依存する．$\omega=1$ ならば(例1の球面振子)，円筒上の曲線は楕円である．これを (x_1, x_2) 平面へ正射影すると，得られる図形は位相差 $\varphi_2-\varphi_1$ に依存する．$\varphi_1=\varphi_2$ ならば長方形の対角線上の線分が得られ，$\varphi_2-\varphi_1$ が小さいと，対角線の方向に細長く長方形に内接する楕円が得られる．$\varphi_2-\varphi_1=\pi/2$ ならば，x_1, x_2 を主軸とする楕円が得られる．$\varphi_2-\varphi_1$ が $\pi/2$ から π まで増大すると，楕円はもう一方の対角線に向って細長くなる．さらに $\varphi_2-\varphi_1$ が大きくなると，この過程が最

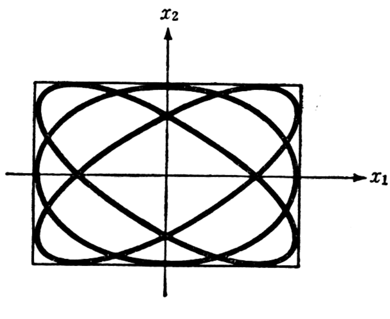


図20 $\omega=1$ のときの Lissajous 図形

初から繰り返される(図20).

振動数が極めて1に近い: $\omega\approx 1$ としよう. $0\leq t\leq 2\pi$ に対応する部分は楕円そっくりである. 次の1巡も楕円を思わせるが, その位相差 $\varphi_2-\varphi_1$ は最初のものより $2\pi(\omega-1)$ だけ大きい. こうして, $\omega\approx 1$ のときの Lissajous 図形は1つの対角線に圧し縮められた形から, もう1つの対角線に圧し縮められた形まで, すべての位相をとって楕円がゆっくりと変形して行く(図21).

一方の振動数が他方の2倍($\omega=2$)ならば, 適当に位相をずらせば, Lissajous 図形は2重になった曲線となる(図22).

問 この曲線は放物線であることを示せ. ——

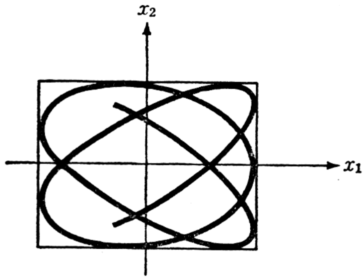


図21 $\omega\approx 1$ のときの Lissajous 図形

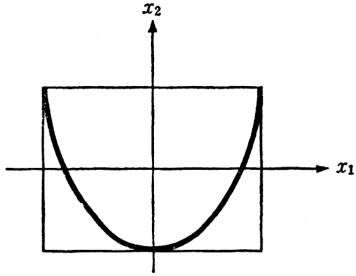


図22 $\omega=2$ のときの Lissajous 図形

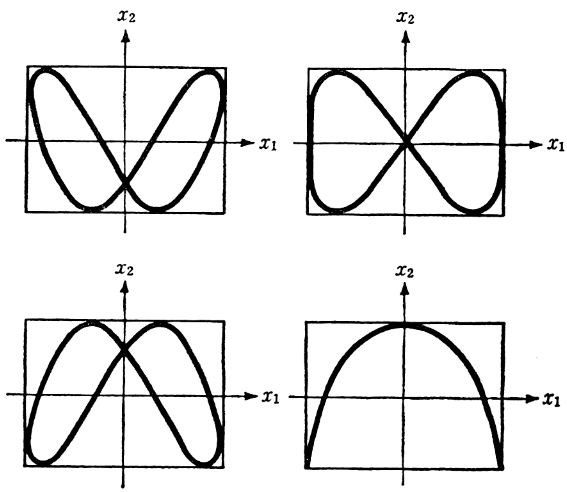


図23 $\omega=2$ のときの Lissajous 図形

位相差 $\varphi_2-\varphi_1$ が大きくなると，図23の曲線が次々に得られる．

一般に，一方の振動数が他方の n 倍 $(\omega=n)$ であると，対応する Lissajous 図形の中に，n 次多項式のグラフが存在する(図24)．これは **Chebyshev の多項式**と呼ばれるものである．

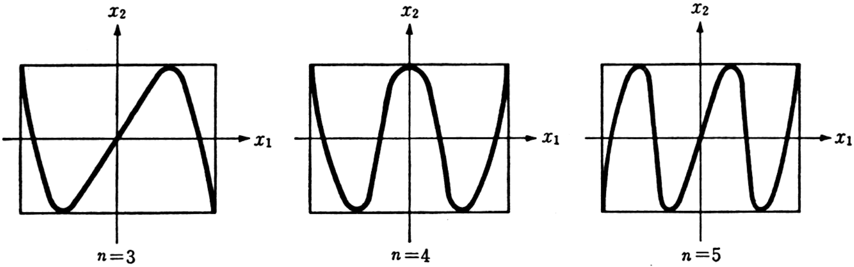


図24 Chebyshev の多項式

問 $\omega=m/n$ (有理数)ならば，Lissajous 図形は閉じた代数曲線であり，ω が無理数ならば，Lissajous 図形は長方形を至るところ稠密に満たすことを示せ．対応する相曲線は何を満たすか．

§6 ポテンシャル力の場

ここでは仕事とポテンシャル・エネルギーとの関係を調べる．

A. 力の場が道の上でなす仕事 力 $\boldsymbol{F}$ が道 $\boldsymbol{S}$ 上でなす仕事の定義を思い起そう．一定の力 $\boldsymbol{F}$ (たとえば，物を持ち上げるときの力)が，道 $\boldsymbol{S}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 上でなす仕事は，次のスカラー積で定義される(図25)．

$$A=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{S})=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cdot\cos\varphi.$$

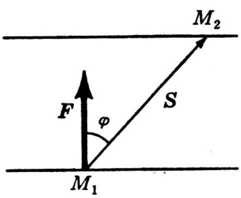


図25 一定の力 $\boldsymbol{F}$ が直線路 $\boldsymbol{S}$ 上でなす仕事

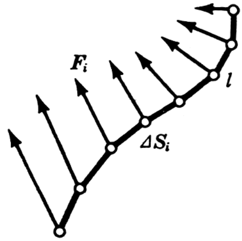


図26 力の場 $\boldsymbol{F}$ が道 l 上でなす仕事

ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ と長さ有限の曲線 l とが与えられたとする．曲線 l を線分 $\Delta\boldsymbol{S}_i$ からなる折線で近似する．$\Delta\boldsymbol{S}_i$ の或る点における力を $\boldsymbol{F}_i$ で表わそう．このとき，**力の場 $\boldsymbol{F}$ が道 l 上でなす仕事は**

$$A=\lim_{|\Delta\boldsymbol{S}_i|\to 0}\sum_i(\boldsymbol{F}_i,\Delta\boldsymbol{S}_i)$$

と定義される(図26)．解析の講義で習うように，力の場が連続で道が求長可能であれば，この極限が存在する．これを $\int_l(\boldsymbol{F},d\boldsymbol{S})$ と記す．

B. ポテンシャル場であるための条件

定理 ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル場であるための条件は，任意の道 M_1M_2 上で $\boldsymbol{F}$ のなす仕事が道の両端にのみ依存して，道の形には無関係なことである．

証明 実際，場 $\boldsymbol{F}$ のなす仕事が道の形にはよらないとする．このとき，点 M の関数 U が次のように定義できる．

$$U(M)=-\int_{M_0}^{M}(\boldsymbol{F},d\boldsymbol{S}).$$

これから，$\boldsymbol{F}=-\partial U/\partial\boldsymbol{x}$，つまり場 $\boldsymbol{F}$ はポテンシャル場であり，U がそのポテンシャル・エネルギーであることが簡単に分る．もちろん，ポテンシャル・エネルギーは任意定数 $U(M_0)$ の差を除いて一意的である．

逆に，場 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル場であり，U がそのポテンシャル・エネルギーであるとすると，容易に分るように，

$$\int_{M_0}^{M}(\boldsymbol{F},d\boldsymbol{S})=-U(M)+U(M_0),$$

つまり，仕事は道の形にはよらない．▮

問 ベクトル場 $F_1=x_2$，$F_2=-x_1$ はポテンシャル場ではないことを示せ(図27)．

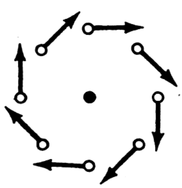


図27 非ポテンシャル場

問 平面上の除外点をもつベクトル場

$$F_1=\frac{x_2}{x_1{}^2+x_2{}^2},\qquad F_2=\frac{-x_1}{x_1{}^2+x_2{}^2}$$

は，ポテンシャル場であるか．場がポテンシャル場であるのは任意の閉曲線上でなす仕事が0になるとき，かつそのときに限ることを示せ．

C. 中心力場

定義　平面 E^2 上のベクトル場が O を中心にもつ**中心力場**であるとは，点 O を動かさない平面の運動群*)に関して不変であるときをいう．

問　中心力場のベクトルは中心 O から出る半直線上にあり，大きさは中心からの距離にのみ依存することを示せ．——

中心 O で定義されていないような中心力場も有効である．

例　Newton 場 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}/r^3$ は中心力場であるが，B 項の問の場はそうではない．

定理　中心力場はすべてポテンシャル場であり，そのポテンシャル・エネルギーは場の中心までの距離にしか依存しない：$U=U(r)$．

証明　上の問により，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\Phi(r)\boldsymbol{e}_r$ と書ける．ここで，$\boldsymbol{r}$ は O からの動径ベクトル，r はその長さで，$\boldsymbol{e}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．そうすると

$$\int_{M_1}^{M_2}(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}) = \int_{r(M_1)}^{r(M_2)}\Phi(r)\,dr$$

である．これは明らかに道の形に依存しない．■

問　Newton 場のポテンシャル・エネルギーを計算せよ．

注意　この節の定義および定理は，そのまま任意次元の Euclid 空間 E^n で通用する．

§7　角運動量

以下で分るように，力学の方程式が何か或る変換群で不変ならば，いつも保存法則が見られる．中心力場は回転群に関して不変である．その第1積分を角運動量という．

A. 定義　平面上の中心力場を動く質点(質量 1)**の運動**は，方程式

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \Phi(r)\boldsymbol{e}_r$$

で定義される．ここで，$\boldsymbol{r}$ は場の中心 O を始点とする位置ベクトル，r はその長さ，$\boldsymbol{e}_r$ は単位ベクトルである．われわれの平面は向きづけられた3次元 Euclid 空間 E^3 に埋めこまれていると考える．

---

*)　鏡映も含むとする．

定義 質量1をもつ質点の，中心 O に関する**角運動量**(または**運動量モーメント**)[†]とは，ベクトル積

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]$$

をいう．ベクトル $\boldsymbol{M}$ は平面に直交し，1つの数 M で与えられる：$\boldsymbol{M}=M\boldsymbol{n}$. ここで，$\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ は平面の法ベクトルで，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は平面に向きを与える枠である(図28).

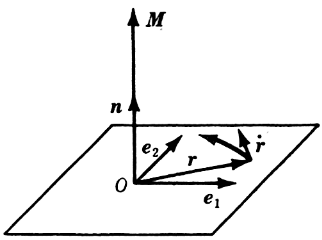


図28 角 運 動 量

注意 一般に《点 $\boldsymbol{r}$ においた》ベクトル $\boldsymbol{a}$ の，中心 O に関するモーメントとは $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}]$ をいう．たとえば，高校までの静力学では力のモーメントを扱ってきた．

B. 角運動量の保存法則

補題 向きづけられた Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ の中で，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は時間と共に変化するベクトルとする．このとき，

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\dot{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{b}}].$$

証明 微分の定義から出る．▮

定理(角運動量の保存法則) 中心力場を運動するとき，中心 O に関する角運動量 $\boldsymbol{M}$ は時間変化しない．

証明 定義から $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]$，したがって補題によって

$$\dot{\boldsymbol{M}} = [\dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{r}}]+[\boldsymbol{r}, \ddot{\boldsymbol{r}}].$$

中心力場であるから，運動方程式によって $\boldsymbol{r}$ と $\ddot{\boldsymbol{r}}$ とは平行である．したがって $\dot{\boldsymbol{M}}=0$. ▮

C. Kepler の法則 最初，角運動量の保存法則は Kepler が火星の運動の観

†) 著者の用語では，それぞれ kinetic moment, moment of momentum である．

測結果より発見した．Kepler はこの法則を少し異なった形で定式化した．

われわれの平面上に場の中心 O を極として，極座標 r, φ を入れよう．座標 $r=|\boldsymbol{r}|$，φ をもつ点 $\boldsymbol{r}$ で，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi$ を考える．$\boldsymbol{e}_r$ は位置ベクトルの方向で

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r.$$

$\boldsymbol{e}_\varphi$ はこれに垂直で，角 φ の増加する方向をもつ．速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ を基底 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi$ で分解しよう (図 29)．

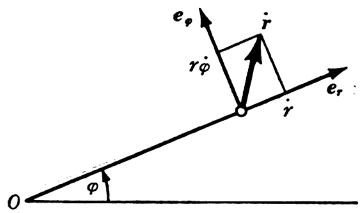


図 29　ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}$ の基底 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi$ による分解

補題　次の関係式が成り立つ．

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

証明　明らかにベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi$ は角速度 $\dot{\varphi}$ で回転する．つまり，

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_r.$$

式 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$ を微分して

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi. \qquad \blacksquare$$

したがって，角運動量は次のようになる．

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}] = [\boldsymbol{r}, \dot{r}\boldsymbol{e}_r] + [\boldsymbol{r}, r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi] = r\dot{\varphi}[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_\varphi] = r^2\dot{\varphi}[\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi].$$

こうして，$M=r^2\dot{\varphi}$ は不変である．

この量には簡単な図形的意味がある．動径(位置)ベクトルが掃過する面積を

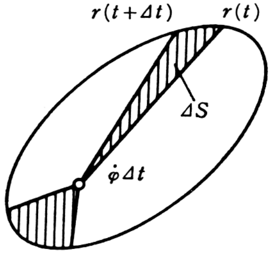


図 30　面積速度

$S(t)$ としたとき，その変化の速さを Kepler は**面積速度** C と名付けた(図30)：

$$C=\frac{dS}{dt}.$$

Kepler が惑星の運動の観測結果より得た法則は次のように表現できる．

動径ベクトルは，等しい時間内には等しい面積を掃過する．したがって，面積速度は一定である：$dS/dt=\text{const.}$

これも角運動量の保存法則の 1 つの定式化である．なぜならば

$$\varDelta S=S(t+\varDelta t)-S(t)=\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\varDelta t+o(\varDelta t),$$

つまり，面積速度は

$$C=\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}=\frac{1}{2}M.$$

これは質量 1 の質点がもつ角運動量の半分であり，したがって一定である．

例 通信衛星《モルニア(稲妻)》の軌道は極めて細長い．Kepler の法則によって，このような衛星は軌道の遠方で大部分の時を過し，その間 $\dot{\varphi}$ は小さい．

§8 中心力場における運動

中心力場における運動は，角運動量の保存法則によって自由度 1 の問題に帰着できる．このことによって，中心力場における運動を完全に調べることができる．

A. 1次元の問題に帰着させること 平面上の中心力場で，質量 1 をもつ質点の運動を考えよう．

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}},\qquad U=U(r).$$

ここで，極座標 r,φ に移るのが自然である．

角運動量の保存法則によって，$M=r^2(t)\dot{\varphi}(t)$ は一定である(時間 t によらない)．

定理 質量 1 の質点が中心力場を運動するとき，場の中心からの距離 r は，次のポテンシャル・エネルギーをもつ 1 次元の問題に従う．

$$V(r)=U(r)+\frac{M^2}{2r^2}.$$

証明 §7 で示した関係式 $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$ を微分して

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi.$$

中心力場だから,

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r.$$

よって, 極座標による運動方程式は次のように表わされる.

$$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r}, \qquad 2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi} = 0.$$

また, 角運動量の保存法則から

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2}.$$

ここで, M は時間 t によらない定数で, 初期条件から定まる. 故に,

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}+r\frac{M^2}{r^4} \quad \text{あるいは} \quad \ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \left(\text{ただし } V=U+\frac{M^2}{2r^2}\right). \ \blacksquare$$

$V(r)$ を**有効ポテンシャル・エネルギー**という.

注意　今得た1次元の問題の全エネルギー

$$E_1 = \frac{\dot{r}^2}{2}+V(r)$$

は, もとの問題の全エネルギー

$$E = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}+U(r)$$

と一致する. それは次の等式による.

$$\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2}+\frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2r^2}.$$

B. 運動方程式を積分すること　上で得た1次元の問題の全エネルギーは変化しない. したがって, 半径 r が時間 t にどう関係するかは, 次の積分を実行すればよい.

$$\dot{r} = \sqrt{2(E-V(r))}, \qquad \int dt = \int\frac{dr}{\sqrt{2(E-V(r))}}.$$

$\dot{\varphi}=M/r^2$ だから,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M/r^2}{\sqrt{2(E-V(r))}}.$$

よって, 極座標による軌道の方程式は, 次の積分で与えられる.

$$\varphi=\int\frac{M/r^2}{\sqrt{2(E-V(r))}}dr.$$

C. 軌道の研究 角運動量 M の値を1つ固定する. r の時間変化は, 有効ポテンシャル・エネルギー $V(r)$ のグラフを描けば, 簡単に調べられる(図31).

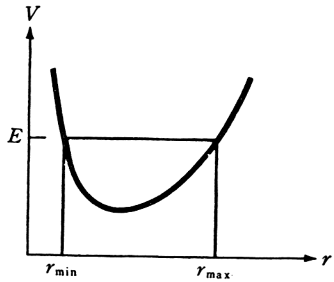


図31 有効ポテンシャル・エネルギーのグラフ

E を全エネルギーの値とする. 与えられた E と M とに対応する軌道は領域 $V(r)\leq E$ の内にある. この領域の境界 $V=E$ 上では $\dot{r}=0$ であるが, 動点の速度は一般には0でない. $M\neq 0$ ならば $\dot{\varphi}\neq 0$ だからである.

不等式 $V(r)\leq E$ は平面上, 1個または数個の環状領域

$$0\leq r_{\min}\leq r\leq r_{\max}\leq\infty$$

を与える. $0<r_{\min}<r_{\max}<\infty$ ならば, 運動は半径 $r_{\min}$ と $r_{\max}$ とに挟まれた円環の内部に限られる.

軌道の形は図32に示した. 角 φ は単調に増加するが, 半径 r は $r_{\min}$ と $r_{\max}$ の間を周期的に振動する. $r=r_{\min}$ となる点を**近心点**, $r=r_{\max}$ となる点を**遠心点**という. (もし中心が地球ならばそれぞれ近地点, 遠地点といい, 太陽ならば近日点, 遠日点, 月ならば近月点, 遠月点という.)

中心から遠心点なり近心点なりに向う半直線は, 軌道の対称軸である.

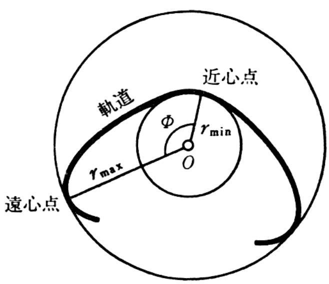


図32 中心力場における質点の軌道

一般の場合，軌道は閉じていない．引き続く近心点と遠心点の間の角 Φ は次の積分で与えられる．

$$\Phi=\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{M/r^2}{\sqrt{2(E-V(r))}}dr.$$

引き続く2つの近心点の間の角は，この2倍である．

角 Φ が 2π と**通約可能**，つまり $\Phi=2\pi m/n$ (m, n は整数) であると，軌道は閉じる．

角 Φ が 2π と通約不能であれば，軌道は円環の中を稠密に満たすことが示せる (図33)．

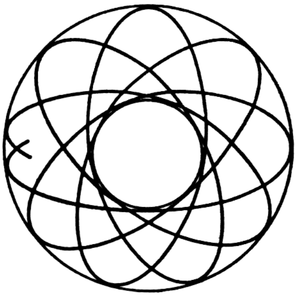


図33　円環の中，至るところ稠密な軌道

$r_{\min}=r_{\max}$，つまり E が V の最小値であると，円環は退化して円周になるが，これも軌道である．

問　場のポテンシャル・エネルギーを $U=r^{\alpha}$ $(-2\leq\alpha<\infty)$ とする．円軌道上の運動は，どんな α に対して Liapunov の意味で安定か．

［解］　$\alpha=2$ だけである[†]．——

E が V の最小値より少し大きい値をとれば，円環：$r_{\min}\leq r\leq r_{\max}$ は非常に狭く，軌道は円周に極めて近い．対応する1次元の問題では，r は V の最小点の近くで微小振動を行う．

問　軌道が半径 r の円軌道に近いとき，角 Φ を求めよ．

［ヒント］　次のD項を見よ．——

今度は $r_{\max}=\infty$ のときを考える．もし $\lim_{r\to\infty}U(r)=\lim_{r\to\infty}V(r)=U_{\infty}<\infty$ ならば，点は無限の彼方へ去ることができる．最初のエネルギー E が U_{∞} より大

---

†)　$\alpha>0$ のときは，軌道の形が安定である．これを軌道安定という．

きければ，点は有限速度 $\dot{r}_\infty=\sqrt{2(E-U_\infty)}$ のまま限りなく遠ざかる．$U(r)$ が r^{-2} より遅くその極限に近づくならば，有効ポテンシャル・エネルギー V は，無限遠では吸引的である（ポテンシャル・エネルギー U は無限遠で吸引的であると仮定する）．

$r\to0$ のとき $|U(r)|$ が $M^2/2r^2$ より速くは増大しなければ $r_{\min}>0$ であり，軌道は中心 O へは近づかない．$r\to0$ のとき $U(r)+M^2/2r^2\to-\infty$ ならば，《中心へ落下する》ことが可能である（たとえば $U(r)=-r^{-3}$ となる場）．

問 全エネルギーが有効ポテンシャル・エネルギー V の極大値に等しいとき，軌道の形を調べよ．

D. 有界な軌道がすべて閉じるような中心力場 次の一連の問題から分るように，中心力場ですべての有界軌道が閉じるのは，次の2つの場合に限る．

$$U=ar^2,\quad a\geq0 \qquad と \qquad U=-\frac{k}{r},\quad k\geq0.$$

問1 近心点と遠心点の間の角 Φ は，ポテンシャル・エネルギー $W(x)=U(M/x)+x^2/2$ をもつ1次元系の振動の周期の半分に等しい．これを示せ．

［ヒント］ $x=M/r$ と変換すれば

$$\Phi=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\frac{dx}{\sqrt{2(E-W)}}.$$

問2 軌道が半径 r の円周に近いとき，角 Φ を求めよ†)．

［解］
$$\Phi\approx\Phi_c=\pi\frac{M}{r^2\sqrt{V''(r)}}=\pi\sqrt{\frac{U'}{3U'+rU''}}.$$

問3 どんな U に対して，角 Φ_c は半径 r に無関係か†)．

［解］ $U(r)=ar^\alpha$ $(\alpha\geq-2,\ \alpha\neq0)$ および，$U(r)=b\log r$.

このとき，$\Phi_c=\pi/\sqrt{\alpha+2}$（対数の場合は $\alpha=0$ に当る）．たとえば，$\alpha=2$ では $\Phi_c=\pi/2$, $\alpha=-1$ では $\Phi_c=\pi$.

問4 $r\to\infty$ のとき $U(r)\to\infty$ とする．$\lim_{E\to\infty}\Phi(E,M)$ を求めよ．

［解］ $\pi/2$.

［ヒント］ $x=yx_{\max}$ と変数変換すれば，Φ は

$$\Phi=\int_{y_{\min}}^{1}\frac{dy}{\sqrt{2(W^*(1)-W^*(y))}},\qquad ただし\quad W^*(y)=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{x^2_{\max}}U\left(\frac{M}{yx_{\max}}\right)$$

となる．$E\to\infty$ とすると，$x_{\max}\to\infty$, $y_{\min}\to0$ となって，W^* の第2項は棄ててよい．

---

†) $\Phi=\Phi(E,M)$ であるが，この場合 M は $V'(r)=0$ で定まる r の関数であり，$E\approx V(r)$ である．したがって，Φ_c は r のみの関数となる．

問5 $U(r)=-kr^{-\beta}$ $(0<\beta<2,\ k>0)$ とする．$\Phi_0=\lim_{E\to-0}\Phi$ を求めよ．

［解］
$$\Phi_0=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^\beta-x^2}}=\frac{\pi}{2-\beta}.$$

こうして，Φ_0 は M に無関係である．

問6 有界な軌道が存在して，そのどれもが閉じるような中心力場をすべて求めよ．

［解］ $U=ar^2$ または $U=-k/r$.

有界な軌道がすべて閉じるならば，$\Phi_c=2\pi m/n=\mathrm{const}$ となる†)．問3により，$U=ar^\alpha$ $(\alpha\geq-2)$ または $U=b\log r$ $(\alpha=0)$ となる．いずれの場合にも $\Phi_c=\pi/\sqrt{\alpha+2}$ である．$\alpha>0$ ならば問4により，$\lim_{E\to\infty}\Phi(E,M)=\pi/2$. 故に，$\Phi_c=\pi/2$, $\alpha=2$. また，$\alpha<0$ ならば問5により，$\lim_{E\to-0}\Phi(E,M)=\pi/(2+\alpha)$. 故に，$\pi/(2+\alpha)=\pi/\sqrt{2+\alpha}$ より，$\alpha=-1$ となる．$\alpha=0$ の場合には $\Phi_c=\pi/\sqrt{2}$ となり，2π と通約不能である．こうして $U=ar^2$ または $U=-k/r$ の時にのみ，有界な軌道がすべて閉じ得る．場 $U=ar^2$ $(a>0)$ では，すべての軌道が閉じる（O を中心とする楕円である．§4の例1）．場 $U=-k/r$ でも，次に見るように，有界軌道はすべて閉じて，やはり，楕円である．

E. Kepler 問題 ポテンシャルが $U=-k/r$, したがって，

$$V(r)=-\frac{k}{r}+\frac{M^2}{2r^2}$$

となる中心力場における運動を述べる（図34）．



図34 Kepler 問題の有効ポテンシャル

公式により

$$\varphi=\int\frac{M/r^2dr}{\sqrt{2(E-V(r))}}.$$

積分して，

---

†) 有界な軌道がすべて閉じていれば，$\Phi/2\pi$ は有理数値をとる．さらに，この値は軌道に連続的に依存するから結局一定でなければならない．したがって，$\Phi_c/2\pi$ も同じ有理数値をとる．

$$\varphi = \arc\cos\frac{\dfrac{M}{r}-\dfrac{k}{M}}{\sqrt{2E+\dfrac{k^2}{M^2}}}$$

となる．この式には任意定数を加えるべきであるが，それを0とおく．これは近心点を基点にして，角 φ を計ることと同じである．ここで

$$\frac{M^2}{k}=p, \qquad \sqrt{1+\frac{2EM^2}{k^2}}=e$$

とおけば，次のようになる．

$$\varphi = \arc\cos\frac{\dfrac{p}{r}-1}{e}, \qquad つまり，\ r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

これが，いわゆる円錐曲線の**焦点方程式**である．$E<0$ のときは運動は有界である(図35)．このときは $e<1$，つまり円錐曲線は楕円である．p を楕円の**通径**，e を**離心率**という．Kepler は火星の運動の観測結果より，経験的に彼の第1法則を発見した．それは惑星が楕円を描きその焦点に太陽があることをいう．

惑星が重力による中心力場を運動していることを認めれば，Kepler の第1法則から，Newton の万有引力の法則：$U=-k/r$ が導かれる(D 項)．

通径と離心率とは，次のように主軸の長さと関係する．

$$2a=\frac{p}{1-e}+\frac{p}{1+e}=\frac{2p}{1-e^2}, \qquad つまり，\ a=\frac{p}{1-e^2}, \quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

ここで，$c=ae$ は中心から焦点までの距離である(図35)．

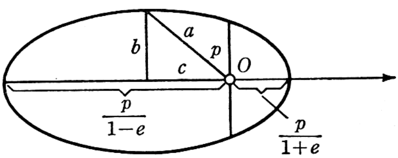


図35 Kepler の楕円

注意 楕円は離心率が小さいと，円にそっくりである*)．もし焦点と中心との距離が1位の無限小ならば，主軸の長さの差は2位の無限小である：$b=a\sqrt{1-e^2}\approx a(1-e^2/2)$．たとえば，長軸 10 cm，離心率 0.1 の楕円では主軸の長

---

*) コップの中心から程遠くないところに，茶を1滴落せ．波がその対蹠点に集まる．これは，楕円の焦点の定義そのままに，1つの焦点から出た波がもう一方の焦点に集まることによる．

さの差は 0.5 mm，焦点と中心の距離は 1 cm である．

惑星軌道の離心率は極めて小さい．このため，Kepler は最初彼の第1法則を次のように定式化した：惑星は太陽の周囲を円周に沿って運動するが，太陽はその中心にはない．

Kepler の第2法則：面積速度は一定である．

これはどんな中心力場ででも正しい．

Kepler の第3法則：楕円軌道を1周する時間は長軸の長さにのみ依存する．

惑星*)が楕円軌道上を動くとき，公転周期の2乗は長軸の長さの3乗に比例する．

証明 T で公転周期を表わし，時間 T 内に動径ベクトルが掃過する面積を S で表わすと，$M/2$ が面積速度だから $2S=MT$．一方，面積は $S=\pi ab$，これから $T=2\pi ab/M$．また，$a=p/(1-e^2)$ より

$$a=\frac{M^2/k}{2|E|M^2/k^2}=\frac{k}{2|E|},\qquad b=\frac{M^2}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{2|E|}\,M/k}=\frac{M}{\sqrt{2|E|}},$$

故に，$T=2\pi k/(\sqrt{2|E|})^3$．ところで，$2|E|=k/a$ だから，$T=2\pi a^{3/2}k^{-1/2}$． ▮

こうして，全エネルギー E は，軌道の長軸の長さ $2a$ にのみ依存し，半径 a の円から長さ $2a$ の線分までのすべての楕円軌道に共通である．

問 人工衛星を地上 300 km の円軌道上へ打ち上げたが，衛星の速度の方向が予定より 1°，地球の側へ傾いた．近地点はどう変るか．

［解］ 近地点の高さは約 110 km 低くなる．

［ヒント］ 円軌道との差は2位の無限小で無視できる．打ち上げ時のエネルギーは予定通りであるから，円の半径も予定通りである．したがって，軌道は予定軌道を 1° だけ傾けて得られる（図36）．

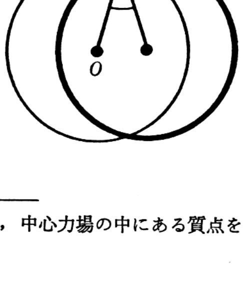


図36 円に近い軌道

---

*) ここで惑星とは，中心力場の中にある質点をいう．

問　速度が予定より 1 m/sec 小さいと，近地点の高さはどう変るか．

問　**第1宇宙速度**とは地球半径にほぼ等しい半径の円軌道上を動くときの速度である．第1宇宙速度 v_1 を求め，$v_2=\sqrt{2}\,v_1$ を示せ(§3, B 項を見よ)．

［解］ 8.1 km/sec.

問*)　宇宙飛行士 A. Leonov は宇宙空間へ出るとき，カメラのキャップを地球の方へ投げ捨てた．投げた速さを 10 m/sec として，宇宙船から見たキャップの運動を調べよ．

［解］　キャップは飛行士から見て，ほぼ長軸約 32 km，短軸約 16 km の楕円に沿って動く．楕円の中心は飛行士の軌道上前方 16 km にあって，楕円に沿う回転周期は宇宙船の軌道上の周期に等しい．

［ヒント］　宇宙船の円軌道の半径を長さの単位にとり，この軌道上の回転周期が 2π となるように時間の単位をとる．Newton 方程式

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{r}/r^3$$

の解で，円周解 $r_0=1$, $\varphi_0=t$ に近いものを調べねばならない．次の形で求めよう．

$$r = r_0+r_1, \quad \varphi = \varphi_0+\varphi_1, \quad r_1 \ll 1,\ \varphi_1 \ll 1.$$

解は初期条件に関して微分可能であるから，関数 $r_1(t)$, $\varphi_1(t)$ は初期条件の変化に関して1位より高位の無限小を除けば，線形微分方程式系(変分方程式)を満たす．

上の形の r, φ を Newton 方程式に代入すれば，簡単な計算で変分方程式

$$\ddot{r}_1 = 3r_1+2\dot{\varphi}_1, \quad \ddot{\varphi}_1 = -2\dot{r}_1$$

が得られる．初期条件

$$r_1(0) = \varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{r}_1(0) = -1/800 = -10/v_1$$

のもとで，この方程式を解けば上述の答が得られる．

すてた2位の無限小は，結果にはその 1/800 程度しか影響しない(つまり，螺旋の1巻につき数十 m 程度)．こうしてキャップは1時間半かかって 30 km の楕円を描き，宇宙船の所へ地球と反対の側から戻って来て，その数十 m の所を通り過ぎる．

もちろん，以上の計算では円軌道からの‘ずれ’とか重力以外の諸々の力の影響とかを無視した．

§9　3次元空間における点の運動

この節では軸に関する角運動量を定義し，軸対称な場における運動では，これが保存されることを示す．

平面運動に関する結果はすべて，空間内の運動に容易に移しかえられる．

---

*)　この問は V. V. Beletskii《宇宙物体の運動論概説》という面白い本から引いた．

A. ポテンシャル場 ポテンシャル場における運動

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}, \qquad \text{ここで,}\ U = U(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r} \in E^3,$$

を考えよう．このとき**エネルギーの保存法則**が成り立つ:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad \left(\text{ただし,}\ E = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(\boldsymbol{r})\right).$$

B. 中心力場，角運動量 $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]$ の保存法則 中心力場の運動では，ベクトル $\boldsymbol{M}$ は一定である．つまり

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = 0.$$

中心力場はすべてポテンシャル場であるから(2次元の時と同様に証明できる)，$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\partial U/\partial \boldsymbol{r}$. 中心力場であることから，ベクトル $\partial U/\partial \boldsymbol{r}$ はベクトル $\boldsymbol{r}$ に平行である．したがって，

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = [\dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{r}}] + [\boldsymbol{r}, \ddot{\boldsymbol{r}}] = 0. \qquad \blacksquare$$

系 中心力場を運動する質点の軌道は，平面曲線である．

証明 $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{r}) = ([\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}], \boldsymbol{r}) = 0$. したがって，$\boldsymbol{r}(t) \perp \boldsymbol{M}$. $\boldsymbol{M}$ は一定であるから，軌道はベクトル $\boldsymbol{M}$ に垂直な平面上にある*). ∎

こうして，空間に中心力場があるとき，軌道の研究は前節で扱った平面上の問題に帰着する．

問 n 次元 Euclid 空間で，中心力場における運動を調べよ．

C. 軸対称な場

定義 E^3 のベクトル場が**軸対称性**をもつとは，或る軸上の各点を動かさない回転のなす群で，この場が不変であるときをいう．

問 場が軸対称で，かつ，ポテンシャル場であれば，ポテンシャル・エネルギーは $U = U(r, z)$ の形であることを示せ．ただし，r, φ, z は円筒座標である．——

これから，特に各点における場のベクトルは，z 軸とその点を通る平面上にあることが分る．

このような場の例として，回転体の形をした物体が惹き起す重力場がある．

向きづけられた Euclid 空間 E^3 で，z 軸の向きを単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z$ で与える．

---

*) $\boldsymbol{M} = 0$ の場合は読者に任せる．

さて，$\boldsymbol{F}$ は線形 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル，O は z 軸上の1点とし，O に関する点 $x \in E^3$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x-O \in \mathbf{R}^3$ とする(図37).

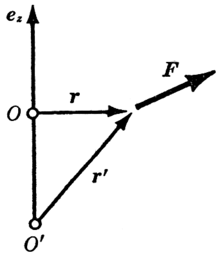


図37　ベクトル $\boldsymbol{F}$ の z 軸に関するモーメント

定義　**点 x においたベクトル $\boldsymbol{F}$ の，z 軸に関するモーメント M_z** とは，z 軸上の1点に関するベクトル $\boldsymbol{F}$ のモーメントを z 軸へ射影したものをいう：

$$M_z = (\boldsymbol{e}_z, [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}]).$$

数 M_z は z 軸上の点 O の選び方にはよらない．実際，軸上の点 O' を考えよう．このとき混合積[†]の性質から

$$\begin{aligned} M_z' &= (\boldsymbol{e}_z, [\boldsymbol{r}', \boldsymbol{F}]) = ([\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{r}'], \boldsymbol{F}) \\ &= ([\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{r}], \boldsymbol{F}) = M_z. \end{aligned}$$

注意　M_z は z 軸の**向き**の選び方に依存する．$\boldsymbol{e}_z$ を $-\boldsymbol{e}_z$ と取りかえると，M_z は符号が変る．

定理　z 軸対称なポテンシャル場を運動するとき，z 軸に関する角運動量(運動量モーメント)は変化しない．

証明　$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}$ であるから，$\boldsymbol{r}$ と $\ddot{\boldsymbol{r}}$ は z 軸を含む平面上にある．ゆえに，$[\boldsymbol{r}, \ddot{\boldsymbol{r}}]$ は $\boldsymbol{e}_z$ に垂直である．したがって，$M_z=(\boldsymbol{e}_z, [\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}])$ を微分して

$$\dot{M}_z = (\boldsymbol{e}_z, [\dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{r}}]) + (\boldsymbol{e}_z, [\boldsymbol{r}, \ddot{\boldsymbol{r}}]) = 0. \qquad \blacksquare$$

注意　$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{e}_z$ とが張る平面上に力のベクトル $\boldsymbol{F}$ があるような場では，上の証明がそのまま通用する．

§10　n 点系の運動

この節では E^3 の質点系に対して，エネルギー，運動量，角運動量の各保存法則を証明する．

---

†)　$(\boldsymbol{A}, [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}])$ をいう．ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に関して巡回的である．

A. 内力と外力　n 個の質点からなる系がある．質量を m_i, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i \in E^3$ とする．この系の運動に対する Newton 方程式とは次の方程式をいう．

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

ベクトル $\boldsymbol{F}_i$ を**第 i 点に働く力**という．力 $\boldsymbol{F}_i$ は実験によって決められる．観察によると2点からなる系では，普通，これらの力は大きさが等しく，2点を結ぶ直線に沿って作用し，向きは互いに逆である(図38)．



図38　相互作用の力

このような力を**相互作用の力**という(例: 万有引力)．

系の各点に働く力がすべて相互作用の力であるとき，系は**閉じている**という．この定義によると，閉じた系では，第 i 点に働く力は

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}$$

である．ベクトル $\boldsymbol{F}_{ij}$ を，第 j 点が第 i 点に及ぼす力という．

力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ と $\boldsymbol{F}_{ji}$ とは，互いに逆向きであるから($\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}$)，$\boldsymbol{F}_{ij}=f_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}$ と書ける．ここで，$f_{ij}=f_{ji}$ は力の大きさを表わし，$\boldsymbol{e}_{ij}$ は第 i 点から第 j 点に向う単位ベクトルである．

系が閉じていなければ，系に働く力は次のように書ける．

$$\boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_i'.$$

ここで，$\boldsymbol{F}_{ij}$ は相互作用の力であるが，$\boldsymbol{F}_i'$ は，いわゆる**外力**である．

例(図39)　閉じた系を2つの部分 I と II とに分けよう．系 I の第 i 点に働く力 $\boldsymbol{F}_i$ は系 I 内の相互作用の力と，系 II の点がこの点に及ぼす力とに分れる．つまり

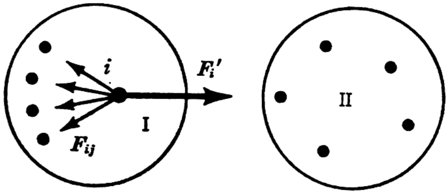


図39　内力と外力

$$F_i = \sum_{\substack{j\in \mathrm{I} \\ j\neq i}} F_{ij} + F_i'.$$

F_i' は系 I から見れば外力である.

B. 運動量の保存法則

定義　次のベクトルを系の**運動量**という.

$$P = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i.$$

定理　系の運動量の変化速度は, 系の各点に働く外力の総和に等しい.

証明

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i,j} F_{ij} + \sum_i F_i' = \sum_i F_i'.$$

これは, 相互作用の力に対しては $F_{ij} = -F_{ji}$. したがって, $\sum_{i,j} F_{ij} = 0$ となるからである. ∎

系 1　閉じた系の運動量は不変である.

系 2　系に働く外力の総和が x 軸に垂直ならば, 運動量の x 成分 P_x は不変である: $P_x = \mathrm{const.}$

定義　次の点を系の**慣性中心**という.

$$r = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}.$$

問　慣性中心の定義が適切であること, つまり位置ベクトルの基点の選び方にはよらないことを示せ. ——

系の運動量は, 慣性中心にあって質量 $\sum m_i$ をもつ質点の運動量に等しい.

実際, $(\sum m_i) r = \sum m_i r_i$ であるから, $(\sum m_i)\dot{r} = \sum m_i \dot{r}_i$.

こうして運動量に関する定理は, 慣性中心の運動に関する定理として次のように定式化できる.

定理　系の慣性中心は, あたかも, そこに全質量が集中し, すべての力がそこに働くかのように運動する.

証明　$(\sum m_i)\dot{r} = P$ であるから

$$(\sum m_i)\ddot{r} = \frac{dP}{dt} = \sum_i F_i.$$ ∎

系　閉じた系では, 慣性中心は等速直線運動をする.

C. 角運動量の保存法則

定義　**点 O に関する質点の角運動量**(運動量モーメント)とは，運動量の点 O に関するモーメント $\boldsymbol{M}$ をいう：

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}, m\dot{\boldsymbol{r}}].$$

点 O に関する系の角運動量とは，系の各点の角運動量の総和をいう：

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}_i, m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i].$$

定理　系の角運動量の変化速度は，系の各点に働く外力のモーメントの総和に等しい．

証明

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} [\dot{\boldsymbol{r}}_i, m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}_i, m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i].$$

初項は 0 であり，第 2 項は Newton 方程式により

$$\sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{F}_i] = \sum_{i=1}^{n} \left[\boldsymbol{r}_i, \left(\sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_i'\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{F}_i']$$

に等しい．これは，相互作用の 2 力はそのモーメントの和が 0 に等しいからである．なぜなら，

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}, \qquad [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{F}_{ij}] + [\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{F}_{ji}] = [\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{F}_{ij}] = 0.$$

よって，相互作用の力のモーメントの総和は 0 に等しい：

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\boldsymbol{r}_i, \sum_{i \neq j} \boldsymbol{F}_{ij}\right] = 0. \qquad \text{ゆえに，} \quad \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{F}_i']. \quad \blacksquare$$

系 1(角運動量の保存法則)　閉じた系では $\boldsymbol{M} = \text{const}$ である．——

外力のモーメントの総和を

$$\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{F}_i']$$

と記す．今証明した定理 $d\boldsymbol{M}/dt = \boldsymbol{N}$ から，

系 2　z 軸に関する外力のモーメントが 0 ならば，M_z は不変である．

D. エネルギーの保存法則

定義　次の量を**質量 m の質点の運動エネルギー**という．

$$T = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}.$$

定義　**質点系の運動エネルギー**とは，各点の運動エネルギーの総和をいう：

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}.$$

ここで，m_i は点の質量，$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ は点の速度である．

定理　系の運動エネルギーの増分は，系の各点に働く力がなす仕事の総和に等しい．

証明

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i,\ddot{\boldsymbol{r}}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\dot{\boldsymbol{r}}_i,m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\dot{\boldsymbol{r}}_i,\boldsymbol{F}_i).$$

よって

$$T(t)-T(t_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{dT}{dt}dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}(\dot{\boldsymbol{r}}_i,\boldsymbol{F}_i)\,dt=\sum_{i=1}^{n}A_i. \qquad \blacksquare$$

系が E^3 の n 個の質点からなるとする．この系の**配位空間**とは，Euclid 空間 E^3 の n 個の直積である：$E^{3n}=E^3\times\cdots\times E^3$．これも Euclid 空間の構造をもつ．$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n)$ で配位空間の点の位置ベクトルを，$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$ で力のベクトルを表わそう．上の定理は，次の形に書ける．

$$T(t_1)-T(t_0)=\int_{\boldsymbol{r}(t_0)}^{\boldsymbol{r}(t_1)}(\boldsymbol{F},d\boldsymbol{r})=\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{F})\,dt.$$

いいかえると次のようになる．

運動エネルギーの増分は $3n$ 次元の《力》$\boldsymbol{F}$ が，配位空間の《道》$\boldsymbol{r}(t)$ 上でなす仕事に等しい．

定義　系が**ポテンシャル的**または**保存的**であるとは，力がいずれも，各点の位置にのみ依存し：$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$，任意の道の上で力のなす仕事が始点と終点とにのみ依存するときをいう：

$$\int_{M_1}^{M_2}(\boldsymbol{F},d\boldsymbol{r})=\Phi(M_1,M_2).$$

定理　系がポテンシャル的であるためには，ポテンシャル・エネルギー，すなわち次のような関数 $U(\boldsymbol{r})$ の存在することが必要十分である．

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

証明　§6, B 項を見よ．

定理　運動の間，ポテンシャル系の全エネルギー $E=T+U$ は一定である：

$$E(t_0)=E(t_1).$$

証明　上に示したことから

$$T(t_1)-T(t_0)=\int_{\boldsymbol{r}(t_0)}^{\boldsymbol{r}(t_1)}(\boldsymbol{F},d\boldsymbol{r})=U(\boldsymbol{r}(t_0))-U(\boldsymbol{r}(t_1)).\qquad \blacksquare$$

系の各点に働く力を，相互作用の力と外力とに分けたとする：

$$\boldsymbol{F}_i=\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{F}_i'.$$

ここで，$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}=f_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}$ である．

主張　相互作用の力が距離にのみ依存するならば，つまり $f_{ij}=f_{ij}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)$ となるならば，これらの力はポテンシャル的である．

証明　系が2点 i, j だけからなれば，すぐ分るように相互作用のポテンシャル・エネルギーは

$$U_{ij}(\mathrm{r})=-\int_{\mathrm{r}_0}^{\mathrm{r}}f_{ij}(\rho)d\rho$$

で与えられる．実際，この時には

$$-\frac{\partial U_{ij}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)}{\partial\boldsymbol{r}_i}=f_{ij}\frac{\partial|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}{\partial\boldsymbol{r}_i}=-f_{ij}\boldsymbol{e}_{ij}.$$

よって，すべての点に働く相互作用のポテンシャル・エネルギーは次の通りである．

$$U(\boldsymbol{r})=\sum_{i>j}U_{ij}(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|).\qquad \blacksquare$$

さらに外力もポテンシャル的ならば，つまり $\boldsymbol{F}_i'=-\partial U_i'/\partial\boldsymbol{r}_i$ ならば，系はポテンシャル的であり，その全ポテンシャル・エネルギーは

$$U(\boldsymbol{r})=\sum_{i>j}U_{ij}+\sum_i U_i'$$

である．このような系では，力学的全エネルギー E は不変である：

$$E=T+U=\sum_i\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}+\sum_{i>j}U_{ij}+\sum_i U_i'.$$

系がポテンシャル的でないと，一般には，力学的全エネルギーは保存されない．

定義　力学的エネルギーの減少：$E(t_0)-E(t_1)$ を**非力学的エネルギー** E' の増加という．つまり

$$E'(t_1)-E'(t_0) = E(t_0)-E(t_1).$$

定理(エネルギーの保存法則)　全エネルギー $H=E+E'$ は不変である．——もちろん，この定理は上の定義から自明である．しかし具体的な物理系では，非力学的エネルギー量 E' が別の物理量(温度とか…)を通して表わされる，ということにこの定理のもつ意味がある．

E. 例　2体問題　質量 m_1, m_2 の2質点が互いに相互作用を及ぼし，そのポテンシャル・エネルギーは U であるとする．つまり運動方程式は

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_1}, \qquad m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_2}, \qquad U = U(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|).$$

定理　2体間の距離 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ の変化は，質量 $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$[†] の質点がポテンシャル $U(|\boldsymbol{r}|)$ をもつ場を運動する時の変化と同じである．——

$\boldsymbol{r}_0$ で慣性中心の位置ベクトルを表わす:

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}.$$

運動量の保存法則によって点 $\boldsymbol{r}_0$ は等速直線運動をする．

ベクトル $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ を考えよう．運動方程式の第1式に m_2 を，第2式に m_1 を掛けて引算をすると

$$m_1m_2\ddot{\boldsymbol{r}} = -(m_1+m_2)\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

となる．ここで，$U=U(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)=U(|\boldsymbol{r}|)$ である．

とくに Newton 引力の場合には，2点は共通の慣性中心の周りに慣性中心を焦点として円錐曲線を描く(図40)．

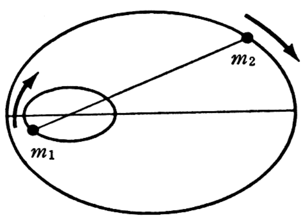


図40　2体問題

問　地球と月の共通の慣性中心の周りに，地球の中心が描く楕円の長軸の長さを決めよ．この慣性中心はどこにあるか．地球の内か外か．(月の質量は地球の1/81である．)

---

†) これを換算質量という．

[月と地球の平均距離は地球の赤道半径の約60倍である.]

§11　相似性の考え方

いわゆる相似性と次元の考え方を使えば，運動方程式を解かずに，方程式の形から重要な情報が得られることがある．運動方程式の形を変えずに，時間，長さ，質量とかの尺度単位をうまく取り直すことが，この考え方の本質である．

A. 例　$\boldsymbol{r}(t)$ が次の方程式を満たすとする．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

$t_1=\alpha t$，$m_1=\alpha^2 m$ と変換すれば，$\boldsymbol{r}(t_1)$ は方程式 $m_1 d^2\boldsymbol{r}/dt_1{}^2=-\partial U/\partial\boldsymbol{r}$ を満たす．いいかえると，

質点の質量が1/4になると，同じ力の場では同じ軌道上を2倍の速さで通り過ぎる*)．

B. 問　中心力場のポテンシャル・エネルギーが ν 次同次関数であるとする．つまり，任意の $\alpha>0$ に対して

$$U(\alpha r) = \alpha^\nu U(r).$$

曲線 γ が運動の軌道ならば，相似な曲線 $\alpha\gamma$ も（相似な初期条件をもつ）運動の軌道である．これを示せ．これらの軌道を1周するのに必要な時間の比を求めよ．これから，振子の等時性 ($\nu=2$) と Kepler の第3法則 ($\nu=-1$) を導け．

問　惑星の半径が地球の $1/\alpha$，質量が $1/\beta$ とすると，重力加速度は地球の何分の1か．また，第1，第2宇宙速度は地球の何分の1か．

[解]　$\gamma=\beta\alpha^{-2}$，$\delta=\sqrt{\beta/\alpha}$.

たとえば，月に対しては $\alpha\approx3.7$，$\beta\approx81$，したがって重力加速度は地球の約1/6 ($\gamma\approx 6$)，宇宙速度は共に地球の約1/5 ($\delta\approx4.7$) となる．

問**)　砂漠の動物は水源間の大きな距離を克服せねばならない．動物が水源を離れていられる最大の時間は，動物の大きさ L にどう関係するか．

[解]　L に正比例する．

水の貯蔵量は身体の体積つまり L^3 に比例し，蒸発量は体表面積つまり L^2 に比例する．ゆえに，1つの水源から別の水源へ移動するまでの最大の時間は L に比例する．

---

*)　ここでは U は m に無関係であると仮定する．重力場ではポテンシャル・エネルギー U は m に比例するため，周期は動点の質量 m には依存しない．

**)　J. Smith [1].

なお，動物が通過できる最大の距離は，L に比例して大きくなる(次の問を見よ)．

問*) 動物が平地を走るとき，山を登るとき，その速さは動物の大きさ L にどう関係するか．

［解］ 平地では L^0 に，山では L^{-1} に比例する．

動物の出す力は L^2 に比例する．(筋肉の効率はほぼ一定で約25%，化学エネルギーの残り75%が体外へ熱として発散される．熱の発散量も体表面積，つまり L^2 に比例する．したがって，有効なエネルギーも L^2 に比例する．)

空気による抵抗力は速度の2乗と断面積とに比例する．したがって，これに打ち克つ力は v^2L^2v に比例する．こうして $v^3L^2\sim L^2$，故に $v\sim L^0$．実際に，兎よりも小さくなく馬よりも大きくない動物が平地を走る時の速さは，身体の大きさには関係しない．

山を登るには $mgv\sim L^3v$ なる力が必要である．動物の出す力は L^2 に比例するから，$v\sim L^{-1}$ である．確かに犬は易々と丘を駆け上るが，馬は歩を緩める．

問*) 跳躍する高さは，動物の大きさにどう関係するか．

［解］ L^0．

高さ h 跳躍するに必要なエネルギーは L^3h に比例する．筋力 F のなす仕事は FL に比例する．力 F は L^2 に比例する(というのは，骨の耐久力はその断面積に比例するから)．かくて，$L^3h\sim L^2\cdot L$，つまり，跳躍の高さは動物の大きさには関係しない．確かに，トビネズミとカンガルーの跳躍の高さは，ほとんど同じである．

---

*) J. Smith [1].

第 II 部 Lagrange 力学

Lagrange 力学は力学系の運動を配位空間を借りて記述するものである．力学系の配位空間は微分可能多様体の構造をもつ．微分可能多様体上には微分同相の群が働く．Lagrange 力学の基本的な概念と定理は(たとえ，これらが局所座標の言葉で定式化されていようと)，この群に関して不変である*).

Lagrange 力学系は多様体《配位空間》とその接バンドル上の関数《Lagrange 関数》とによって与えられる．

配位空間の微分同相からなる 1-パラメーター群が Lagrange 関数を不変に保てば，保存法則(すなわち，運動方程式の第 1 積分)が定まる．

Newton のポテンシャル系は Lagrange 系の特別な場合である(配位空間は Euclid 空間であり，Lagrange 関数は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの差に等しい)．

Lagrange の観点に立つと，力学の一連の問題，たとえば，微小振動論，剛体の力学などの問題が十分に研究できる．

第 3 章 変分原理

本章では Newton のポテンシャル系の運動が，変分原理の極値であるという，いわゆる《Hamilton の最小作用の原理》を示す．

このことから，曲線座標系で運動方程式を即座に書き下す方法などの多くの重要な結果，および質点が出発点の近くへ再び帰って来る，というような一連の定性的な結論が導かれる．

本章では n 次元座標空間を用いる．この空間のベクトル $\boldsymbol{x}$ は，数の組 $(x_1, \cdots, x_n)$ であり，$\partial f/\partial \boldsymbol{x}$ は $(\partial f/\partial x_1, \cdots, \partial f/\partial x_n)$ を表わす．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ である．

---

*) さらに，時間にも作用する，より広い変換群に関しても不変である．

§12 変分法

後のためには変分法の知識が必要である．より詳しい説明については，たとえば次のものを参照されたい．Gelfand–Fomin [1], Shilov [1].

変分法の問題とするところは，定義域が無限次元空間，つまり曲線の空間であるような関数の極値を求めることである．このような関数を**汎関数**という．

汎関数の例には，たとえば Euclid 平面上の曲線

$$\gamma = \{(t, x):\ x = x(t),\ t_0 \leq t \leq t_1\}$$

の長さ

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt$$

がある．

一般に，曲線のつくる空間から数直線への写像を汎関数という．

曲線 γ に《近い》曲線 $\gamma' = \{(t, x) : x = x(t) + h(t)\}$ を考えよう．これを $\gamma' = \gamma + h$ と書くことにする．

汎関数 Φ の増分 $\Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma)$ を考える (図 41).

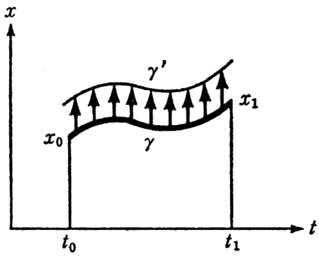


図 41 曲線の変分

A. 変分

定義 汎関数 Φ*) は，増分が以下のように $\Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) = F + R$ と表わされるとき，**微分可能**であるという．

(i) F は h に対して線形である：γ を固定すると，$F(h_1+h_2) = F(h_1) + F(h_2)$, $F(ch) = cF(h)$,

(ii) $R(\gamma, h) = O(h^2)$，つまり $|h| < \varepsilon$, $|dh/dt| < \varepsilon$ ならば，$|R(\gamma, h)| < C\varepsilon^2$.

---

*) どんなクラスの曲線上で汎関数 Φ が定義されているか，h はどんな線形空間上を動くか指示すべきであろう．たとえば，どちらも無限回微分可能な関数を問題にしていると考えてよい．

増分の線形部分 $F(h)$ を**微分**という.

汎関数 Φ が微分可能であれば，その微分は**一意的**に定まることが示される．汎関数の微分は**変分**ともいい，h を**曲線の変分**という.

例　$\gamma=\{(t, x):\ x=x(t),\ t_0\leq t\leq t_1\}$ を (t, x) 平面上の曲線，$L=L(a, b, c)$ を 3 変数の微分可能な関数とする．汎関数

$$\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt, \qquad \dot{x}=\frac{dx}{dt}$$

を作る．たとえば，$L=\sqrt{1+b^2}$ の場合には，曲線 γ の長さが得られる.

定理　汎関数 $\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\,dt$ は微分可能で，その微分は次式で与えられる.

$$F(h)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]h\,dt+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

証明

$$\Phi(\gamma+h)-\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}[L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t)-L(x, \dot{x}, t)]\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}h+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right]dt+O(h^2)=F(h)+R,$$

ここに,

$$F(h)=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial x}h+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right]dt, \qquad R=O(h^2)$$

である．部分積分して

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h}\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}h\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)dt+h\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$ ∎

B. 極 値 曲 線

定義　微分可能な汎関数 Φ の**極値曲線**とは，任意の h に対して $F(\gamma, h)=0$ となる曲線 γ をいう.

(関数の微分が 0 になる点を，停留点(または極値点)というのと同じである.)

定理　2 定点 (t_0, x_0)，(t_1, x_1) を通る曲線の作る空間で，曲線 $\gamma: x=x(t)$ が汎関数 $\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\,dt$ の極値曲線であるためには，この曲線にそって次の方程式の成り立つことが必要十分である.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0.$$

補題　連続関数 $f(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ が，$h(t_0)=h(t_1)=0$ である任意の連続関数*) $h(t)$ に対して，常に，$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt=0$ であれば，$f(t)\equiv 0$ である．

補題の証明　$f(t^*)>0$, $t_0<t^*<t_1$ とする．$f(t)$ は連続であるから，点 t^* のある近傍 Δ: $t_0<t^*-d<t<t^*+d<t_1$ で $f(t)>c$ である．関数 $h(t)$ を Δ の外で $h(t)=0$, Δ で $h(t)>0$, 区間 $\Delta/2$: $t^*-d/2<t<t^*+d/2$ で $h(t)\equiv 1$ とする．このとき，明らかに，$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt \geq cd>0$ (図 42)．これは仮定に反するから，すべての $t_0<t^*<t_1$ に対して $f(t^*)=0$ である．▮

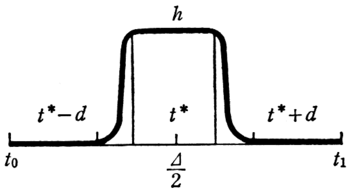


図 42　関数 h の作り方

定理の証明　先の定理により

$$F(h)=-\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}\right]h\,dt+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

$h(t_0)=h(t_1)=0$ であるから，積分の外の項は 0 に等しい．γ が極値曲線であれば，$h(t_0)=h(t_1)=0$ であるすべての h に対して $F(h)=0$. したがって，$f(t)=d(\partial L/\partial \dot{x})/dt-\partial L/\partial x$ とおくと，このような $h(t)$ に対して，$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt=0$ となる．補題により $f(t)\equiv 0$. 逆に，$f(t)\equiv 0$ ならば，明らかに $F(h)\equiv 0$. ▮

例　長さの極値曲線は直線であることを確かめよう．次のようになる．

$$L=\sqrt{1+\dot{x}^2},\qquad \frac{\partial L}{\partial x}=0;\qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}},\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right)=0,$$

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=c,\qquad \dot{x}=c_1,\qquad x=c_1t+c_2.$$

C. Euler-Lagrange の方程式

定義　方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

---

*)　少なくとも，無限回微分可能な関数 h に対して．

を，汎関数 Φ に対する **Euler-Lagrange の方程式**という．ただし，

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\,dt.$$

さて，$\boldsymbol{x}$ を n 次元座標空間 $\mathbf{R}^n$ のベクトル，$\gamma = \{(t, \boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t),\ t_0 \leq t \leq t_1\}$ を $n+1$ 次元空間 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ の曲線，$L : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $2n+1$ 変数の関数とする．先と同様にして次の定理が証明される．

定理　2 定点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, $(t_1, \boldsymbol{x}_1)$ を結ぶ曲線のなす空間上の汎関数

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)\,dt$$

に対して，曲線 γ が極値曲線であるためには曲線 γ にそって Euler-Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$$

の成り立つことが必要十分である．——

これは 2 階の方程式 n 個からなる系であり，解は $2n$ 個の任意定数に依存する．これらを決める時に，$2n$ 個の初期条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1$ が使われる．

問　2 定点を結ぶ極値曲線が沢山ある例と，1 つも無い例とを挙げよ．

D. 重要な注意　曲線 γ が汎関数の極値曲線であるという性質は，座標系のとり方によらない．

たとえば，曲線の長さという 1 つの汎関数が，Descartes 座標と極座標とでは，異なる式

$$\Phi_{\mathrm{des}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\,dt, \qquad \Phi_{\mathrm{pol}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\,dt$$

で与えられる．極値曲線は同じで平面上の直線である．

Descartes 座標と極座標とでは，直線は異なる方程式で与えられる：$x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$; $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$．しかし，どちらも Euler-Lagrange の方程式を満たす：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

先の場合には，$x_{\mathrm{des}} = (x_1, x_2)$, $L_{\mathrm{des}} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$ であり，後の場合には，$x_{\mathrm{pol}} = (r, \varphi)$, $L_{\mathrm{pol}} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$ である．…….

こうして，全直線族の微分方程式を，任意の座標系で簡単に書くことができる．

問　平面上の全直線族の微分方程式を極座標で書け．

§13　Lagrange 方程式

ここでは，極値曲線はポテンシャル系の Newton 方程式の解である，という変分原理を示す．

Newton 力学の方程式

$$\frac{d}{dt}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)+\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}=0 \tag{1}$$

を Euler-Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}}=0$$

と比べよう．

A. Hamilton の最小作用の原理

定理　力学系(1)の運動は汎関数 $\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L dt$ の極値曲線と一致する．ここで，$L=T-U$ は運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーとの差である．

証明　$U=U(\boldsymbol{r})$，$T=\sum m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/2$ であるから

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}=m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}.$$ ∎

系　$(q_1, \cdots, q_{3n})$ を n 質点からなる系の配位空間における任意の座標系とする．このとき，$\boldsymbol{q}$ の時間変化は Euler-Lagrange の方程式に従う：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}=0 \qquad (L=T-U).$$

証明　直前の定理により，運動は汎関数 $\int L dt$ の極値曲線である．したがって，それは任意の座標系において，その座標系で表わした Euler-Lagrange の方程式を満たす．∎

定義　力学では次のような術語が使われる．$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)=T-U$ を **Lagrange 関数**または**ラグランジアン**，q_i を**一般座標**，$\dot{q}_i$ を**一般速度**，$\partial L/\partial \dot{q}_i=p_i$ を**一般運動量**，$\partial L/\partial q_i$ を**一般力**，$\int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,dt$ を**作用**，$d(\partial L/\partial \dot{q}_i)/dt-\partial L/\partial q_i=0$ を **Lagrange 方程式**という．

この定理を《Hamilton の最小作用の原理》という．多くの場合に運動 $\boldsymbol{q}(t)$ は極値であるばかりか，作用汎関数 $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ の**最小**値を与えることによる．

B. 最も簡単な例

例 1　E^3 の自由質点に対しては

$$L = T = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2},$$

Descartes 座標 $q_i = r_i$ では

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 + \dot{q}_3{}^2).$$

このとき一般速度は速度ベクトルの成分であり，一般運動量 $p_i = m\dot{q}_i$ は運動量ベクトルの成分である．Lagrange 方程式は Newton 方程式 $d\boldsymbol{p}/dt = 0$ に一致する．極値曲線は直線である．Hamilton の原理によって，直線は**最短**(長さ $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{q}_1{}^2+\dot{q}_2{}^2+\dot{q}_3{}^2}\,dt$ の極値曲線)**であるばかりか，作用** $\int_{t_0}^{t_1}(\dot{q}_1{}^2+\dot{q}_2{}^2+\dot{q}_3{}^2)\,dt$ **の極値曲線でもある．**

問　この極値が最小値であることを示せ．

例 2　**平面上の中心力場における運動**を極座標 $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$ で考えよう．関係式 $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$ によって，運動エネルギーは $T = m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2 = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)/2$ であり，ラグランジアンは $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q})$，$U = U(q_1)$ であることが分る．

一般運動量は $\boldsymbol{p} = \partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$，すなわち，

$$p_1 = m\dot{r}, \qquad p_2 = mr^2\dot{\varphi}$$

である．第 1 の Lagrange 方程式 $\dot{p}_1 = \partial L/\partial q_1$ は

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

となる．この方程式は既に §8 で求めた．$q_2 = \varphi$ は L の中にはないから，$\partial L/\partial q_2 = 0$ である．したがって，第 2 の Lagrange 方程式は $\dot{p}_2 = 0$，つまり $p_2 = \mathrm{const}$ である．これは角運動量の保存法則である．

場が中心力場ではない一般の場合には，$U = U(r, \varphi)$，$\dot{p}_2 = -\partial U/\partial\varphi$ である．

この方程式は $d(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_z)/dt = \boldsymbol{N}$ と書き直せる．ここで，$\boldsymbol{N} = ([\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}], \boldsymbol{e}_z)$，$\boldsymbol{F} = -\partial U/\partial\boldsymbol{r}$ である．(z 軸に関する角運動量の変化速度は z 軸に関する力 $\boldsymbol{F}$ のモーメントに等しい.)

実際，

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial\varphi}d\varphi = -(\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r})$$

$$= -(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}_r)\,dr - r(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}_\varphi)\,d\varphi$$

であるから，

$$-\frac{\partial U}{\partial \varphi}=r(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}_\varphi)=r([\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{F}], \boldsymbol{e}_z)=([\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}], \boldsymbol{e}_z). \quad \blacksquare$$

この例は角運動量の保存法則が次のように一般化できることを示唆している．

定義　座標 q_i が Lagrange 関数に含まれていないとき：$\partial L/\partial q_i=0$，$q_i$ は**循環的**であるという．

定理　循環座標に対応する一般運動量は不変である：$p_i=\text{const}$.

証明　Lagrange 方程式により

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0. \quad \blacksquare$$

§14　Legendre 変換

Legendre 変換は線形空間上の関数から共役空間上の関数へ移る数学的補助手段である．Legendre 変換は代数幾何学における射影双対性と接線座標にも，解析学における共役 Banach 空間の作り方にも似ている．また，物理学においてもこの変換はよく現われる(たとえば，熱力学的量の定義にあたって)．

A.　**定義**　$y=f(x)$ を凸関数：$f''(x)>0$ とする．関数 f の **Legendre 変換**とは，別の変数 p の新しい関数 g で，次の方法で作られる(図43)．

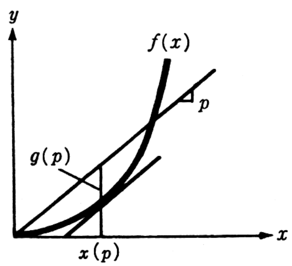


図43　Legendre 変換

(x, y) 平面上に関数 f のグラフを描く．数 p を与えたとする．直線 $y=px$ を考えよう．曲線が y 軸に平行にこの直線からもっとも遠く離れる点を $x=x(p)$ とする．つまり，p を固定するとき関数 $px-f(x)=F(p, x)$ は点 $x(p)$ において最大値をとる．このとき，$g(p)=F(p, x(p))$ とするのである．

点 $x(p)$ は極値条件：$\partial F/\partial x=0$，つまり $f'(x)=p$ から定まる．f は凸であ

るから，このような点 $x(p)$ はそれが存在すればただ1つである．

問 関数 f が x 軸上のすべての点で定義されていても，g の定義域は1点だけのことも，線分，半直線になることもある．このことを示せ．もし関数 f が線分上で定義されていると，関数 g は p 軸全体で定義されることを示せ．

B. 例

例 1 $f(x)=x^2$ とすると，$F(p,x)=px-x^2$，$x(p)=p/2$，$g(p)=p^2/4$.

例 2 $f(x)=mx^2/2$ とすると，$g(p)=p^2/2m$.

例 3 $f(x)=x^\alpha/\alpha$ とすると，$g(p)=p^\beta/\beta$ である．ここに $1/\alpha+1/\beta=1$ $(\alpha>1,\ \beta>1)$.

例 4 $f(x)$ を凸折線とすると，$g(p)$ もまた凸折線である．このとき，$f(x)$ の頂点には $g(p)$ の辺が，$f(x)$ の辺には $g(p)$ の頂点が対応する．たとえば，図44の角は Legendre 変換により辺に移る．

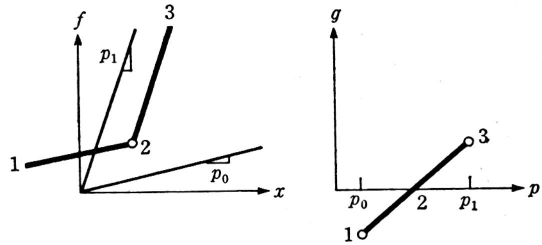


図 44 Legendre 変換は，角を辺に移す

C. 対合性 関数 $f(x)$ は必要な回数だけ微分可能であるとし，$f''(x)>0$ とする．Legendre 変換は，凸関数を凸関数に移すことが容易に分る．したがって変換をもう一度施してよい．

定理 Legendre 変換は対合的である，すなわち，その2乗は恒等変換に等しい．つまり，f が Legendre 変換により g に移ると，g の Legendre 変換は f である．

証明 変数 p の関数 g を Legendre 変換するためには，定義により新しい独立変数(x で表わそう)を考え，関数

$$G(x,p)=xp-g(p)$$

を作り，G が最大値をとる点，つまり

$$\frac{\partial G}{\partial p}=0, \qquad \text{すなわち，} g'(p)=x$$

となる点 $p(x)$ を見つけねばならない．このとき，$g(p)$ の Legendre 変換は x

の関数で $G(x,p(x))$ に等しい.

$G(x,p(x))=f(x)$ であることを示そう. これには $G(x,p)=xp-g(p)$ が簡単な図形的意味をもつことに注意する. これは $f(x)$ のグラフに傾き p で接する接線が座標 x でとる値である(図45). 実際, p を固定すると, $G(x,p)$ は x の1次関数で $\partial G/\partial x=p$ であり, $x=x(p)$ では, $g(p)$ の定義により $G(x,p)=xp-g(p)=f(x)$ となるからである.

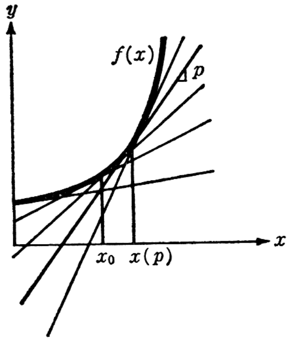


図45 Legendre 変換の対合性

さて, $x=x_0$ を固定し p を変化させよう. このとき, $f(x)$ の傾き p の接線と直線 $x=x_0$ との交点の y 座標が $G(x_0,p)$ である. グラフの凸性から, これらの**接線はすべて曲線の下側にあり**, したがって $x(p_0)$ を固定すれば, $G(x,p)$ の最大値は $f(x)$ に等しい(それは, $p=p(x_0)=f'(x_0)$ で達せられる). ∎

系*⁾ 直線族 $y=px-g(p)$ が与えられたとする. このとき, 包絡線の方程式は $y=f(x)$ である. ここに, f は関数 g の Legendre 変換である.

D. Young の不等式

定義 互いに他方の Legendre 変換となる2つの関数 f,g を **Young の意味で双対的である**という.

Legendre 変換の定義により, 任意の x, p に対して $F(x,p)=px-f(x)\leq g(p)$ である. これから次の **Young の不等式**が出る.

$$px\leq f(x)+g(p).$$

例1 $f(x)=x^2/2$ ならば $g(p)=p^2/2$ である. これから周知の不等式

---

*) 容易に分るように, これが《Clairaut の微分方程式》の理論である.

$$px \leq \frac{x^2}{2}+\frac{p^2}{2} \qquad (\forall x, \forall p)$$

が得られる.

例 2 $f(x)=x^{\alpha}/\alpha$ ならば $g(p)=p^{\beta}/\beta$, $1/\alpha+1/\beta=1$ であり, Young の不等式

$$px \leq \frac{x^{\alpha}}{\alpha}+\frac{p^{\beta}}{\beta} \qquad \left(\forall x>0,\ \forall p>0,\ \forall \alpha>1,\ \forall \beta>1,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\right)$$

が得られる.

E. 多変数の場合 さて, $f(\boldsymbol{x})$ をベクトル変数 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ の凸関数とする(すなわち, 2 次形式 $((\partial^2 f/\partial \boldsymbol{x}^2)d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x})$ が正定値である). このとき, Legendre 変換はベクトル変数 $\boldsymbol{p}=(p_1, \cdots, p_n)$ の関数 $g(\boldsymbol{p})$ で, 先と同様な式:

$$g(\boldsymbol{p}) = F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})) = \max_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}),$$

ただし,

$$F(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$$

で定義される.

先の議論はすべて, とりわけ Young の不等式はそのままこの場合に移せる.

問 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を線形空間 $\mathbf{R}^n$ 上の凸関数とし, $\mathbf{R}^{n*}$ で共役空間を表わす. 上式によって, 写像 $g: \mathbf{R}^{n*} \to \mathbf{R}$ が定義されることを示せ. (線形形式 $df|_{\boldsymbol{x}}$ は, $\boldsymbol{x}$ が $\mathbf{R}^n$ を走るとき, $\mathbf{R}^{n*}$ 全体を動くものとする.)

問 f を 2 次形式: $f(\boldsymbol{x})=\sum f_{ij}x_i x_j$ とする. Legendre 変換はまた 2 次形式: $g(\boldsymbol{p})=\sum g_{ij}p_i p_j$ であり, 対応する点においては両形式の値が一致することを示せ (図 46):

$$f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})) = g(\boldsymbol{p}), \qquad g(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}).$$

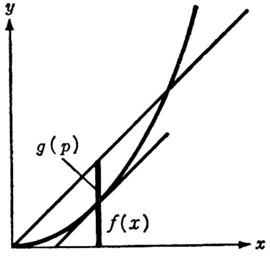


図 46 2 次形式の Legendre 変換

§15 Hamilton 方程式

Legendre 変換を施すと，Lagrange の2階微分方程式は注目すべき対称性のある1階の方程式系——**Hamilton 方程式系**(別名，**正準方程式系**)に移る．

A. Lagrange 方程式と Hamilton 方程式の同値性 Lagrange 関数 $L:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ から定まる Lagrange 方程式系 $\dot{\boldsymbol{p}}=\partial L/\partial\boldsymbol{q}$ を考えよう．ここで $\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ である．L は第2変数 $\dot{\boldsymbol{q}}$ に関して凸であると仮定する*)．

定理 Lagrange 方程式系は，1階の方程式 $2n$ 個の系——Hamilton 方程式系

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{q}},\qquad \dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{p}}$$

に同値である．ここで，$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}}-L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ は，Lagrange 関数を $\dot{\boldsymbol{q}}$ の関数と見て，Legendre 変換したものである．

証明 定義により $\dot{\boldsymbol{q}}$ に関する $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ の Legendre 変換は，関数 $H(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}}-L(\dot{\boldsymbol{q}})$ である．ここで，$\dot{\boldsymbol{q}}$ は式 $\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ により $\boldsymbol{p}$ で表わされる．H はさらに $\boldsymbol{q},t$ にも依存する．関数 H を **Hamilton 関数**という．

Hamilton 関数の全微分

$$dH=\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{p}}d\boldsymbol{p}+\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{q}}d\boldsymbol{q}+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

は，$\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ とするとき $\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}}-L$ の全微分に等しい：

$$dH=\dot{\boldsymbol{q}}d\boldsymbol{p}-\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}}d\boldsymbol{q}-\frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

dH に対する2つの表示は一致しなければならないから，

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{p}},\qquad \frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{q}}=-\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}},\qquad \frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Lagrange 方程式 $\dot{\boldsymbol{p}}=\partial L/\partial\boldsymbol{q}$ を考慮すると，Hamilton 方程式が得られる．

こうして，$\boldsymbol{q}(t)$ が Lagrange 方程式を満たすと，$(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t))$ は Hamilton 方程式を満たす．逆も同様にして証明される．故に，Lagrange 系と Hamilton 系とは互いに同値である．▮

注意 この定理は力学の Lagrange 方程式のみならず，すべての変分問題に

---

*) 応用上この凸関数は，普通，正定値2次形式である．

通用する．

B. Hamilton 関数とエネルギー

例 方程式はやはり力学のものとする．Lagrange 関数は普通の形 $L=T-U$ であり，運動エネルギー T は $\dot{\boldsymbol{q}}$ に関して 2 次形式である：

$$T=\frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad a_{ij}=a_{ij}(\boldsymbol{q},t); \qquad U=U(\boldsymbol{q}).$$

定理 この仮定のもとでは，Hamilton 関数は全エネルギー $H=T+U$ である．——

証明は 2 次形式の Legendre 変換に関する次の補題による．

補題 2 次形式 $f(\boldsymbol{x})$ とその Legendre 変換 $g(\boldsymbol{p})$ とは，対応する点において一致する：

$$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{p}).$$

例 形式 $f(x)=x^2$ に対して，これは放物線の接線の性質である．形式 $f(x)=mx^2/2$ に対しては $p=mx$, $g(p)=p^2/2m=mx^2/2=f(x)$ である．

補題の証明 同次関数に対する Euler の定理により

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}=2f.$$

したがって，$g(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x})=(\partial f/\partial \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x})=2f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$. ∎

定理の証明 補題と同じように考えて

$$H=\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}}-L=2T-(T-U)=T+U. \qquad ∎$$

例 1 次元の運動に対しては

$$\ddot{q}=-\frac{\partial U}{\partial q}.$$

このときには $T=\dot{q}^2/2$, $U=U(q)$, $p=\dot{q}$, $H=p^2/2+U(q)$ であり，Hamilton 方程式は次のようになる．

$$\begin{cases}\dot{q}=p,\\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}.\end{cases} \qquad \text{——}$$

この例によって **Hamilton 方程式のどちらに負の符号がつくか**覚え易い．

Hamilton 系と運動方程式の同値性定理から，一連の重要な系が得られる．たとえば，エネルギーの保存法則は次のように簡単な形をとる．

系1 等式 $dH/dt=\partial H/\partial t$ が成り立つ．とくに，Hamilton 関数が時間に陽に依存しない($\partial H/\partial t=0$)系では，Hamilton 関数の保存法則：$H(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t))=$ const が成立する．

証明 軌跡にそって H の変化 $H(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t), t)$ を考えよう．Hamilton 方程式により，

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\left(-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right)+\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad \blacksquare$$

C. 循環座標 中心力場を調べるときに極座標を導入すると，問題が1次元に帰着することを注意した．問題に対称性があり Hamilton 関数が座標の幾つかに依存しないよう座標系がとれると，第1積分が幾つか得られて，問題は低次元に帰着する．

定義 座標 q_1 が Hamilton 関数 $H(p_1, \cdots, p_n; q_1, \cdots, q_n; t)$ の中に現われない：$\partial H/\partial q_1=0$ ならば，この座標を**循環的**であるという(この用語は中心力場の時の角座標 φ という特殊な場合に由来する)．明らかに座標 q_1 は，Lagrange 関数に現われないとき($\partial L/\partial q_1=0$)，かつ，そのときにのみ循環的である．

運動方程式の Hamilton 形から次の系が得られる．

系2 q_1 を循環座標とする．このとき p_1 は第1積分である．そして他の座標の時間変化は $n-1$ 個の $q_2, \cdots, q_n$ を独立変数とし，パラメーター $c=p_1$ に依存する

$$H(p_2, \cdots, p_n, q_2, \cdots, q_n, t, c)$$

を Hamilton 関数にもつ系と同じである．

証明 $\boldsymbol{p}'=(p_2, \cdots, p_n)$，$\boldsymbol{q}'=(q_2, \cdots, q_n)$ とおこう．このとき Hamilton 系は次の形になる．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{q}'=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}'}, \qquad \frac{d}{dt}q_1=\frac{\partial H}{\partial p_1},$$
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}'=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}'}, \qquad \frac{d}{dt}p_1=0.$$

最後の方程式より，$p_1=$const. したがって，$\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}'$ に対する方程式では，p_1 は Hamilton 関数の中にパラメーターとして入るに過ぎない．この $2n-2$ 個の方程式系が解けると，q_1 に対する方程式は

$$\frac{d}{dt}q_1 = f(t), \qquad \text{ただし,}\ f(t) = \frac{\partial}{\partial p_1}H(p_1, \boldsymbol{p}'(t), \boldsymbol{q}'(t), t)$$

の形になり，容易に積分できる．▮

力学ですでに解かれた問題は，殆どすべて系2による．

系3 循環座標をもつ自由度2の系($n=2$)は，すべて積分できる．——

なぜなら，この時は p', q' に対する系は1次元であり，第1積分 $H(p', q')=c$ によって直接積分できる．

§16 Liouville の定理

Hamilton 方程式の相流は相体積を保つ．このことから，たとえば Hamilton 系における安定性は，漸近的ではありえないことが分る．

簡単のために，Hamilton 関数が時間を陽に含まない場合，$H=H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ を考える．

A. 相 流

定義．座標 $p_1, \cdots, p_n ; q_1, \cdots, q_n$ をもつ $2n$ 次元空間を**相空間**という．

例 $n=1$ では，これは第I部で考えた系 $\ddot{x}=-\partial U/\partial x$ の相平面である．——

このもっとも簡単な例と同じように，Hamilton 方程式の右辺はベクトル場を与える．相空間の各点 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ に，$2n$ 次元ベクトル $(-\partial H/\partial \boldsymbol{q}, \partial H/\partial \boldsymbol{p})$ がおかれている．Hamilton 方程式の解はいずれも，時間軸全体に延長できると仮定しよう*)．

定義 **相流**とは，相空間の1-パラメーター変換群

$$g^t : (\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{q}(0)) \longrightarrow (\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t))$$

をいう．ここで，$\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t)$ は Hamilton 方程式の解である(図47)．

問 $\{g^t\}$ は1-パラメーター変換群であることを示せ．

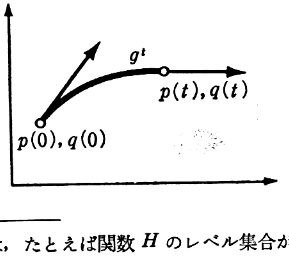


図47 相 流

*) このためには，たとえば関数 H のレベル集合がコンパクトであればよい．

B. Liouville の定理 1) 相流は体積を保つ，つまり

$$\mathrm{vol}\, g^t D = \mathrm{vol}\, D$$

が任意の領域 D に対して成り立つ(図 48)．——

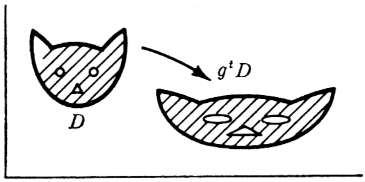


図 48 体積が保たれる

より一般的な次の命題 2) を証明しよう．これも Liouville に負う．

常微分方程式系 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ が与えられていて，その解は時間軸全体に延びていると仮定する．g^t を対応する変換群とする：

$$g^t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})t+O(t^2) \qquad (t\to 0). \tag{1}$$

$D(0)$ を空間 $\{\boldsymbol{x}\}$ の領域，$v(0)$ をその体積とする：

$$v(t) = \mathrm{vol}\, D(t), \qquad D(t) = g^t D(0).$$

2) $\mathrm{div}\, \boldsymbol{f}\equiv 0$ ならば，g^t は体積を保つ：

$$v(t) = v(0).$$

C. 証　明

補題 1 次の関係式が成り立つ．

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \int_{D(0)} \mathrm{div}\, \boldsymbol{f}\, dx \qquad (dx=dx_1\cdots dx_n).$$

証明 Jacobi 行列の定義により，任意の t に対して

$$v(t) = \int_{D(0)} \det \frac{\partial g^t \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} dx.$$

$\partial g^t \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{x}$ を式(1)により計算すると，$t\to 0$ のとき

$$\frac{\partial g^t \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = E+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}t+O(t^2)$$

が得られる．ここで，次のよく知られた線形代数の事実を使おう．

補題 2 任意の行列 $A=\|a_{ij}\|$ に対して，次の関係式が成り立つ．

$$\det(E+tA) = 1+t\, \mathrm{tr}\, A+O(t^2) \qquad (t\to 0),$$

ここで，$\mathrm{tr}\, A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ は行列 A のトレース(対角成分の和)である．

(証明は行列式を直接展開して得られる：まず1，次に t のかかる項が n 個，そして残りの項が t^2, t^3 等を含む.)

こうして

$$\det\frac{\partial g^t \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = 1+t\,\mathrm{tr}\,\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}+O(t^2).$$

ところで $\mathrm{tr}\,(\partial \boldsymbol{f}/\partial \boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\partial f_i/\partial x_i=\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}$. したがって

$$v(t) = \int_{D(0)}[1+t\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}+O(t^2)]dx,$$

これで補題1が得られた. ▮

定理 2) の証明　補題1で $t=0$ を $t=t_0$ としても構わないから，補題1は次の形に書ける.

$$\left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)}\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\,dx.$$

今，もし $\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}\equiv 0$ ならば $dv/dt\equiv 0$. よって定理2)が得られた. ▮

とくに，Hamilton 系に対しては

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left(-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right)+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\right)\equiv 0.$$

これで，Liouville の定理1)が証明された. ▮

問　Liouville の定理を非自励系 ($H=H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)$，または，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$) の場合に拡張せよ.

問　線形系 $\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x}$ の Wronski 行列式に対する Liouville の公式

$$W = W_0\exp\left(\int \mathrm{tr}\,A dt\right)$$

を示せ. ——

Liouville の定理の応用は広い.

問　Hamilton 系では相空間において，漸近安定な平衡点も漸近安定な極限周期解も存在しないことを示せ. ——

Liouville の定理のとくに重要な応用は統計力学にある.

Liouville の定理によって力学系の研究に，いわゆる**エルゴード理論***) の方法が適用できる．もっとも簡単な例だけを挙げよう.

---

*) たとえば，Halmos [1] を見よ.

D. Poincaré の再帰定理 D を Euclid 空間の有界領域とし，g は D をそれ自身へ写し体積を保つ1対1連続写像とする：$gD=D$. このとき，領域 D の任意の点の任意の近傍 U の中に，再び領域 U へ帰ってくる点 $x\in U$ がある．すなわち，或る $n>0$ に対して $g^nx\in U$. ——

この定理は，たとえば，ポテンシャル $U(x_1, x_2)$ が無限に増大する2次元系の運動の相流に適用できる．この場合，相空間の不変な有界領域は

$$D=\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}):\ T+U\leq E\}$$

で与えられる(図49)．

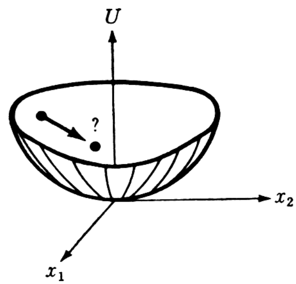


図49 非対称な椀の中を豆がどう動くか分らない．しかし，Poincaré の定理は，出発点の近くへいつか戻ってくることを予想する

Poincaré の定理は，殆どすべての動点が繰り返しその出発点の近くへ戻ってくる，と強めることができる．これは運動の性質に関する数少ない一般的結論の1つである．運動の詳細は，次の場合にすら誰にも分っていない．

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}, \qquad \boldsymbol{x}=(x_1, x_2).$$

Poincaré, Liouville の両定理から出るやや逆説的な結論に，次の予想がある．気体が入っている箱と真空の箱の間の仕切を開くと，或る時間後には再び気体の全分子が元の箱に集まってしまう(図50)．

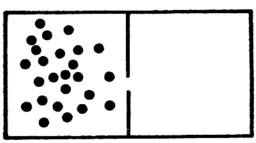


図50 全分子が元の箱に帰ってきた

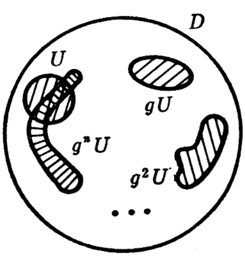


図51 再 帰 定 理

逆説の謎解きは《或る時間》が太陽系の存在時間よりも長いことにある.

Poincaré の定理の証明 近傍 U の像を考えよう(図51):

$$U,\ gU,\ g^2U,\ \cdots,\ g^nU,\ \cdots.$$

これらはどれも正の同じ体積をもつ. もしも, これらが交わらなければ, D の体積は無限である. よって, 或る $k\geq 0$, $l\geq 0$, $k>l$ に対して

$$g^kU\cap g^lU\neq\phi.$$

よって, $g^{k-l}U\cap U\neq\phi$. $g^{k-l}x=y$, $x\in U$, $y\in U$ とすると, $x\in U$ で $g^nx\in U$ ($n=k-l$) となる. ∎

E. Poincaré の定理の応用

例1 D を円周, g を角度 α の回転とする. $\alpha=2\pi m/n$ ならば g^n は恒等変換であって, 定理は明らかである. α が 2π と通約不能ならば, Poincaré の定理は

$$\forall\delta>0,\ \exists n:\ |g^nx-x|<\delta$$

を与える(図52). これから容易に次の定理が得られる.

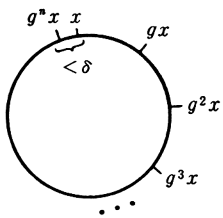


図52 円周上至るところ稠密な集合

定理 $\alpha\neq 2\pi m/n$ ならば, 集合 g^kx ($k=1, 2, \cdots$) は円周上至るところ稠密*) である.

問 中心力場 $U=r^4$ では, 運動の軌跡は閉じているか, または, 2つの円周の間の円環内を至るところ稠密に満たすことを示せ.

例2 D を2次元トーラス, φ_1, φ_2 をその上の角座標(緯度と経度)とする(図53). トーラス上の常微分方程式系

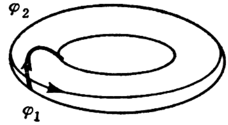


図53 トーラス

*) 集合 B の各点のどんな近傍にも集合 A の点があるとき, A は B の中で至るところ稠密であるという.

$$\dot{\varphi}_1 = \alpha_1, \qquad \dot{\varphi}_2 = \alpha_2$$

を考えよう．明らかに div $f=0$. 対応する運動

$$g^t : (\varphi_1, \varphi_2) \longrightarrow (\varphi_1+\alpha_1 t, \varphi_2+\alpha_2 t)$$

は面積 $d\varphi_1 d\varphi_2$ を保つ．Poincaré の定理から容易に次の定理が導かれる．

定理 α_1/α_2 が無理数ならば，《巻線》$g^t(\varphi_1, \varphi_2)$ はトーラス上至るところ稠密である．

問 ω が無理数ならば，Lissajous 図形 ($x=\cos t$, $y=\cos \omega t$) は，正方形 $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$ の中で至るところ稠密である．これを示せ．

例3 D を n 次元トーラス，すなわち n 個の円周の直積*) とする：

$$D = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n} = T^n.$$

n 次元トーラスの点は n 個の角座標 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ で与えられる．$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ とし，g^t を次のような体積を保つ変換とする．

$$g^t : T^n \longrightarrow T^n, \qquad \boldsymbol{\varphi} \longmapsto \boldsymbol{\varphi}+t\boldsymbol{\alpha}.$$

問 $\boldsymbol{\alpha}$ にどのような条件があれば，a) 軌跡 $g^t\boldsymbol{\varphi}$ ($t \in \mathbf{R}$: 実数群)，b) 軌跡 $g^k\boldsymbol{\varphi}$ ($k \in \mathbf{Z}$: 整数群)，は至るところ稠密になるか．——

例1-3は力学と密接に関連している．一方，Poincaré の定理は抽象的であるので，力学とは関連しない応用もある．

例4 数 2^n の最高位の数字 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, … を考えよう．

問 この数列の中に，数7が存在するか．7と8ではどちらがより頻繁に現われるか．現われる回数の比はどうか [第10章§51を見よ]．

---

*) 集合 $A, B, \cdots$ の直積とは，点の組 $(a, b, \cdots)$, $a \in A$, $b \in B$, … から成る集合である．

第4章　多様体上の Lagrange 力学

本章では微分可能多様体と接バンドルの概念を導入する．接バンドル上の Lagrange 関数は多様体上に Lagrange の《ホロノーム系》を定める．特別な場合として，振子や剛体のようにホロノーム拘束を受けた質点系がある．

§17　ホロノーム拘束

本節ではホロノーム拘束を受ける質点系の定義を与える．

A. 例　γ を平面上の滑らかな曲線とする．γ の近くに γ の方を向いた非常に強い力の場があると，常に動点は γ の近くに位置するであろう．無限に強い場という極限の場合には，点は曲線 γ の上にとどまらざるを得ない．このとき系に拘束が課せられたという(図54)．

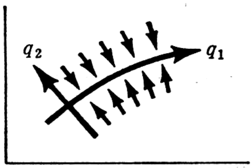


図54　無限に強い場としての拘束

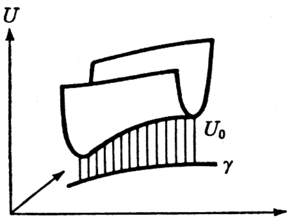


図55　ポテンシャル・エネルギー U_N

厳密な定式化を与えるために，座標 q_1 は曲線 γ に沿って，座標 q_2 は曲線 γ からの距離として，γ の近傍に曲線座標 q_1, q_2 を導入する．

ポテンシャル・エネルギーがパラメーター N に依存する系を考える(図55)：

$$U_N = Nq_2^2 + U_0(q_1, q_2).$$

(後に N を無限大に発散させる.)

γ 上に初期条件を考えよう：

$$q_1(0) = q_1^0, \qquad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_1^0, \qquad q_2(0) = 0, \qquad \dot{q}_2(0) = 0.$$

場 U_N をこの初期条件下で運動するときの q_1 座標の変化を $q_1 = \varphi(t, N)$ と記す．

定理　$N \to \infty$ のとき，極限

$$\lim_{N\to\infty} \varphi(t, N) = \psi(t)$$

が存在する．極限関数 $q_1=\psi(t)$ は Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_*}{\partial \dot{q}_1}\right)=\frac{\partial L_*}{\partial q_1}$$

を満たす．ここで，$L_*(q_1, \dot{q}_1)=T|_{q_2=\dot{q}_2=0}-U_0|_{q_2=0}$ (T は γ に沿う運動の運動エネルギー)．——

こうして q_1, q_2 に対する Lagrange 方程式は，$N\to\infty$ とすると $q_1=\psi(t)$ に対する Lagrange 方程式を与える．

平面にかえて，力学系をなす n 質点の $3n$ 次元配位空間——ここには計量 $ds^2=\sum m_i d\boldsymbol{r}_i^2$ がある (m_i は質量)——を，曲線 γ にかえて $3n$ 次元空間内の部分多様体 $\tilde{\gamma}$ を，q_1 にかえて $\tilde{\gamma}$ 上の或る座標 $\boldsymbol{q}_1$ を，q_2 にかえて $\tilde{\gamma}$ に垂直な方向の座標 $\boldsymbol{q}_2$ を考えても，全く同じ結果が得られる．

ポテンシャル・エネルギーが

$$U=U_0(\boldsymbol{q}_1)+N\boldsymbol{q}_2^2$$

の形であれば，$N\to\infty$ として，$\tilde{\gamma}$ 上の運動が Lagrange 関数

$$L_*=T|_{q_2=\dot{q}_2=0}-U_0|_{q_2=0}$$

をもつ Lagrange 方程式によって定義される．

B. 拘束をもつ系の定義　上の定理*)は証明しないし使うわけでもない．ただ次の定義のためにのみ必要である．

定義　質量が $m_1, \cdots, m_n$ である n 質点 $\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ の $3n$ 次元配位空間の中の m 次元曲面を γ とし，$\boldsymbol{q}=(q_1, \cdots, q_m)$ を γ 上の座標とする：$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q})$．方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}, \qquad L=\frac{1}{2}\sum m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2+U(\boldsymbol{q})$$

で記述される系を $3n-m$ 次元理想**ホロノーム拘束**を受けた n 点系という．曲面 γ を**拘束された系の配位空間**という．

曲面 γ が関数として独立な $k=3n-m$ 個の方程式 $f_1(\boldsymbol{r})=0, \cdots, f_k(\boldsymbol{r})=0$ によって与えられているならば，系は拘束 $f_1=0, \cdots, f_k=0$ を受けているという．

ホロノーム拘束を，大きいポテンシャル・エネルギーをもつ系の極限の場合としても定義できよう．力学におけるこの拘束の意味は，実験の示すように多

*) 証明は次のことによる．エネルギーが保存されるために，動点は γ から $cN^{-1/2}$ 以上離れることができない．これは $N\to\infty$ のとき 0 に近づく．

くの力学系が，程度に差はあれこのクラスの系に関係するということにある．

以後，理想ホロノーム拘束を単に拘束という．その他の拘束は本書では考えない．

§18 微分可能多様体

拘束を受けた系の配位空間は微分可能多様体である．本節では微分可能多様体のもっとも簡単な事柄を述べる．

A. 微分可能多様体の定義 集合 M 上に有限個または可算個の**チャート**の組が与えられて，M の各点が少なくとも1つのチャート上に表わされるとき，M 上に微分可能多様体の構造が与えられるという．

チャートとは，座標 Euclid 空間 $\boldsymbol{q}=(q_1, \cdots, q_n)$ の開領域 U と，U から M の部分集合への1対1写像 $\varphi: U\to\varphi U\subset M$ との組をいう．

2枚のチャート U, U' の点 p, p' が M 上の同一の点を表わすならば，点 p, p' の或る近傍 V, V' が M 上に同一の近傍を与える(図56)．こうして，1つのチャートの部分集合 $V\subset U$ から，もう1つのチャートの部分集合 $V'\subset U'$ の上への写像 $\varphi'^{-1}\circ\varphi: V\to V'$ が得られる．

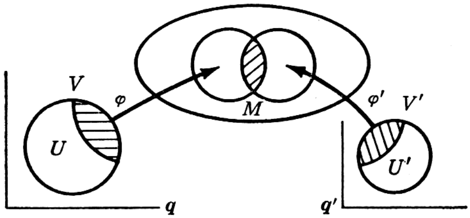


図56 結合されたチャート

これは座標 Euclid 空間 $\boldsymbol{q}$ の領域 V から座標 Euclid 空間 $\boldsymbol{q}'$ の領域 V' の上への写像であり，n 変数の関数 n 個によって与えられる：$\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q})$，($\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}')$)．これらの関数が微分可能*)であるとき，チャート U, U' は**結合された**という．

アトラスとは，互いに結合されたチャートの全体をいう．2つのアトラスは，

---

*) ここで，微分可能とは r 回連続微分可能のことをいう．r の正確な値($1\leq r\leq\infty$)は本質的でない(たとえば $r=\infty$ と考えてよい)．

それらを合併したものがまたアトラスであれば，**同値**であるという．

微分可能多様体とは，アトラスの同値類のことである．**連結***)多様体だけを考えることにしよう．このとき数nはすべてのチャートに共通である．これを多様体の**次元**という．

多様体上の点の**近傍**とは，チャートU上の対応する点の近傍を写像$\varphi: U \to M$で写したものをいう．多様体の異なる2点には，相交わらない近傍があると仮定する．

B. 例

例1　Euclid 空間$\mathbf{R}^n$は多様体である．アトラスはただ1つのチャートからなる．

例2　球面$S^2=\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=1\}$は多様体の構造をもつ．たとえば，アトラスは立体射影からなる2枚のチャート$(U_i, \varphi_i, i=1, 2)$よりなる(図57)．同様の構成はn次元球面

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}): \sum x_i^2=1\}$$

に対してもあてはまる．

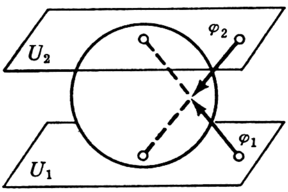


図57　球面のアトラス

例3　平面振子を考えよう．配位空間は円周S^1であり多様体である．アトラスは普通，角座標$\varphi: \mathbf{R}^1 \to S^1$，$U_1=(-\pi, \pi)$，$U_2=(0, 2\pi)$で与えられる(図58)．

例4　《球面》単振子の配位空間は2次元球面S^2である(図58)．

例5　《平面2重振子》の配位空間は，2つの円周の直積，つまり，2次元トーラス$T^2=S^1 \times S^1$である(図58)．

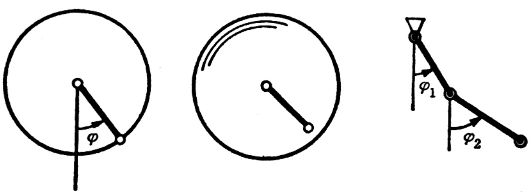


図58　平面振子，球面振子，平面2重振子

---

*)　多様体は2つの交わらない開集合に分割できないとき，連結であるという．

例 6　球面 2 重振子の配位空間は，2 つの球面の直積 $S^2 \times S^2$ である．

例 7　(q_1, q_2) 平面上の剛線分の配位空間は多様体 $\mathbf{R}^2 \times S^1$ で，座標 q_1, q_2, q_3 をもつ（図 59）．これは 2 枚のチャートで覆われる．

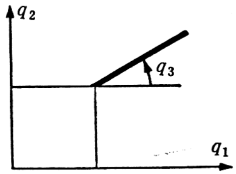


図 59　平面上の線分の配位空間

例 8　剛直角 3 角形 OAB が頂点 O のまわりを回転する．3 角形の位置は 3 つの数で表わされる．実際，$OA \in S^2$ の方向が 2 つの数で表わされ，OA が与えられると，軸 OA のまわりに $OB \in S^1$ を回転できるからである（図 60）．

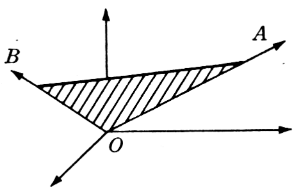


図 60　3 角形の配位空間

3 角形 OAB の位置には，右正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1 = OA/|OA|$，$\boldsymbol{e}_2 = OB/|OB|$，$\boldsymbol{e}_3 = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ が対応する．この対応は互いに 1 対 1 であるから，3 角形の位置は行列式が 1 である 3 次直交行列で与えられる．

3 次行列全体は 9 次元空間 $\mathbf{R}^9$ である．直交性を表わす 6 つの条件は，行列式が $+1$，-1 である 3 次元連結多様体を 2 つ与える．3 次元空間の回転（行列式 $=+1$）は，群をなすが，これを $SO(3)$ と表わす．

こうして，**3 角形 OAB の配位空間は群 $SO(3)$ である．**

問　多様体 $SO(3)$ は 3 次元実射影空間と同相であることを示せ．

定義　配位空間の次元を**自由度**という．

例 9　k 本の棒が蝶番でつながれて輪を作っている系を考えよう．

問　この系の自由度はいくらか．

例 10　埋めこまれた多様体　M が Euclid 空間 E^n に埋めこまれた k 次元部分多様体であるとは，各点 $\boldsymbol{x} \in M$ の近傍 U に $n-k$ 個の関数 $f_1 : U \to \mathbf{R}$，…，$f_{n-k} : U \to \mathbf{R}$ が存在して，共通部分 $U \cap M$ が方程式 $f_1 = 0$，…，$f_{n-k} = 0$ で与えられ，かつ $\operatorname{grad} f_1$，…，$\operatorname{grad} f_{n-k}$ が点 $\boldsymbol{x}$ で 1 次独立であるときをいう（図 61）．

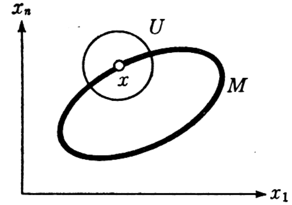


図61 埋めこまれた部分多様体

M 上には，容易に多様体の構造，すなわち $\boldsymbol{x}$ の近傍に座標を導入できる(どのようにしてか).

すべての多様体が Euclid 空間に埋めこまれることを証明できる[†].

例8の $SO(3)$ は $\mathbf{R}^9$ の部分集合である.

問 $SO(3)$ が $\mathbf{R}^9$ に埋めこまれること，こうして，$SO(3)$ が多様体であることを示せ.

C. 接空間 M が E^n に埋めこまれた k 次元多様体であれば，各点 $\boldsymbol{x}$ に k 次元接空間 TM_x がある．すなわち，TM_x は $\{\mathrm{grad}\, f_1, \cdots, \mathrm{grad}\, f_{n-k}\}$ への直交補空間である(図62). $\boldsymbol{x}$ を始点にもつ接空間 TM_x のベクトルを，$\boldsymbol{x}$ における M の**接ベクトル**という．これらのベクトルは，直接，M 上の曲線の速度ベクトルとしても定義できる．すなわち

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(0)}{t},$$

ここで，$\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\varphi}(t) \in M$.

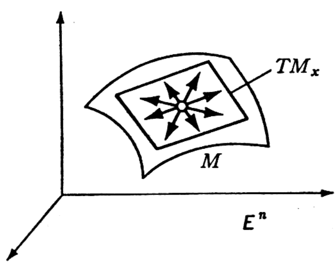


図62 接 空 間

接ベクトルの定義は M を E^n へ埋めこまずに内在的な言葉で与えることもできる.

多様体上の2曲線 $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ が**同値である**とは，$\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\psi}(0) = \boldsymbol{x}$ であり，或るチャート上で

---

†) たとえば，松島[1]，畠山[1].

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t}=0$$

となるときをいう．このとき，2曲線が接するというこの関係は，どんなチャート上ででも成り立つ(証明せよ!).

定義 点 x における多様体 M の**接ベクトル**とは，曲線 $\varphi(t)$, $\varphi(0)=x$ の同値類をいう．

接ベクトルに数を掛けることも，接ベクトル同士の和も容易に定義できる．点 x における M の接ベクトル全体は**線形空間** TM_x をつくる．この空間が**点 x における M の接空間**といわれるものである．

埋めこまれた多様体に対しては，この定義は先のものと一致する．しかしこの定義には，どこへも埋めこまれていない抽象的な多様体にも通用するという利点がある．

定義 U を M のアトラスに属する1枚のチャートとし，その座標を $q_1, \cdots, q_n$ とする．このとき，曲線 $q=\varphi(t)$ に接する接ベクトルの**成分**とは，数 $\xi_1, \cdots, \xi_n$; $\xi_i=d\varphi_i/dt|_{t=0}$ をいう．

D. 接バンドル M の各点における接空間の和集合 $\bigcup_{x\in M} TM_x$ は自然な微分可能構造をもち，その次元は M の次元の2倍である．

この多様体を M の**接バンドル**といい，TM で表わす．TM の点は，或る点 x における M の接ベクトル ξ である．TM 上の局所座標は次のようにして作られる．$q_1, \cdots, q_n$ を M 上の局所座標とし，$\xi_1, \cdots, \xi_n$ をこの座標系による接ベクトルの成分とする．このとき，$2n$ 個の数 $(q_1, \cdots, q_n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ は TM 上に局所座標を与える．[ξ_i を dq_i と書くことがある.]

接ベクトル ξ に ξ が M と接する点 x ($\xi\in TM_x$) を対応させる写像 $p: TM\to M$ を**自然な射影**という．自然な射影による $x\in M$ の原像 $p^{-1}(x)$ が接空間 TM_x である．この空間を**点 x 上のファイバー**という．

E. Riemann 多様体 M が Euclid 空間に埋めこまれた多様体であれば，Euclid 空間の計量によって M 上の曲線の長さ，ベクトル間の角，体積などが測れる．

これらの量はすべて接ベクトルの長さによって，つまり，各接空間 TM_x 上に与えられた正定値2次形式:

$$TM_x \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad \boldsymbol{\xi} \longmapsto \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$$

によって表わされる(図63).

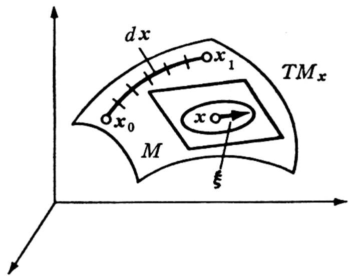


図63　Riemann 計量

たとえば，多様体上の曲線の長さはこの形式により

$$l(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\langle dx, dx \rangle}$$

として表わされる．曲線が $\gamma : [t_0, t_1] \to M,\ t \mapsto x(t) \in M$ とパラメーター表示されていれば，$l(\gamma)$ は次のように表わされる．

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle} dt.$$

定義　微分可能多様体 M は各接空間 TM_x に正定値2次形式 $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ が指示されたとき，**Riemann 多様体**という．この2次形式を **Riemann 計量**という．

注意　U を M のアトラスに属するチャートとし，その座標を $q_1, \cdots, q_n$ とする．このとき，Riemann 計量は式

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{q})\, dq_i dq_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

で与えられる．ここで，dq_i は接ベクトルの成分である．

関数 $a_{ij}(\boldsymbol{q})$ はもちろん必要な回数まで微分可能であると仮定する．

F. 写像の微分　$f : M \to N$ を多様体 M から多様体 N への写像とする．写像 f が**微分可能**であるとは，M, N 上の局所座標で f が微分可能な関数によって与えられるときをいう．

定義　微分可能な写像 $f : M \to N$ の，点 $x \in M$ における**微分**とは，次のように与えられる接空間の線形写像 f_{*x} をいう(図64).

$$f_{*x} : TM_x \longrightarrow TN_{f(x)}.$$

$\boldsymbol{v} \in TM_x$ とする．速度ベクトル $d\boldsymbol{\varphi}/dt|_{t=0} = \boldsymbol{v}$ をもつ曲線 $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{R} \to M,\ \boldsymbol{\varphi}(0) =$

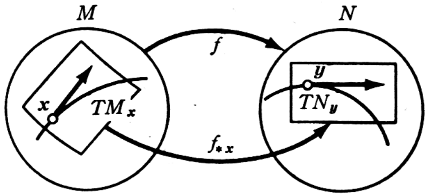


図 64 写像の微分

$\boldsymbol{x}$ を考えよう．すると，$f_{*x}\boldsymbol{v}$ は曲線 $f\circ\boldsymbol{\varphi}:\mathbf{R}\to N$ の速度ベクトルである：

$$f_{*x}\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{\varphi}(t))\Big|_{t=0}.$$

問 ベクトル $f_{*x}\boldsymbol{v}$ は曲線 $\boldsymbol{\varphi}$ には依存せず，ベクトル $\boldsymbol{v}$ にのみ依存することを示せ．

問 写像 $f_{*x}:TM_x\to TN_{f(x)}$ は線形であることを示せ．

問 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$ を $\boldsymbol{x}\in M$ の近傍での座標，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ を $\boldsymbol{y}\in N$ の近傍での座標とする．$\boldsymbol{\xi}$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分ベクトル，$\boldsymbol{\eta}$ をベクトル $f_{*x}\boldsymbol{v}$ の成分ベクトルとするとき，次のことを示せ．

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\xi},\qquad \text{つまり，}\ \eta_i=\sum_j\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\xi_j.\qquad \text{——}$$

すべての $\boldsymbol{x}$ にわたって f_{*x} を合わせると，接バンドルの写像 f_* が得られる．

$$f_*:TM\longrightarrow TN,\qquad f_*\boldsymbol{v}=f_{*x}\boldsymbol{v}\qquad(\boldsymbol{v}\in TM_x).$$

問 f_* は微分可能な写像であることを示せ．

問 $f:M\to N,\ g:N\to K,\ h=g\circ f:M\to K$ とする．$h_*=g_*\circ f_*$ を示せ．

§19 Lagrange の力学系

本節では多様体上に Lagrange の力学系を定義する．ホロノーム拘束を受けた系はこの特殊な場合である．

A. Lagrange 系の定義 M を微分可能な多様体，TM をその接バンドル，$L:TM\to\mathbf{R}$ を微分可能な関数とする．写像 $\boldsymbol{\gamma}:\mathbf{R}\to M$ が，配位空間 M と Lagrange 関数 L とをもつ Lagrange 系における運動であるとは，$\boldsymbol{\gamma}$ が次の汎関数の極値曲線であるときをいう．

$$\Phi(\boldsymbol{\gamma})=\int_{t_0}^{t_1}L(\dot{\boldsymbol{\gamma}})\,dt,$$

ここで，$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ は速度ベクトル，$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\in TM_{\boldsymbol{\gamma}(t)}$．

例　M を座標空間 $\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_n)$ の領域とする．Lagrange 関数 $L: TM\to\mathbf{R}$ は，$2n$ 変数の関数 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ として与えられる．§12 で示したように，動点の座標の時間変化は，Lagrange 方程式を満たす．

系　多様体 M 上の Lagrange 系の運動では，点 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ の局所座標 $\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_n)$ は Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}$$

を満たす．ここで，$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ は関数 $L: TM\to\mathbf{R}$ を TM 上の座標 $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ で表わしたものである．——

次の特別な場合が非常によく現われる．

B. 自然系　M を Riemann 多様体とする．各接空間上の2次形式を**運動エネルギー**という：

$$T=\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle,\qquad \boldsymbol{v}\in TM_x.$$

ポテンシャル・エネルギーとは，微分可能な関数 $U: M\to\mathbf{R}$ をいう．

定義　Riemann 多様体上の Lagrange 系が**自然系**であるとは，その Lagrange 関数が運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの差に等しいとき，$L=T-U$，をいう．

例　(x,y) 平面上で，質量 m_1, m_2 の2質点が長さ l の線分で結ばれている．このとき，3次元配位多様体

$$M=\mathbf{R}^2\times S^1\subset \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$$

は，2つの自由質点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) の配位空間である4次元空間 $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ の中で条件 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=l$ によって決まる(図65)．

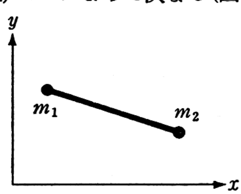


図65　平面上の線分

4次元空間 (x_1,x_2,y_1,y_2) の接空間には，次の2次形式がある．

$$m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2).$$

3次元多様体 M には，4次元空間に埋めこまれた多様体として Riemann 計量が与

えられる．得られたホロノーム系を，力学では(x,y)平面上の定長線分という．運動エネルギーは

$$T = m_1\frac{\dot{x}_1{}^2+\dot{y}_1{}^2}{2}+m_2\frac{\dot{x}_2{}^2+\dot{y}_2{}^2}{2}$$

で与えられる．

C. ホロノーム拘束を受けた系　§17 でホロノーム拘束を受けた質点系を定義した．この系が自然系であることを示そう．

実際，拘束された系の配位多様体 M が，自由 n 質点系の $3n$ 次元配位空間の中に埋めこまれていると考えよう．$3n$ 次元の計量は $\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2$ で与える．

このとき，埋めこまれた多様体 M とポテンシャル・エネルギー U とに対応する自然系は，§17 で定義した系，つまり M の外で急速に増大するポテンシャル $U+N\boldsymbol{q}_2{}^2$ をもつ系の $N\to\infty$ の極限の場合と一致する．

D. 拘束をもつ問題の解法

1. 配位多様体を見つけ，座標 $q_1, \cdots, q_n$ を入れる(一般には，各点の近傍ごとに)．

2. 運動エネルギー $T=\sum m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2/2$ を一般速度の 2 次形式として表わす:

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(\boldsymbol{q})\,\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

3. Lagrange 関数 $L=T-U(\boldsymbol{q})$ をつくり，Lagrange 方程式を解く．

例　3 次元空間の回転面上を動く質量 1 の質点を考えよう．質点の軌道はこの曲面上の測地線であることが示せる．円筒座標 r, φ, z では曲面は(局所的に) $r=r(z)$，あるいは $z=z(r)$ と与えられる．運動エネルギーは，それぞれ次の形である(図 66)．

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}[(1+r_z{}'^2)\,\dot{z}^2+r^2\dot{\varphi}^2] \qquad (\varphi, z)\text{座標で}$$

$$= \frac{1}{2}[(1+z_r{}'^2)\,\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2] \qquad (r, \varphi)\text{座標で．}$$

(関係式 $\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2$ を使う．)

Lagrange 関数 L は $L=T$ である．どの場合にも φ は循環座標である．対応する運動量は不変であるが，$p_\varphi=r^2\dot{\varphi}$ は角運動量の z 成分に他ならない．系は自由度 2 であるから，循環座標 φ が分れば，問題は完全に積分できる(§15，系 3 参照，p. 63)．

少し見方を変えると，軌道の形について明確なことがいえる．軌道が子午線となす角を α で表わそう．このとき，$r\dot{\varphi}=|\boldsymbol{v}|\sin\alpha$ ($|\boldsymbol{v}|$ は速さ)である(図 66)．

ところでエネルギーの保存法則により，$H=L=T$ は不変である．よって $|\boldsymbol{v}|=\text{const.}$

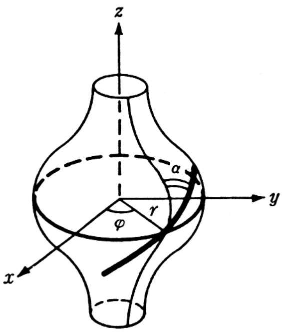


図66 回 転 面

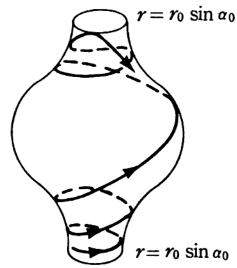


図67 回転面上の測地線

こうして，p_φ の保存法則は次の形をとる(《Clairaut の定理》)

$$r\sin\alpha=\text{const.}$$

この関係式は運動が領域 $|\sin\alpha|\leq 1$，つまり，$r\geq r_0\sin\alpha_0$ の領域で起ることを示す．そのうえ半径 r が小さくなるにつれて，軌道が子午線となす角は大きくなる．可能な最小値 $r=r_0\sin\alpha_0$ に達すると，軌道は反転してより大きい r の領域に戻る†) (図67).

問 上図の回転面上の測地線は，子午線，閉曲線，胴の部分 $r\geq c$ (円環になる)を至るところ稠密に満たす測地線の3種類のクラスに分れることを示せ.

問 トーラス $(r-R)^2+z^2=\rho^2$ 上の測地線の挙動を調べよ.

E. 非自励系 非自励 Lagrange 系は今まで考えてきた自励系とは異なり，Lagrange 関数が時間にも依存する：

$$L: TM\times\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R},\qquad L=L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t).$$

とくに，非自励自然系では運動エネルギーもポテンシャル・エネルギーも時間に依存してよい：

$$T: TM\times\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R},\qquad U: M\times\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R},$$
$$T=T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t),\qquad U=U(\boldsymbol{q},t).$$

時間に依存したホロノーム拘束を受けた n 点系は，自由系の配位空間の中で，時間に依存した部分多様体によって定義される．このような多様体は次のような写像によって与えられる.

$$i: M\times\mathbf{R}\longrightarrow \boldsymbol{E}^{3n},\qquad i(\boldsymbol{q},t)=\boldsymbol{x}.$$

ここで i は，$t\in\mathbf{R}$ を固定するごとに埋めこみ $M\to\boldsymbol{E}^{3n}$ になっている．D 項の

†) (r_0,α_0) は $z=0$ のときの (r,α) の値である.

解法は非自励系に対しても有効である.

例 鉛直に立つ半径 r の円周が, 中心を通る鉛直軸のまわりに角速度 ω で回転する. この円周上のビーズの運動を考えよう (図 68). 多様体 M は円周である. 頂点から計った角座標を q とする.

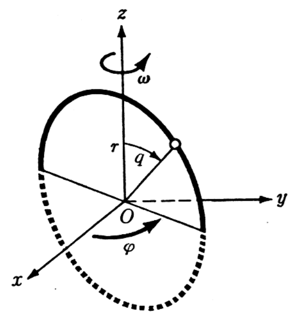


図 68 回転する円周上のビーズ

x, y, z を原点 O と鉛直軸 z をもつ E^3 の Descartes 座標とする. 円周を含む平面が平面 xOz となす角を φ とするとき, 条件により $\varphi=\omega t$. 写像 $i: M\times\mathbf{R}\to E^3$ は次式で与えられる.

$$i(q,t)=(r\sin q\cos\omega t,\ r\sin q\sin\omega t,\ r\cos q).$$

この式から (《微小直角 3 角形》からは, もっと簡単に) T と U が分る:

$$T=\frac{m}{2}(\omega^2r^2\sin^2 q+r^2\dot{q}^2),\qquad U=mgr\cos q.$$

拘束が時間に依存するにもかかわらず, 有難いことに, Lagrange 関数 $L=T-U$ は時

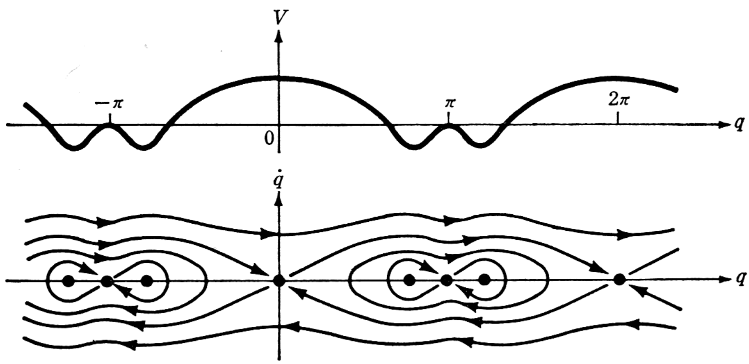


図 69†) ビーズの有効ポテンシャル・エネルギーと相平面

†) このグラフは V のかわりに $V+A$ を考えている. ポテンシャルは定数の差を除いて意味があるからである.

間 t に無関係なことが分る．そのうえ Lagrange 関数は次の運動エネルギー T_0 とポテンシャル・エネルギー V とをもつ1次元系のものと同じである．

$$T_0 = \frac{M}{2}\dot{q}^2, \qquad M = mr^2,$$

$$V = A\cos q - B\sin^2 q, \qquad A = mgr, \qquad B = \frac{m}{2}\omega^2 r^2.$$

相空間図は A と B の関係による．$2B<A$，すなわち，円周がゆっくり回転していて $\omega^2 r<g$ であればビーズは底の位置 $(q=\pi)$ が安定で，運動の一般的特性は単振子 $(\omega=0)$ の場合と同じである．

$2B>A$，つまり，円周が十分速く回転すれば，底の位置は不安定となるが，代わって，円周上には2つの安定な位置 $\cos q=-A/2B=-g/\omega^2 r$ が現われる．また，あらゆる初期条件に対するビーズの動きが，$(q, \dot{q})$ 平面上の相曲線から分る (図 69)．

§20 E. Noether の定理

いろいろな保存法則（運動量，モーメント等の）は次の一般的法則の特別な場合である．つまり，Lagrange 系の配位多様体の微分同相からなる 1-パラメーター群が Lagrange 関数を不変にすると，これには運動方程式の第1積分が対応する．

A. 定理の定式化 M を滑らかな多様体，$L: TM\to \mathbf{R}$ を接バンドル上の滑らかな関数とする．$h: M\to M$ を滑らかな写像とする．

定義 Lagrange 系 (M, L) が写像 h を許容するとは，

$$L(h_* \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v})$$

が任意の接ベクトル $\boldsymbol{v}\in TM$ に対して成り立つときをいう．

例 $M=\{(x_1, x_2, x_3)\}$，$L=m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)/2-U(x_2, x_3)$ とする．この系は x_1 軸方向の平行移動 $h: (x_1, x_2, x_3)\to(x_1+s, x_2, x_3)$ を許容するが，x_2 軸方向の平行移動は一般には許容しない．

Noether の定理 系 (M, L) が微分同相の 1-パラメーター群 $h^s: M\to M$, $s\in\mathbf{R}$, $h^0=E$, を許容すれば，L に対応する Lagrange 方程式系は第1積分 $I: TM\to\mathbf{R}$ をもつ．M 上の局所座標 $\boldsymbol{q}$ では第1積分 I は次の形で表わされる．

$$I(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\frac{dh^s(\boldsymbol{q})}{ds}\bigg|_{s=0}.$$

B. 証明 まず M を座標空間 $\mathbf{R}^n$ とする．$\boldsymbol{\varphi}: \mathbf{R}\to M$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ を Lagrange 方程式の解とする．h_* は L を保つから，任意の s に対して，s だけずらした

解 $h^s \circ \varphi : \mathbf{R} \to M$ もまた，Lagrange 方程式を満たす[*]．写像 $\boldsymbol{\Phi} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}(s, t) = h^s(\varphi(t))$ を考えよう (図 70)．

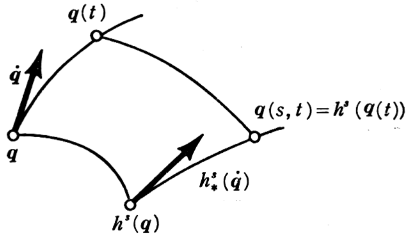


図 70　Noether の定理のために

t による微分を ˙ で，s による微分を ′ で表わす．条件によって

$$0 = \frac{\partial L(\boldsymbol{\Phi}, \dot{\boldsymbol{\Phi}})}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{\Phi}' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Phi}}', \tag{1}$$

ここで，L の偏微分は点 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}(s, t)$，$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{\Phi}}(s, t)$ でとる．

上に強調したように，s を任意に固定すれば，写像 $\boldsymbol{\Phi}|_{s=\mathrm{const}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ は Lagrange 方程式を満たす：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{\Phi}(s, t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(s, t))\right] = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\Phi}(s, t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(s, t)).$$

$\boldsymbol{F}(s, t) = (\partial L/\partial \dot{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{\Phi}(s, t), \dot{\boldsymbol{\Phi}}(s, t))$ とおく．(1) の $\partial L/\partial \boldsymbol{q}$ を $\partial \boldsymbol{F}/\partial t$ でおきかえよう．

$\dot{\boldsymbol{q}}'$ を $d\boldsymbol{q}'/dt$ と書いて次式を得る．

$$0 = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)\boldsymbol{q}' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{q}'\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\boldsymbol{q}'\right) = \frac{dI}{dt}. \qquad \blacksquare$$

注意　上では第 1 積分 I を局所座標 $\boldsymbol{q}$ を使って定めた．$I(\boldsymbol{v})$ は局所座標系 $\boldsymbol{q}$ の選び方によらないことが分る．

実際，I はベクトル $\boldsymbol{v} \in TM_x$ が速度 $d/ds|_{s=0}\, h^s \boldsymbol{x}$ で TM_x 内を動くときの，$L(\boldsymbol{v})$ の変化の速さである．故に，$I(\boldsymbol{v})$ は大域的に定義された接ベクトル $\boldsymbol{v} \in TM_x$ の関数である．こうして，Noether の定理は M が多様体のときにも証明された．

C. 例

例 1　拘束 $f_j(\boldsymbol{x}) = 0$ を受け，質量 m_i をもつ系を考えよう：

---

*) 幾つかの教科書では間違って，この逆が正しいとしている．つまり，h^s が解を解に移すならば，$h_*{}^s$ が L を保存する，と主張している．

$$L = \sum m_i \frac{\dot{\boldsymbol{x}}_i^{\,2}}{2} - U(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}_i = x_{i1}\boldsymbol{e}_1 + x_{i2}\boldsymbol{e}_2 + x_{i3}\boldsymbol{e}_3.$$

系が $\boldsymbol{e}_1$ 軸方向の平行移動 h^s を許容すると仮定しよう：

$$h^s : \boldsymbol{x}_i \longrightarrow \boldsymbol{x}_i + s\boldsymbol{e}_1 \qquad (\forall i).$$

いいかえると，この拘束のもとで，系全体が $\boldsymbol{e}_1$ 軸方向に平行移動できて，ポテンシャル・エネルギーはこの時変化しない．

Noether の定理から，次の結論が得られる．

系が $\boldsymbol{e}_1$ 軸方向の平行移動を許容すると，慣性中心の $\boldsymbol{e}_1$ 軸への射影は等速直線運動を行う．

実際，$d/ds|_{s=0}\, h^s\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_1$ である．B 項末尾の注意により，

$$I = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_i}\boldsymbol{e}_1 = \sum m_i \dot{x}_{i1}.$$

つまり，運動量ベクトルの第1成分 P_1 が保存される．これは拘束のない系に対しては既に証明した．

例 2　系が $\boldsymbol{e}_1$ 軸のまわりの回転を許容すると，この軸に関する角運動量 M_1 が保存される：

$$M_1 = \sum_i ([\boldsymbol{x}_i, m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i], \boldsymbol{e}_1).$$

実際，h^s を $\boldsymbol{e}_1$ 軸を角 s だけまわる回転とすれば，$d/ds|_{s=0}\, h^s\boldsymbol{x}_i = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}_i]$．これから

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_i}[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}_i] = \sum_i (m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i, [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x}_i]) = \sum_i ([\boldsymbol{x}_i, m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i], \boldsymbol{e}_1).$$

問 1　粒子が一様螺線 $x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi,\ z = c\varphi$ 上を動くとする．螺線の対称性に対応する保存法則を求めよ．

［解］　この螺線を変えないような螺線運動が許される系では，量 $I = cP_3 + M_3$ が不変である．

問 2　剛体が慣性運動しているとする．その慣性中心は等速直線運動をすることを示せ．慣性中心が静止していれば，この中心に関する角運動量は不変である．

問 3　或る点 O で固定された重い剛体が運動するとき，どんな量が保存されるか．とくに剛体が O を通る軸に関して対称であればどうか．

問 4　Noether の定理を非自励 Lagrange 系に拡張せよ．

［ヒント］　$M_1 = M \times \mathbf{R}$ を拡大配位多様体とする（配位多様体 M と時間軸との直積）．

関数 $L_1: TM_1 \to \mathbf{R}$ を $Ldt/d\tau$ として定義する．つまり，M_1 上の局所座標 $\boldsymbol{q}, t$ では

$$L_1\left(\boldsymbol{q}, t, \frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}\right) = L\left(\boldsymbol{q}, \frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau}\bigg/\frac{dt}{d\tau}, t\right)\frac{dt}{d\tau}$$

で与える．Noether の定理を Lagrange 系 (M_1, L_1) に適用しよう．

L_1 が変換 $h^s: M_1 \to M_1$ を許容すれば，第1積分 $I_1: TM_1 \to \mathbf{R}$ が得られる．$\int Ldt = \int L_1 d\tau$ であるから，これは元の系の第1積分 $I: TM \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ となる．M_1 上の局所座標 $(\boldsymbol{q}, t)$ で，$I_1 = I_1(\boldsymbol{q}, t, d\boldsymbol{q}/d\tau, dt/d\tau)$ であると，$I(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = I_1(\boldsymbol{q}, t, \dot{\boldsymbol{q}}, 1)$ である．

とくに L が時間 t を陽に含まなければ，L_1 は時間の平行移動 $h^s(\boldsymbol{q}, t) = (\boldsymbol{q}, t+s)$ を許容する．対応する第1積分はエネルギー積分である．

§21 d'Alembert の原理

ここではホロノーム拘束を受けた質点系の新しい定義を与え，それが§17の定義と同値であることを示す．

A. 例 ホロノーム系 (M, L) を考えよう．ここで，M は3次元空間 $\{\boldsymbol{x}\}$ の曲面であり，

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - U(\boldsymbol{x})$$

とする．このとき，力学の用語では，《質量 m の質点 $\boldsymbol{x}$ は滑らかな曲面 M 上に束縛されている》という．

点 $\boldsymbol{x}(t)$ の運動を考えよう．このとき，もしも Newton 方程式 $m\ddot{\boldsymbol{x}} + \partial U/\partial \boldsymbol{x} = 0$ が満たされているのであれば，外力がない場合 $(U=0)$，軌跡は直線となり，曲面 M 上にはとどまれないであろう．

Newton の観点からすれば，このことは《点を曲面上に束縛する》新しい力が存在することを示す．

定義 次のベクトル $\boldsymbol{R}$ を**拘束に対する抗力**という(図71)．

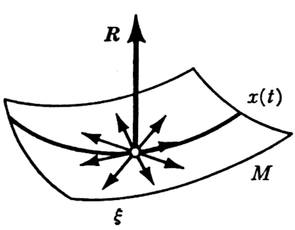


図71 拘束に対する抗力

$$\boldsymbol{R} = m\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

抗力 $\boldsymbol{R}(t)$ を考慮すると，明らかに Newton 方程式は正しい：

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{R}.$$

抗力 $\boldsymbol{R}$ の物理的意味は，拘束を受けた系をポテンシャル・エネルギー $U+NU_1$，$U_1(\boldsymbol{x})=\rho^2(\boldsymbol{x}, M)$ をもつ系の極限 $(N\to\infty)$ の場合として考えると明らかになる．N が大きいと，拘束のポテンシャル NU_1 が，急激に変化する力 $\boldsymbol{F}=-N(\partial U_1/\partial \boldsymbol{x})$ を惹きおこす．極限へ移ると $(N\to\infty)$，M の近くの $\boldsymbol{x}$ の振動に関して力 $\boldsymbol{F}$ を平均したその平均値[†] $\boldsymbol{R}$ が残る．力 $\boldsymbol{F}$ は曲面 M に垂直である．したがって抗力 $\boldsymbol{R}$ も曲面 M に垂直である．つまり，すべての接ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ に対して $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\xi})=0$.

B. d'Alembert-Lagrange の原理の定式化　力学では配位多様体の接ベクトルを**仮想変位**という．d'Alembert-Lagrange の原理は次のことを主張する．すべての仮想変位 $\boldsymbol{\xi}$ に対して，

$$\left(m\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\xi}\right) = 0,$$

いいかえると，**抗力が任意の仮想変位に対してなす仕事は 0 に等しい．**

質量 m_i の質点 $\boldsymbol{x}_i$ からなる系に対しては，抗力 $\boldsymbol{R}_i$ は $\boldsymbol{R}_i = m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i + \partial U/\partial \boldsymbol{x}_i$ として定義され，d'Alembert の原理は $\sum_i (\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{\xi}_i)=0$，あるいは，$\sum_i (m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i + \partial U/\partial \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i)=0$ となる．つまり，

抗力が任意の仮想変位 $\{\boldsymbol{\xi}_i\}\in TM_x$ に対してなす仕事の和は 0 に等しい．

この性質を拘束の**理想性**という．

ホロノーム拘束を受けた系を，$N\to\infty$ のときの極限として定義すると，d'Alembert-Lagrange の原理は定理となる．もっとも簡単な場合に対して，その証明のあらましを上で述べた．

しかし，理想ホロノーム系を，d'Alembert-Lagrange の原理に基づいて**定義する**こともできる．

こうして，ホロノーム拘束を受けた系の定義が 3 通りできる．すなわち，

1)　ポテンシャル・エネルギー $U+NU_1$ をもつ系の極限 $(N\to\infty)$，

2)　ホロノーム系 (M, L)，ここで M は拘束されない系の配位空間の滑らかな部分多

---

†)　$\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{F}$ の'何らかの意味の'平均である．$\boldsymbol{R}$ が質点の運動に依存するのに対し，$\boldsymbol{F}$ は質点の位置(と，パラメーター N と)にのみ依存するからである．

様体，L は Lagrange 関数，

3) d'Alembert–Lagrange の原理を満たす系．

以上 3 通りの定義は数学的に同値である．

1) $\Longrightarrow$ 2)，1) $\Longrightarrow$ 3) の証明は上で概略を述べた．詳しくはやらない．2) $\Longleftrightarrow$ 3) を示そう．

C. d'Alembert–Lagrange の原理と変分原理の同値性 M を Euclid 空間 $\mathbf{R}^N$ の部分多様体とし，$\boldsymbol{x}:\mathbf{R}\to M$, $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}_1$ を曲線とする．

定義 曲線 $\boldsymbol{x}$ が次の作用汎関数 Φ の**条件つき極値曲線**であるとは，$\boldsymbol{x}$ に近い*) $\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}_1$ とを結ぶ M 上のすべての曲線に対して，変分 $\delta\Phi=0$ となることである．

$$\Phi=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{2}-U(\boldsymbol{x})\right\}dt.$$

このとき，次のように書くことにする．

$$\delta_M\Phi=0. \tag{1}$$

M 上の局所座標系 $\boldsymbol{q}$ では，(1) は明らかに次の Lagrange 方程式と同値である．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}},\qquad L=\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{2}-U(\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}).$$

定理 曲線 $\boldsymbol{x}:\mathbf{R}\to M\subset\mathbf{R}^N$ が作用汎関数の条件つき極値曲線である（すなわち方程式 (1) を満たす）ためには，$\boldsymbol{x}$ が次の d'Alembert の方程式を満たすことが必要十分である．

$$\left(\ddot{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\xi}\right)=0,\qquad \forall\boldsymbol{\xi}\in TM_{\boldsymbol{x}}. \tag{2}$$

補題 $\boldsymbol{f}:[t_0,t_1]\to\mathbf{R}^N$ を連続な接ベクトル場とする．曲線 $\boldsymbol{x}$ に沿う M の連続な任意の接ベクトル場 $\boldsymbol{\xi}$ ($\boldsymbol{\xi}(t)\in TM_{\boldsymbol{x}(t)}$, $\boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{\xi}(t_1)=0$) に対して

$$\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{\xi}(t)\,dt=0$$

とする．このとき，$\boldsymbol{f}(t)$ は各点 $\boldsymbol{x}(t)$ において，曲面 M に垂直である（つまり，$(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{h})=0$, $\forall\boldsymbol{h}\in TM_{\boldsymbol{x}(t)}$）（図 72）．

---

*) 厳密には，$\boldsymbol{x}$ に近い曲線全体に線形空間の領域としての構造を入れなければならない．これは M 上の局所座標を使えば可能である．このとき条件つき極値曲線であるという性質は座標系のとり方によらない．

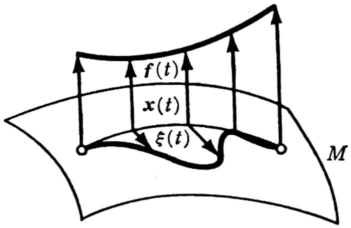


図72　法線場に関する補題

補題の証明は§12で Euler-Lagrange 方程式を導いた考え方を繰り返せばよい.

定理の証明　曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{\xi}(t_1)=0$ とで Φ の値を比べる. 部分積分すれば, 次の式が得られる.

$$\delta\Phi = \int_{t_0}^{t_1}\left(\dot{x}\dot{\boldsymbol{\xi}}-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\xi}\right)dt = -\int_{t_0}^{t_1}\left(\ddot{x}+\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{\xi}dt.$$

この式から分るように*), 方程式(1) : $\delta_M\Phi=0$ は $\boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{\xi}(t_1)=0$ なるすべての接ベクトル場 $\boldsymbol{\xi}(t)\in TM_{\boldsymbol{x}(t)}$ に対する次の方程式全体と同値である.

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\ddot{x}+\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{\xi}dt = 0. \tag{3}$$

補題により ($\boldsymbol{f}=\ddot{\boldsymbol{x}}+\partial U/\partial \boldsymbol{x}$ とおく), 方程式(3)の全体は, d'Alembert-Lagrange の方程式(2)と同値である. ▮

D. 注　意

注意1　ホロノーム拘束を受けた質量 m_i の**点** $\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^3$ $(i=1,\cdots,n)$ **からなる系の d'Alembert-Lagrange の原理**をいま証明した定理から導こう.

座標 $\bar{\boldsymbol{x}}=\{\bar{x}_i=\sqrt{m_i}\boldsymbol{x}_i\}$ では, 運動エネルギーは $T=(1/2)\sum m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2=\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}^2/2$ となる.

上の定理によって最小作用の原理の極値曲線は, $\mathbf{R}^{3n}$ の各点で次の条件を満たす (d'Alembert-Lagrange の原理).

$$\left(\ddot{\bar{\boldsymbol{x}}}+\frac{\partial U}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}}, \boldsymbol{\xi}\right) = 0.$$

つまり, 計量 T では $3n$ 次元の抗力が多様体 M に垂直である. $\boldsymbol{x}_i$ 座標に戻ると

*)　点 $\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\xi}(t)$ と M との距離は $\boldsymbol{\xi}(t)$ の2次のオーダーで小さい.

$$0=\sum_i\left(\sqrt{m_i}\ddot{x}_i+\frac{\partial U}{\partial\sqrt{m_i}x_i},\sqrt{m_i}\xi_i\right)=\sum_i\left(m_i\ddot{x}_i+\frac{\partial U}{\partial x_i},\xi_i\right),$$

これは先に示した形による d'Alembert-Lagrange の原理であって，抗力が仮想変位に対してなす仕事の和は 0 に等しいということである．

注意 2 静力学の立場では，d'Alembert-Lagrange の原理に少し違った形が与えられる．**平衡点**とは，その点自身が，運動の 1 つの軌道であるような点：$\boldsymbol{x}_0:\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}_0$ をいう．

質点が力 $\boldsymbol{f}=-\partial U/\partial\boldsymbol{x}$ の作用で，滑らかな曲面 M 上を動くとする．

定理 曲面 M 上の点 $\boldsymbol{x}_0$ が平衡点であるためには，点 $\boldsymbol{x}_0$ で力が曲面に垂直であること：$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{\xi})=0,\ \forall\boldsymbol{\xi}\in TM_{\boldsymbol{x}_0}$ が必要十分である．——

これは $\ddot{\boldsymbol{x}}=0$ を考慮して，d'Alembert-Lagrange の原理から導かれる．

定義 $-m\ddot{\boldsymbol{x}}$ を**慣性力**という．

いまや d'Alembert-Lagrange の原理は次のようになる．

定理 作用する力に慣性力を加えると，$\boldsymbol{x}$ は平衡点となる[†]．——

実際，d'Alembert の方程式：

$$(-m\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{f},\boldsymbol{\xi})=0$$

は先の定理によると，$\boldsymbol{x}$ が力 $-m\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{f}$ の働く系の平衡点であることを表わしている．

質点系に対しても全く同じ命題が成り立つ．

$\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}_i\}$ が平衡点ならば，作用する力が仮想変位に対してなす仕事の和は 0 に等しい．

作用する力に慣性力 $-m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i(t)$ を加えると，$\boldsymbol{x}(t)$ の位置は平衡点となる．

こうして，運動に関する問題が，別の力のもとでの平衡の問題に帰着する．

注意 3 いままで拘束が時間に依存する場合は考えなかった．以上のことは，すべてそのままこのような拘束にもあてはまる．

例 鉛直軸から角度 α 傾いた棒が，この軸を一定の角速度 ω で回る．この棒の上を滑るビーズを考えよう (重さは無視して)．座標 q として点 O からの距離をとる (図 73)．運動エネルギー，Lagrange 関数は次の通りである．

---

†) 正確には各 t 毎に $\boldsymbol{x}(t)$ が平衡点である．ポテンシャル場が時間と共に変化する時にも，平衡点を定義しておくと分り易い．注意 3 を見よ．

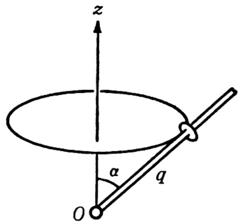


図 73 回転する棒の上のビーズ

$$L = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \qquad r = q\sin\alpha,$$

Lagrange 方程式: $m\ddot{q} = m\omega^2 q \sin^2\alpha.$

各瞬間の抗力は仮想変位(つまり棒の方向)に垂直であるが，実際の軌跡には垂直ではない．

注意 4 d'Alembert-Lagrange 方程式から，簡単に保存法則が導かれる．たとえば，仮想変位の中に x_1 軸方向の平行移動: $\xi_i = \boldsymbol{e}_1$ があれば，抗力がこの変位に対してなす仕事の和は 0 に等しい:

$$\sum (\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{e}_1) = (\sum \boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{e}_1) = 0.$$

いま抗力を外力として考えることにする．このとき外力の第1成分の和が 0 に等しいことに注意しよう．つまり運動量の第1成分 P_1 が不変である．

この結果は先に Noether の定理から得たものである．

注意 5 いま一度念を押すと，物理的拘束が何であれ，そのホロノーム性は(正確さに程度の差はあれ)，実験の問題である．したがって数学的観点からすれば，拘束のホロノーム性は物理的起源の公準である．これは種々の同値な形で導入できる．たとえば，(1) 最小作用の原理，あるいは (2) d'Alembert-Lagrange の原理，….しかし，拘束を定義するときは，いつも Newton 方程式の枠を超えた実験的事実を問題にしている．

注意 6 われわれの用語は，力学の教科書とは幾分異なる．そこでは d'Alembert-Lagrange の原理がより広いクラスの系《理想拘束をもつ非ホロノーム系》にまで拡げられている．本書では非ホロノーム系は考えない．ただ非ホロノーム系の例として平面上を滑ることなく転がる球があることを注意しておく．非ホロノーム系の配位多様体では，各点において接空間の部分空間が指定されていて，速度ベクトルはこの部分空間に属さなければならない．

注意 7 棒とか蝶番とかで質点が繋がれている．このとき，個々の拘束に対する抗力を問題にしたいと思うかも知れない．

われわれが先に定義したのは，質点 m_i に働く《全抗力の和》$\boldsymbol{R}_i$ である．個々の拘束に対する抗力は，3本の柱に支えられた1本の梁のような簡単な例ですら，**決定不可能**である．(柱を大変固いバネと考える)極限移行によって柱の抗力 $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3$ を定義してみると，結果は各柱の固さの具合によることが分る．

演習問題は，このような困難に出会わさないように配慮されるのが普通である．

問 机の上に立つ重さ P の棒を 60° 傾ける．この棒を初速度 0 で手離す(図 74)．この瞬間の机の抗力を求めよ．ただし，机は a) 完全に滑らかとする．b) 完全に粗いとする．(場合 a) では，ホロノーム拘束により，棒の下端は机の表面には留まる．場合 b) では，元のところに留まる.)

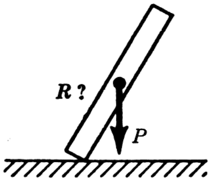


図 74 机からの抗力

第5章　振　　動

線形方程式は解くことも研究することも容易であることから，線形振動論は力学でもっともよく研究された分野である．非線形問題も線形化すれば，満足すべき近似解の得られることが多い．そうでない場合にも，線形化した問題の研究は，非線形問題の運動とその線形モデルの運動とがどう対応するかを調べるための，第一歩であることが多い．

§22　線　形　化

ここでは微小振動の定義を与える．

A. 平　衡　点

定義　点 $\boldsymbol{x}_0$ は $\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}_0$ が系

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \tag{1}$$

の解であれば，これをこの系の平衡点という．いい換えると，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=0$，つまり点 $\boldsymbol{x}_0$ でベクトル場 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が0になることである．

例　Lagrange 関数 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=T-U$，$T=(1/2)\sum a_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j\geq 0$，$U=U(\boldsymbol{q})$ をもつ自然力学系

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}}, \qquad \boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_n) \tag{2}$$

を考えよう．

Lagrange 方程式は(1)の形の1階微分方程式 $2n$ 個の系の形にも書ける．平衡点を見つけてみよう．

定理　点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$，$\dot{\boldsymbol{q}}=\dot{\boldsymbol{q}}_0$ は $\dot{\boldsymbol{q}}_0=0$，かつ点 $\boldsymbol{q}_0$ がポテンシャル・エネルギーの臨界点，すなわち

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{q}}\right|_{\boldsymbol{q}_0}=0 \tag{3}$$

となるとき，そしてこの時に限り系(2)の平衡点である．

証明　Lagrange 方程式を書くと

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}=\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}}-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}}.$$

(2) より明らかに，$\dot{\boldsymbol{q}}=0$ のときは $\partial T/\partial \boldsymbol{q}=0$，$\partial T/\partial \dot{\boldsymbol{q}}=0$．よって $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$ は (3) の場合に，そしてこの場合にのみ解である．▮

B. 平衡点の安定性　さて，初期条件が平衡点に近いときの運動を調べよう．

定理　点 $\boldsymbol{q}_0$ がポテンシャル・エネルギー U の狭義の極小点であれば，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$ は Liapunov の意味で安定である．

証明　$U(\boldsymbol{q}_0)=h$ とする．$\varepsilon>0$ を十分小さくとれば，集合 $\{\boldsymbol{q}: U(\boldsymbol{q})\leq h+\varepsilon\}$ の $\boldsymbol{q}_0$ を含む連結成分は点 $\boldsymbol{q}_0$ のいくらでも小さい近傍となる (図 75)．このとき，相空間 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の対応する領域 $\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}): E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\leq h+\varepsilon\}$ ($\boldsymbol{p}=\partial T/\partial \dot{\boldsymbol{q}}$ は運動量，$E=T+U$ は全エネルギー) の連結成分は $\boldsymbol{p}=0$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$ のいくらでも小さい近傍となる．

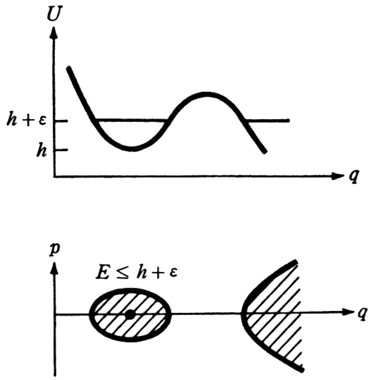


図 75　安定な平衡点

ところでエネルギーの保存法則により，領域 $\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}): E\leq h+\varepsilon\}$ は相流に関して不変である．それ故，初期条件 $(\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{q}(0))$ を $(0, \boldsymbol{q}_0)$ に十分近くとれば，相軌道 $(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t))$ 全体が $(0, \boldsymbol{q}_0)$ に近い．▮

問　平衡点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$，$\boldsymbol{p}=0$ は漸近安定でありうるか．

問　自由度 1 の**解析的**な系では，ポテンシャル・エネルギーの極小値でない平衡点 $\boldsymbol{q}_0$ は Liapunov の意味で不安定であることを示せ．こうはならない無限回微分可能な系の例を与えよ．

注意　自由度 $n>1$ の解析的な系では，最小点でない平衡点は不安定である，というのは正しいようであるが，まだ証明されていない．

C. 微分方程式の線形化 さて，一般の系(1)に戻ろう．系(1)の平衡点 $\boldsymbol{x}_0$ に近い解を調べるとき，線形化がよく利用される．$\boldsymbol{x}_0=0$ と仮定しよう(一般の場合には，座標系をずらせばよい)．$\boldsymbol{f}$ の Taylor 級数の初項は1次である：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}+R_2(\boldsymbol{x}), \qquad A = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_0, \qquad R_2 = O(\boldsymbol{x}^2).$$

ここで，座標 $x_1, \cdots, x_n$ では，線形作用素 A は行列 (a_{ij}) で与えられる：

$$(A\boldsymbol{x})_i = \sum_j a_{ij}x_j, \qquad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

定義 系(1)から系

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{y} \in T\mathbf{R}^n{}_0) \tag{4}$$

へ移ることを系(1)を**線形化**するという．

問 線形化という操作が適切であること，つまり，作用素 A は座標系に依存しないことを示せ．——

線形化した系の利点はそれが線形であり，したがって直ちに解けるということにある．つまり

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{y}(0), \qquad ここで，\ e^{tA} = E+tA+\frac{t^2A^2}{2!}+\cdots.$$

線形化した系(4)の解が分れば，元の系(1)の解について何らかのことがいえる．$\boldsymbol{x}$ が十分小さければ，元の系と線形化した系の差 $R_2(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に比べて小さい．こうして，初期条件 $\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ をもつ両方の系の解 $\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{x}(t)$ は永い時間を経ても互いに近くにある．正確には次のようになるが，その証明は簡単である．

定理 任意の $T>0$, $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して $|\boldsymbol{x}(0)|<\delta$ ならば，区間 $0<t<T$ のすべての t に対して，$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|<\varepsilon\delta$ となる．

D. Lagrange 系の線形化 再び，Lagrange 系(2)に戻る．これを平衡点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$ の近傍で線形化してみよう．式を簡単にするため，$\boldsymbol{q}_0=0$ となるように座標を選ぶ．

定理 Lagrange 系(2)を平衡点 $\boldsymbol{q}=0$ の近傍で線形化するには，運動エネルギー $T=(1/2)\sum a_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$ を $\boldsymbol{q}=0$ での値

$$T_2=\frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\qquad a_{ij}=a_{ij}(0)$$

に換え，ポテンシャル・エネルギー $U(\boldsymbol{q})$ をその2次の部分

$$U_2=\frac{1}{2}\sum b_{ij}q_iq_j,\qquad b_{ij}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\right|_{q=0}$$

に換えればよい．

証明　正準変数 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ を使って Lagrange 系を(1)の形にしよう：

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}},\qquad \dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},\qquad H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=T+U.$$

$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}=0$ が平衡点であるから，右辺を原点で Taylor 級数に展開すると $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ の1次の項から始まる．右辺は偏導関数ゆえ，その**1次**の項は $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ を展開したときの**2次**の項 H_2 で決まる．明らかに $H_2=T_2(\boldsymbol{p})+U_2(\boldsymbol{q})$，よって，$H_2$ は正に，Lagrange 関数 $L_2=T_2-U_2$ をもつ系の Hamilton 関数である．こうして運動方程式を線形化したものは，定理にいう $L_2=T_2-U_2$ をもつ系の運動方程式である．∎

例　自由度1の系を考えよう．

$$T=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2,\qquad U=U(q).$$

$q=q_0$ を安定な平衡点とする(図76)．つまり

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0}=0,\qquad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0}>0.$$

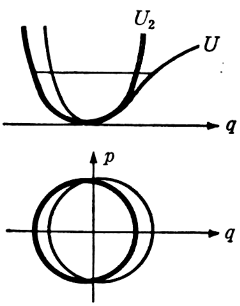


図76　線　形　化

相空間図から分るように，初期条件が $q=q_0$，$p=0$ に近いと解は周期的であって，一般に周期 τ は初期条件に依存する．上の2定理から次の系が得られる．

系 平衡点 q_0 の近くの振動の周期 τ は，振幅が減少するにつれて，極限 $\tau_0=2\pi/\omega_0$ に近づく．ここで，$\omega_0{}^2=b/a$ は次式で定まる．

$$b=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0},\qquad a=a(q_0).\qquad \text{——}$$

実際，線形化すると $T_2=a\dot{q}^2/2$, $U_2=bq^2/2$ である ($q_0=0$ とする)．Lagrange 方程式 $\ddot{q}=-\omega_0{}^2q$ の解

$$q=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t$$

は任意の初期振幅に対して周期 $\tau_0=2\pi/\omega_0$ をもつ．

E. 微小振動

定義 線形化した系 ($L_2=T_2-U_2$) の運動を平衡点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$ の近くの**微小振動**という*)．1次元の問題では数 τ_0, ω_0 をそれぞれ**微小振動の周期**，**振動数**という．

問 $g=1$ の重力場で針金 $y=U(x)$ 上の質量1のビーズが，平衡点 $x=x_0$ の近くで行う微小振動の振動数を求めよ (図77)．

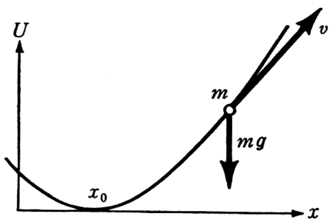


図77 針金上のビーズ

［解］

$$U=mgy=U(x),$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right]\dot{x}^2$$

である．x_0 を安定な平衡点：$\partial U/\partial x|_{x_0}=0$, $\partial^2U/\partial x^2|_{x_0}>0$ とする．このとき微小振動の振動数 ω は次式で与えられる．

$$\omega^2=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x_0}.$$

なぜなら，線形化すると $T_2=\dot{q}^2/2$, $U_2=\omega^2q^2/2$ $(q=x-x_0)$ となるからである．

問 微小振動ばかりか，ビーズの運動全体が，Lagrange 関数

---

*) 平衡点が不安定なときにも《不安定な微小振動》ということにする．運動は振動としての性質をもたないが….

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-V(q)$$

をもつ或る1次元系の運動に同値であることを示せ.

［ヒント］ q として，針金に沿った長さをとる.

§23 微 小 振 動

ここでは微小振動をするLagrange系が自由度1の系の直積に分解されることを示す.

A. 2個の2次形式に関する問題 微小振動に関わる問題をもっと詳しく調べる. いい換えると，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーが2次形式

$$T=\frac{1}{2}(A\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}),\qquad U=\frac{1}{2}(B\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}),\qquad \boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n,\ \ \dot{\boldsymbol{q}}\in\mathbf{R}^n \tag{1}$$

である系を考えよう. 運動エネルギーは正定値形式である.

Lagrange 系を積分するために，座標をうまく選ぶ.

線形代数で知られているように，2次形式の対 $(A\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$, $(B\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$ は一方が正定値であれば$(A>0)$，同一の線形な座標変換により主軸へ変換できる*):

$$\boldsymbol{Q}=C\boldsymbol{q},\qquad \boldsymbol{Q}=(Q_1,\cdots,Q_n).$$

このとき，座標 $\boldsymbol{Q}$ は形式 $(A\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$ が2乗和 $(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Q})$ となるように選べる. $\boldsymbol{Q}$ をこのような座標系とする. このとき $\dot{\boldsymbol{Q}}=C\dot{\boldsymbol{q}}$ であるから

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{Q}_i^2,\qquad U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iQ_i^2 \tag{2}$$

となる. 数 λ_i を**形式 B の A に関する固有値**という.

問 形式 B の A に関する固有値は固有方程式

$$\det(B-\lambda A)=0 \tag{3}$$

を満たす. こうして，根はすべて実数である. 以上を示せ. (行列 A,B は対称で $A>0$ である.)

B. 固有振動 座標 $\boldsymbol{Q}$ では Lagrange 系は n 個の独立な方程式

$$\ddot{Q}_i=-\lambda_iQ_i \tag{4}$$

に分解する. こうして次の定理が証明された.

定理 微小振動をする系は，微小振動する1次元系の n 個の直積である. ——

*) なぜなら，第1の形式をスカラー積として Euclid 構造を入れる. 次にこの Euclid 構造に関する直交変換で第2の形式を主軸に変換できる.

各1次元系には次の3つの場合が起り得る.

場合1. $\lambda=\omega^2>0$;　解は $Q=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$　(振動).

場合2. $\lambda=0$;　解は $Q=C_1+C_2 t$　(中立平衡).

場合3. $\lambda=-k^2<0$;　解は $Q=C_1\operatorname{ch}kt+C_2\operatorname{sh}kt$　(不安定).

系　(3)の固有値の1つが正: $\lambda=\omega^2>0$ とする. このとき, 系(1)は

$$\boldsymbol{q}(t)=(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)\boldsymbol{\xi} \tag{5}$$

の形の周期的な振動が可能である. ここで, $\boldsymbol{\xi}$ は λ に対応する固有ベクトルである(図78). つまり

$$B\boldsymbol{\xi}=\lambda A\boldsymbol{\xi}.$$

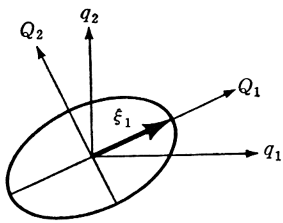


図78　固有振動

この振動は, 1次元の運動 $Q_i=C_1\cos\omega_i t+C_2\sin\omega_i t$ と自明な運動 $Q_j=0$ $(j\neq i)$ との直積である.

定義　周期運動(5)を系(1)の**固有振動**といい, 数 ω を**固有振動数**という.

注意　固有振動, 固有振動数を主振動, 主振動数とか, 基準振動, 基準振動数ともいう. 正でない λ にも固有ベクトルが対応する. 対応する運動は周期的ではないが, 簡単のためにこれも《固有振動》といおう. 対応する《固有振動数》は純虚数である.

問　本来の固有振動で1次独立なものの数は, ポテンシャル・エネルギー $(B\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})/2$ の正の慣性指数に等しいことを示せ. ——

さて, 以上の結果は次のように定式化できる.

定理　系(1)は n 個の固有振動をもち, その各方向は運動エネルギー A が与えるスカラー積に関して互いに直交する. ——

実際, 座標系 $\boldsymbol{Q}$ は(2)によりスカラー積 $(A\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$ に関して直交座標である.

C. 固有振動への分解　上の定理から次の系が得られる.

系　微小振動はすべて固有振動の和である. ——

一般に固有振動の和は，周期的でない(Lissajous 図形を思い出そう).

運動を固有振動の和に分解するには，初期条件 $\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ を固有方向 $\boldsymbol{\xi}_i$ へ射影して，対応する1次元の問題(4)を解けばよい.

こうして系(1)の Lagrange 方程式は次のようにして解ける．まず $\boldsymbol{q}=e^{i\omega t}\boldsymbol{\xi}$ の形で固有振動を探そう．これを Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}A\dot{\boldsymbol{q}}+B\boldsymbol{q}=0$$

に代入すると

$$(B-\omega^2 A)\boldsymbol{\xi}=0$$

となる．固有方程式(3)から n 個の固有値 $\lambda_k=\omega_k{}^2$ を求める．これらには n 個の互いに直交する固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}_k$ が対応する．$\lambda \neq 0$ の場合，一般解は次の形で表わせる.

$$\boldsymbol{q}(t)=\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\omega_k t}\boldsymbol{\xi}_k.$$

注意　この結果は固有値 λ の中に重根があっても正しい．こうして，Lagrange 系では一般の線形微分方程式系とは異なり，固有値が重根であろうと，$t\sin\omega t$ などの形の共鳴項は現われない.

D. 例

例1　$g=1$ の重力場において，質量 $m_1=m_2=1$，長さ $l_1=l_2=1$ の2つの同じ単振子からなる系を考えよう．2つの振子は重さのないバネで連結され，その長さは支点間の距離に等しいとする(図79)．振子の傾きの角を q_1, q_2 と表わす．このとき微小振動に対

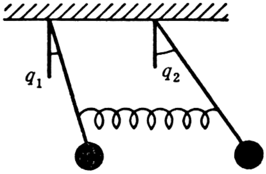


図79　連結した同じ振子

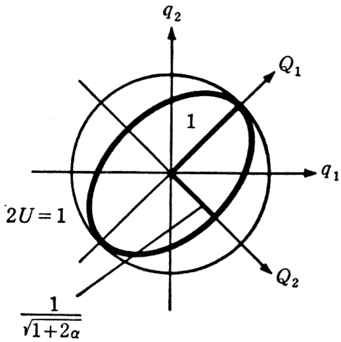


図80　連結した振子の配位空間

しては

$$T=\frac{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}{2},\qquad U=\frac{q_1^2+q_2^2+\alpha(q_1-q_2)^2}{2}$$

である．ここで $\alpha(q_1-q_2)^2/2$ はバネの張力のポテンシャル・エネルギーである．

$$Q_1=\frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}},\qquad Q_2=\frac{q_1-q_2}{\sqrt{2}}$$

とおくと，

$$q_1=\frac{Q_1+Q_2}{\sqrt{2}},\qquad q_2=\frac{Q_1-Q_2}{\sqrt{2}}$$

となり両形式は主軸へ変換される：

$$T=\frac{\dot{Q}_1^2+\dot{Q}_2^2}{2},\qquad U=\frac{\omega_1^2Q_1^2+\omega_2^2Q_2^2}{2}.$$

ただし $\omega_1=1$, $\omega_2=\sqrt{1+2\alpha}$ である(図80)．よって，2つの固有振動は次のようになる(図81)．

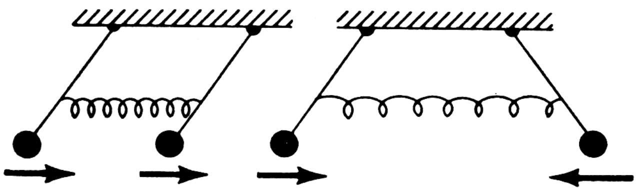


図81　連結した振子の固有振動

1)　$Q_2=0$, つまり $q_1=q_2$. 2つの振子は1個のときの振動数1をもち，同位相で振動する．バネは働かない．

2)　$Q_1=0$, つまり $q_1=-q_2$. 2つの振子はバネの作用で速くなった振動数 $\omega_2>1$ をもち，逆位相で振動する．

いま，バネが非常に弱く，$\alpha\ll1$ とすると，**エネルギーの汲み移し**という面白い効果が現われる．

例2　最初，振子は静止していて，その1つに速度 $\dot{q}_1=v$ を与えたとする．或る時間 T の後，第1の振子は殆ど動かなくなり，すべてのエネルギーが第2の振子に移る，ことを示せ．

初期条件より $Q_1(0)=Q_2(0)=0$. よって，$Q_1=c_1\sin t$, $Q_2=c_2\sin\omega t$, $\omega=\sqrt{1+2\alpha}\approx 1+\alpha$ $(\alpha\ll1)$ となる．ところで，$\dot{Q}_1(0)=\dot{Q}_2(0)=v/\sqrt{2}$ である．よって，$c_1=v/\sqrt{2}$, $c_2=v/(\sqrt{2}\,\omega)$ となり，解は次の形になる．

$$q_1=\frac{v}{2}\left(\sin t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$q_2 = \frac{v}{2}\left(\sin t - \frac{1}{\omega}\sin \omega t\right).$$

α と同じく小さな項 $v(1-1/\omega)\sin \omega t$ を無視すると

$$q_1 \approx \frac{v}{2}(\sin t + \sin \omega t) = v \cos \varepsilon t \sin \omega' t,$$

$$q_2 \approx \frac{v}{2}(\sin t - \sin \omega t) = -v \cos \omega' t \sin \varepsilon t,$$

$$\varepsilon = \frac{\omega - 1}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \qquad \omega' = \frac{\omega + 1}{2} \approx 1$$

となる．$\varepsilon \approx \alpha/2$ は α と共に小さく，したがって q_1 は振動数 $\omega' \approx 1$ で振動し，その振幅 $v \cos \varepsilon t$ はゆっくりと変化して行く (図 82).

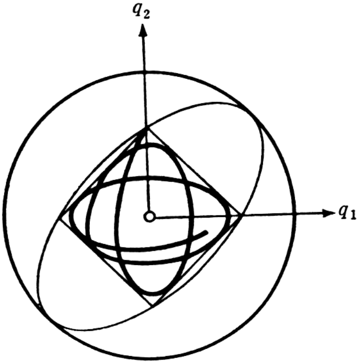


図 82　うなり：配位空間における軌跡

時間が $T = \pi/2\varepsilon \approx \pi/\alpha$ たつと，実際上は第 2 の振子だけが振動し，$2T$ 後には，また，第 1 の振子だけが振動する，というふうに続く (《うなり》) (図 83).

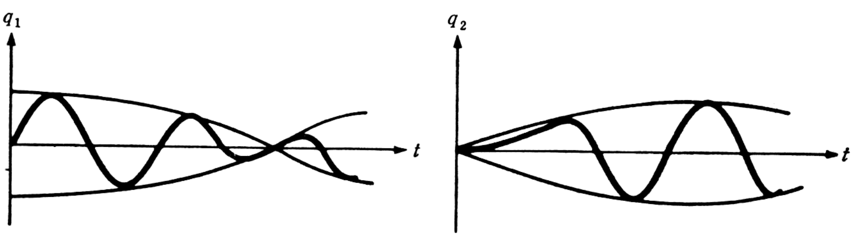


図 83　う　な　り

例 3　異なる 2 つの振子 ($m_1 \neq m_2$, $l_1 \neq l_2$, $g=1$) をバネで連結した．バネのポテンシャル・エネルギーを $\alpha(q_1 - q_2)^2/2$ とする．固有振動を調べよ (図 84)．$\alpha \to 0$ のとき，$\alpha \to \infty$ のとき，固有振動数はどのようになるか．

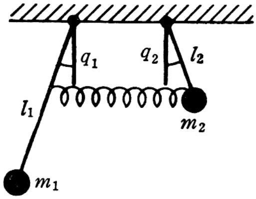


図 84 連結した振子

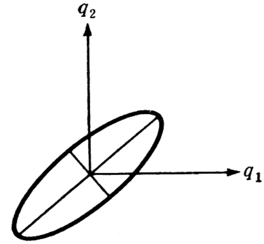


図 85 固く連結した振子のポテンシャル・エネルギー

$$T=\frac{1}{2}(m_1l_1{}^2\dot{q}_1{}^2+m_2l_2{}^2\dot{q}_2{}^2),$$

$$U=m_1l_1\frac{q_1{}^2}{2}+m_2l_2\frac{q_2{}^2}{2}+\frac{\alpha}{2}(q_1-q_2)^2$$

であるから(図 85),

$$A=\begin{bmatrix} m_1l_1{}^2 & 0 \\ 0 & m_2l_2{}^2 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} m_1l_1+\alpha & -\alpha \\ -\alpha & m_2l_2+\alpha \end{bmatrix}$$

となる. 固有方程式は

$$\det[B-\lambda A]=\det\begin{bmatrix} m_1l_1+\alpha-\lambda m_1l_1{}^2 & -\alpha \\ -\alpha & m_2l_2+\alpha-\lambda m_2l_2{}^2 \end{bmatrix}=0,$$

書き直せば

$$a\lambda^2-(b_0+b_1\alpha)\lambda+(c_0+c_1\alpha)=0$$

となる. ただし,

$$a=m_1m_2l_1{}^2l_2{}^2,$$

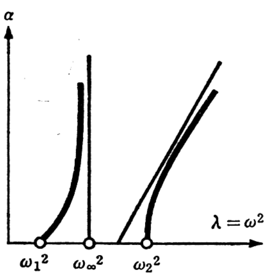


図 86 固有振動数とバネの剛さとの関係

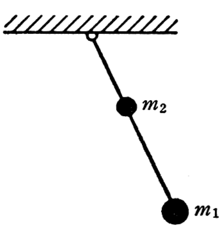


図 87 振子を無限に剛いバネで連結した極限の場合

$$b_0 = m_1 l_1 m_2 l_2 (l_1 + l_2), \qquad b_1 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2,$$
$$c_0 = m_1 m_2 l_1 l_2, \qquad c_1 = m_1 l_1 + m_2 l_2.$$

これは (α, λ) 平面上の双曲線の方程式である(図86). $\alpha \to 0$ のとき(弱いバネ), 振動数は自由な振子の振動数($\omega_j^2 = l_j^{-1}$; $j=1, 2$)に近づき, $\alpha \to \infty$ のときには(非常に強いバネ), 振動数の1つは無限大に発散し, もう1つは1本の棒に2つの質量を乗せた振子の固有振動数 ω_∞ に近づく(図87):

$$\omega_\infty^2 = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}.$$

問 平面2重振子の固有振動を調べよ(図88).

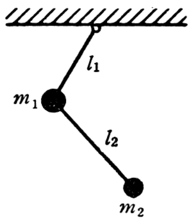


図88 2 重 振 子

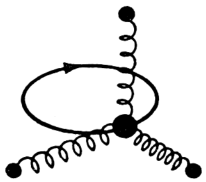


図89 無限に多くの固有振動をもつ系

問 質点が正3角形の中心にあって, 各頂点と同じバネで繋がれている. 質点が平面上でなす微小振動の軌跡の形を求めよ(図89).

[解] 120° 回転すると系はそれ自身へ移る. したがって, すべての方向が固有方向であって, 2つの固有振動数は一致する. つまり, $U = \omega^2(x^2 + y^2)/2$, 故に軌跡は楕円である(図20を見よ).

§24 固有振動数の挙動

ここでは, 系の剛(かた)さが増すとき, また系に拘束を課すとき, 固有振動数の挙動に関する Rayleigh–Courant–Fisher の定理を証明する.

A. 剛さが変化するときの固有振動数の挙動 系が微小振動をしている. その運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}) > 0, \qquad U = \frac{1}{2}(Bq, q) > 0, \qquad \forall q, \forall \dot{q} \neq 0$$

とする.

定義 同じ運動エネルギー T をもつ2つの系に対して

$$U' = \frac{1}{2}(B'\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) \geq \frac{1}{2}(B\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) = U, \qquad \forall \boldsymbol{q}$$

であるとき，ポテンシャル・エネルギー U' をもつ系は U をもつ系**よりも剛い**という．

系の剛さが増すと固有振動数がどう変化するかを，明らかにしたい．

問　1次元の場合を考えよ．

定理1　剛さが増すとすべての固有振動数が増す．すなわち，$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n$ が剛さの小さい系の固有振動数で，$\omega_1' \leq \omega_2' \leq \cdots \leq \omega_n'$ がより剛い系の固有振動数であれば，

$$\omega_1 \leq \omega_1', \qquad \omega_2 \leq \omega_2', \qquad \cdots, \qquad \omega_n \leq \omega_n'$$

となる．——

この定理には，以下に見るように簡単な図形的意味がある．一般性を失うことなく $A=E$ としてよい．つまり運動エネルギー $T=(\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}})/2$ による Euclid 構造を考えることにする．各系に楕円体 $E:(B\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})=1$，$E':(B'\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})=1$ を対応させよう．明らかに次の補題が成り立つ．

補題1　系 U' が系 U よりも剛ければ，対応する楕円体 E' は楕円体 E の内部にある．——

次も明らかである．

補題2　楕円体の主軸の半分(主半軸)は固有振動数 ω_i の逆数である：

$$\omega_i = \frac{1}{a_i}. \qquad ——$$

こうして，定理1は次の幾何学的な主張と同値である(図90)．

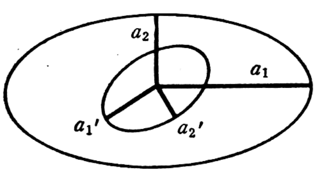


図90　内側の楕円体の主半軸は短い

定理2　主半軸 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ の楕円体 E が，E と同じ中心をもつ主半軸 $a_1' \geq a_2' \geq \cdots \geq a_n'$ の楕円体 E' を内部に含めば，E' の主半軸の方が短い：

$$a_1 \geq a_1', \qquad a_2 \geq a_2', \qquad \cdots, \qquad a_n \geq a_n'.$$

例　§23の例3で，振子を繋ぐバネの剛さ α が増すと，ポテンシャル・エネルギーが大きくなり，定理1によって，固有振動数が増す．つまり，$d\omega_i/d\alpha>0$. ——

さて，バネの剛さが無限大に発散する場合を考えよう $(\alpha\to\infty)$．このとき極限では振子は固く結ばれ，自由度1の系が得られる．極限の振動数 ω_∞ は $\omega_1<\omega_\infty<\omega_2$ である．

B. 拘束を与えたときの固有振動数の挙動　自由度 n の一般の系に戻る．$T=(\dot{q},\dot{q})/2$, $U=(Bq,q)/2$, $q\in\mathbf{R}^n$ を微小振動している系の運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーとする．

$\mathbf{R}^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$ を，$\mathbf{R}^n$ の $n-1$ 次元部分空間とする(図91)．自由度 $n-1$ の系 $(q\in\mathbf{R}^{n-1})$ で，その運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーが T と U とを $\mathbf{R}^{n-1}$ へ制限したものとなる系を考えよう．この系をもとの系に**線形拘束を与えた**ものという．

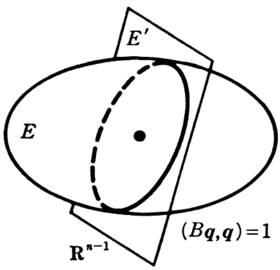


図91　線形拘束

もとの系が n 個の固有振動数 $\omega_1\le\omega_2\le\cdots\le\omega_n$ をもち，拘束を受けた系が $n-1$ 個の固有振動数 $\omega_1'\le\omega_2'\le\cdots\le\omega_{n-1}'$ をもつとする．

定理3　拘束を受けた系の固有振動数は，もとの系の固有振動数を分離する(図92)．つまり

$$\omega_1\le\omega_1'\le\omega_2\le\omega_2'\le\cdots\le\omega_{n-1}\le\omega_{n-1}'\le\omega_n. \qquad ——$$

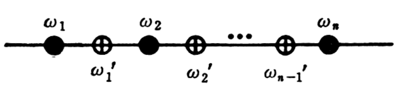


図92　振動数の分離

補題2により，この定理は次の幾何学的な主張と同値である．

定理4　主半軸 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$ の n 次元楕円体 $E=\{q:(Bq,q)=1\}$ を超平面 $\mathbf{R}^{n-1}$ で切る．このとき，断面の $n-1$ 次元楕円体 E' の主半軸は，楕円体 E の主半軸を分離する(図93)．

$$a_1\ge a_1'\ge a_2\ge a_2'\ge\cdots\ge a_{n-1}\ge a_{n-1}'\ge a_n.$$

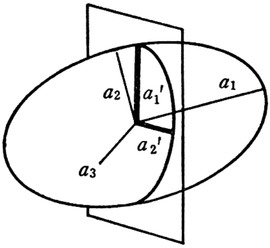


図 93　楕円体の主半軸を，断面の主半軸が分離する

C. 固有値の極値性

定理 5　主半軸 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ をもつ楕円体 E を任意の k 次元部分空間 $\mathbf{R}^k$ で切るとき，断面内の最短主半軸は a_k 以下である：

$$a_k = \max_{\{\mathbf{R}^k\}} \min_{x \in E \cap \mathbf{R}^k} \|x\|.$$

(上限には主半軸 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ の張る部分空間で到達する.)

証明*)　軸 $a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq a_n$ が張る部分空間 $\mathbf{R}^{n-k+1}$ を考える．その次元は $n-k+1$ であり，任意の $\mathbf{R}^k$ と交わる．点 x は両空間に属しさらに楕円体 E 上にあるとする．$x \in \mathbf{R}^{n-k+1}$ ゆえ $\|x\| \leq a_k$ である．$\|x\|$ は楕円体 $E \cap \mathbf{R}^k$ の最短主半軸よりも短くはないから，この最短主半軸は a_k を越えない．▮

定理 2 の証明　内部にある楕円体 E' の k 次元断面 $E' \cap \mathbf{R}^k$ の最短軸は $E \cap \mathbf{R}^k$ の最短軸より長くはない．よって定理 5 により

$$a_k' = \max_{\{\mathbf{R}^k\}} \min_{x \in E' \cap \mathbf{R}^k} \|x\| \leq \max_{\{\mathbf{R}^k\}} \min_{x \in E \cap \mathbf{R}^k} \|x\| = a_k. \qquad ▮$$

定理 4 の証明　定理 5 から不等式 $a_k' \leq a_k$ が分る．それは a_k を求めるとき，最大値をより大きな集合で考えるからである．不等式 $a_k' \geq a_{k+1}$ を示すために $\mathbf{R}^{n-1}$ を任意の $k+1$ 次元部分空間 $\mathbf{R}^{k+1}$ と交わらせよう．交わりの次元は k 以上である．楕円体 $E' \cap \mathbf{R}^{k+1}$ の最短主半軸は $E \cap \mathbf{R}^{k+1}$ の最短主半軸より短くはない．よって定理 5 により

$$a_k' = \max_{\{\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^{n-1}\}} \min_{x \in E' \cap \mathbf{R}^k} \|x\| \geq \max_{\{\mathbf{R}^{k+1} \subset \mathbf{R}^n\}} \min_{x \in E' \cap \mathbf{R}^{k+1}} \|x\|$$

$$\geq \max_{\{\mathbf{R}^{k+1} \subset \mathbf{R}^n\}} \min_{x \in E \cap \mathbf{R}^{k+1}} \|x\| = a_{k+1}. \qquad ▮$$

定理 1 と 3 は今証明したことから直ちに導かれる．

---

*)　$n=3$, $k=2$ の場合を想像するとよい．

問 ポテンシャル・エネルギーが変らず，運動エネルギーだけが増加すれば(たとえばバネをそのままにして，質量を増す)，各固有振動数は小さくなることを示せ.

問 Euclid 空間の或る部分空間に含まれている楕円体を，他の部分空間へ正射影すれば，軸はすべて短くなることを示せ.

問 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ 上の2次形式 $A(\varepsilon)$ がパラメーター ε について連続微分可能である．このとき，各固有値が ε について微分可能であることを示し，その導関数を求めよ.

［解］ $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ を $A(0)$ の固有値とする．重複度 ν_i の固有値 λ_i のそれぞれに部分空間 $\mathbf{R}^{\nu_i}$ が対応する．$A(\varepsilon)$ の固有値の $\varepsilon=0$ での導関数は形式 $B=dA/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ を $\mathbf{R}^{\nu_i}$ 上へ制限したものの固有値に等しい．とくに，$A(0)$ の固有値がすべて単根であれば，それらの導関数は $A(0)$ の固有基底で表わした行列 B の対角成分に等しい.

この問の主張によると，形式が大きくなれば対応する固有値も大きくなる．こうして定理1，2の別証明が得られる.

問 鐘にひびが入ると，音の高さはどう変るか.

§25 パラメーター共鳴

パラメーターの各値に対しては平衡点が安定であっても，パラメーターが時間変化すると，この平衡点が不安定になることがある．この不安定性のおかげでブランコを漕ぐことができる.

A. 周期的なパラメーターをもつ力学系

例1 ブランコ，ここでは振子の長さ $l(t)$ が周期的に変化する：$l(t+T)=l(t)$ (図94).

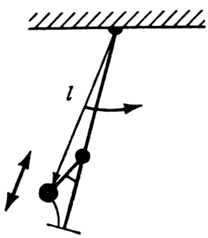


図94 ブランコ

例2 周期的に変化する重力場(たとえば月の潮汐作用)**の中の振子**は，次の G. W. Hill の方程式で表わされる.

$$\ddot{q} = -\omega^2(t)q, \qquad \omega(t+T) = \omega(t). \tag{1}$$

例 3　支点が周期的に上下振動するような振子もまた，(1)の形の方程式で表わされる．

パラメーターが周期的に変化する系に対しては，運動方程式の右辺 $\boldsymbol{f}$ は時間 t の周期関数である．運動方程式は右辺が周期的な 1 階の常微分方程式系の形に書ける：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \qquad \text{ここで，} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t+T) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n. \tag{2}$$

たとえば，方程式(1)は次の形に書ける．

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1, \end{aligned}\right\} \quad \omega(t+T) = \omega(t). \tag{3}$$

B. 周期間写像　系(2)の一般的な性質を注意しよう．$\boldsymbol{\varphi}$ を初期条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n)$ をもつ系(2)の解とし，点 $\boldsymbol{x}$ を時間 t における値 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ に移す写像を $g^t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，$g^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ と表わそう(図 95)．

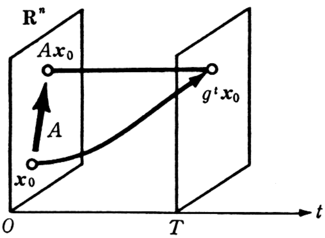


図 95　周期間写像

写像 g^t は群をなさない．一般には，

$$g^{t+s} \neq g^t g^s \neq g^s g^t.$$

問　(2)の右辺の $\boldsymbol{f}$ が t に依存しないとき，かつこの時に限り，$\{g^t\}$ は群であることを示せ．

問　T が $\boldsymbol{f}$ の周期ならば，$g^{T+s} = g^T \cdot g^s$，とくに，$g^{nT} = (g^T)^n$ で，写像 g^{nT} (n は整数)は群をなすことを示せ．

写像 $g^T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ は以下で重要な役割を果たす．これを**周期間写像**といい，次のように表わす．

$$A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n, \qquad A\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(T).$$

例　系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

は，ともに任意の T が周期であると考えられる．対応する写像 A はそれぞれ回転と双曲的回転である (図 96)．

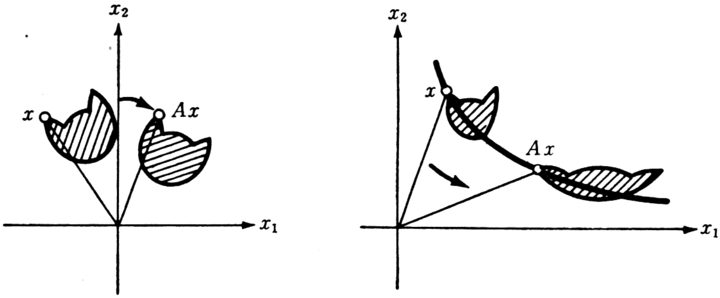


図 96 回転と双曲的回転

定理 1) 初期条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ をもつ解が周期 T をもつとき，かつこのときに限り，点 $\boldsymbol{x}_0$ は写像 A の不動点 $(A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_0)$ である．

2) 写像 A の不動点 $\boldsymbol{x}_0$ が Liapunov の意味で安定 (または漸近安定*)) であるとき，かつこのときに限り，周期解 $\boldsymbol{x}(t)$ は Liapunov の意味で安定 (または漸近安定) である．

3) 系 (2) が線形，つまり $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}$ の線形関数であれば，写像 A は線形である．

4) 系 (2) が Hamilton 系ならば写像 A は体積を保つ，つまり $\det A=1$.

証明 主張 1) と 2) は関係式 $g^{T+s}=g^sA$ から出る．主張 3) は線形系の解の和がまた解であることから，主張 4) は Liouville の定理から導かれる．▮

この定理を方程式 (1)，つまり系 (3) の相平面 $\{(x_1,x_2)\}$ 上の写像 A に適用しよう．系 (3) は線形で Hamilton 系 $(H=x_2^2/2+\omega^2x_1^2/2)$ であるから，次の系が得られる．

系 写像 A は線形で面積を保つ $(\det A=1)$．方程式 (1) の零解が安定であるためには，写像 A が安定であることが必要十分である．

問 平面の回転は安定な写像であるが，双曲的回転は不安定な写像である．これを示せ．

---

*) 写像 A の不動点 $\boldsymbol{x}_0$ が **Liapunov の意味で安定** (または**漸近安定**) であるとは，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ ならば，すべての $0<n<\infty$ に対して，$|A^n\boldsymbol{x}-A^n\boldsymbol{x}_0|<\varepsilon$ (または，$n\to\infty$ のとき $|A^n\boldsymbol{x}-A^n\boldsymbol{x}_0|\to 0$) が成り立つときである．

C. 面積を保つ平面上の線形写像

定理 Aを平面上の面積を保つ線形変換の行列とする($\det A=1$). このとき, $|\mathrm{tr}\,A|<2$ならば, 写像Aは安定であり, $|\mathrm{tr}\,A|>2$ならば, 不安定である(ここで, $\mathrm{tr}\,A=a_{11}+a_{22}$).

証明 λ_1, λ_2をAの固有値とする. これらは実係数の固有方程式

$$\lambda^2-(\mathrm{tr}\,A)\lambda+1=0, \qquad \lambda_1+\lambda_2=\mathrm{tr}\,A, \qquad \lambda_1\cdot\lambda_2=\det A=1,$$

を満たす. この実2次方程式の根λ_1, λ_2は, $|\mathrm{tr}\,A|>2$のときは実数であり, $|\mathrm{tr}\,A|<2$のときは互いに共役な複素数である.

先の場合には, 固有値の絶対値は1つが1より大きく, 1つは1より小さい, つまり写像Aは双曲的回転であり不安定である(図97).

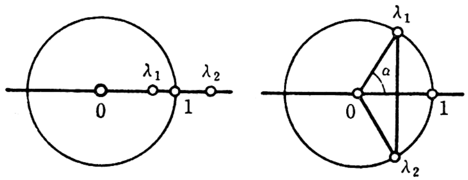


図97 写像Aの固有値

後の場合には, 固有値は単位円周上にある(図97):

$$1=\lambda_1\cdot\lambda_2=\lambda_1\cdot\bar{\lambda}_1=|\lambda_1|^2.$$

写像Aは角αの回転($\lambda_{1,2}=e^{\pm i\alpha}$)に同値である, つまり適当に平面上の座標を選べばAは回転となる. 故にAは安定である. ∎

こうして, (1)の形の方程式の零解が安定か否かという問題は, 行列Aの跡(trace)を計算することに帰着する. 残念ながら, 跡の計算は特殊な場合にしか成功しない. 区間$0\leq t\leq T$で方程式を数値積分すれば, 跡はいつでも近似的には求められる. $\omega(t)$が定数に近いような重要な場合には, 簡単で一般的な考え方が有効である.

D. 強安定性

定義 線形なHamilton系の零解は, それが安定であって, 十分近い*)すべての線形Hamilton系の零解が, また安定であるとき, **強安定**であるという.

*) 周期的な係数をもつ線形系$\dot{x}=B_1(t)x$, $\dot{x}=B_2(t)x$の間の距離は, 作用素$B_1(t)$と$B_2(t)$の間の距離の, tに関する最大値であると定義する.

前の2定理から，次の系が得られる．

系 $|\mathrm{tr}\, A|<2$ であれば零解は強安定である．

証明 $|\mathrm{tr}\, A|<2$ であれば十分近い系でも，対応する写像 A' がまた，$|\mathrm{tr}\, A'|<2$ を満たすからである．∎

以上を殆ど一定の(少ししか変化しない)係数をもつ系に適用しよう．たとえば，方程式

$$\ddot{x} = -\omega^2(1+\varepsilon a(t))x, \qquad \varepsilon \ll 1 \tag{4}$$

を考える．ここで，$a(t+2\pi)=a(t)$，たとえば $a(t)=\cos t$ とする(図98)*⁾．(振動数が ω の近くで変化するような振子．振幅は小さく，周期は 2π である．)

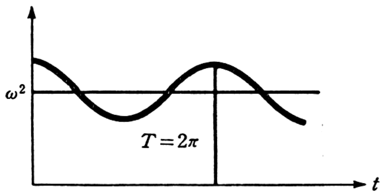


図98 時間の関数としての瞬間振動数

系(4)をパラメーター平面 $\varepsilon, \omega>0$ 上の点で表わすことにする．明らかに，安定系：$|\mathrm{tr}\, A|<2$ も，不安定系：$|\mathrm{tr}\, A|>2$ も，(ω, ε) 平面の開集合をなす(図99)．

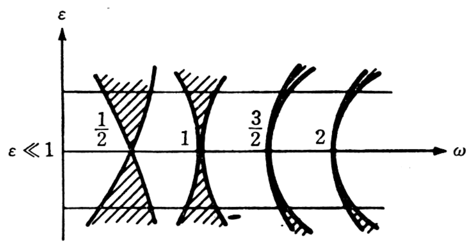


図99 パラメーター共鳴帯

安定領域の境界は方程式 $|\mathrm{tr}\, A|=2$ で与えられる．

定理 整数と半整数 $\omega=k/2$, $k=0, 1, 2, \cdots$ を除く ω 軸上のすべての点が(4)の強安定系に対応する．——

このように，不安定系の集合は点 $\omega=k/2$ でだけ ω 軸に接近できる．いいかえると，長さを周期的に少し変化させてブランコを漕ぐことは，長さの変化す

*) $a(t)=\cos t$ のとき，式(4)を **Mathieu 方程式**という．

る周期が，固有振動周期の半整数倍に近い場合にのみ可能である．この結果は経験的によく知られている．

この定理の証明は，$\varepsilon=0$ のとき方程式(4)が定数係数で具体的に解けることに基づく．

問 系(4)で $\varepsilon=0$ とする．周期 $T=2\pi$ の周期間写像 A の行列を基底 $x, \dot{x}$ で計算せよ．

［解］ 一般解は

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

である．初期条件 $x=1$, $\dot{x}=0$ に対する特殊解は

$$x = \cos \omega t, \qquad \dot{x} = -\omega \sin \omega t$$

であり，初期条件 $x=0$, $\dot{x}=1$ に対する特殊解は

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \qquad \dot{x} = \cos \omega t$$

である．ゆえに，

$$A = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\omega, & \dfrac{1}{\omega} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{bmatrix}.$$

したがって，$\omega \neq k/2$, $k=0, 1, \cdots$ であれば，$|\mathrm{tr}\, A| = |2 \cos 2\pi\omega| < 2$ となり，定理は上の系から得られる．

一層注意深く解析すると*)，一般に ($a(t)=\cos t$ の場合にも)，点 $\omega=k/2$, $k=1, 2, \cdots$ の近くで不安定領域(図99の斜線部)が，実際に ω 軸に近づくことが分る．

このように，$\omega \approx k/2$, $k=1, 2, \cdots$ のとき，理想的なブランコ(4)の平衡点は不安定であって，いかに小さくても，長さを周期的に変化させれば，ブランコは揺れる．この現象を**パラメーター共鳴**という．パラメーター共鳴の特徴は，パラメーターの振動数 ν (方程式(4)では，$\nu=1$) が固有振動数 ω の2倍であるとき，もっとも強く現われることである．

注意 理論上は，無限に多い関係 $\omega/\nu \approx k/2$, $k=1, 2, \cdots$ のもとに，パラメーター共鳴が現われる．実際には，普通，k があまり大きくない場合 ($k=1, 2$, 稀

---

*) たとえば次に扱う問題を見よ．

に 3) だけが見られる．それは次のことによる．

a) k が大きいと，不安定領域は細い舌のようになって ω 軸に近づき，共鳴振動数 ω は非常に厳しい制限((4)の滑らかな関数 $a(t)$ に対しては，$\sim\varepsilon^k$)を受ける．

b) k が大きいと，不安定性自身，弱くしか現われない．$|\mathrm{tr}\,A|-2$ がそう大きくなく，固有値も 1 に近いからである．

c) いかに摩擦が小さくても，パラメーター共鳴が起るのに必要な最小の振幅 ε_k がある(ε が ε_k より小さいと，振動は減衰する)．k が増大すると，ε_k は急速に大きくなる(図 100)．

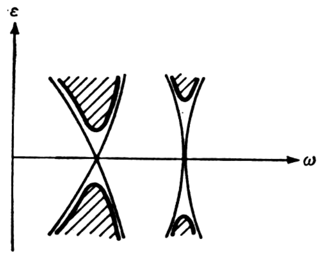


図 100 摩擦のパラメーター共鳴への影響

方程式(4)では，不安定な場合 x は限りなく増大することを注意しておく．現実の系では，有限の振幅にしか達しない．x が大きいと線形化した方程式(4)自体が効力を失って，非線形の効果を考慮する必要があるからである．

問 次の方程式が表わす安定領域の形を (ω, ε) 平面上に求めよ．

$$\ddot{x} = -f^2(t)\,x, \qquad f(t) = \begin{cases} \omega+\varepsilon, & 0 < t < \pi, \\ \omega-\varepsilon, & \pi < t < 2\pi, \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1$$

$$f(t+2\pi) = f(t).$$

［解］ 前問の解により $A=A_2A_1$ が分る．ただし，

$$A_k = \begin{bmatrix} c_k & \omega_k^{-1}s_k \\ -\omega_k s_k & c_k \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} c_k &= \cos \pi\omega_k, \\ s_k &= \sin \pi\omega_k, \\ \omega_{1,2} &= \omega\pm\varepsilon \end{aligned}$$

である．したがって，安定領域の境界は次の方程式で与えられる．

$$|\mathrm{tr}\,A| = \left|2c_1c_2-\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)s_1s_2\right| = 2. \tag{5}$$

$\varepsilon\ll1$ だから，$\omega_1/\omega_2=(\omega+\varepsilon)/(\omega-\varepsilon)\approx1$ である．記号

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}=2(1+\Delta)$$

を導入する．簡単な計算により $\Delta=2\varepsilon^2/\omega^2+O(\varepsilon^4)\ll 1$ となる．関係式 $2c_1c_2=\cos 2\pi\varepsilon+\cos 2\pi\omega$, $2s_1s_2=\cos 2\pi\varepsilon-\cos 2\pi\omega$ を使って，方程式(5)を次の形に書き直そう．

$$-\Delta\cos 2\pi\varepsilon+(2+\Delta)\cos 2\pi\omega=\pm 2,$$

あるいは

$$\cos 2\pi\omega=\frac{2+\Delta\cos 2\pi\varepsilon}{2+\Delta}, \tag{6_1}$$

$$\cos 2\pi\omega=\frac{-2+\Delta\cos 2\pi\varepsilon}{2+\Delta}. \tag{6_2}$$

第1の場合には $\cos 2\pi\omega\approx 1$ である．したがって，

$$\omega=k+a, \qquad |a|\ll 1;$$

$$\cos 2\pi\omega=\cos 2\pi a=1-2\pi^2a^2+O(a^4)$$

とおく．方程式(6_1)を次の形に書き直そう．

$$\cos 2\pi\omega=1-\frac{\Delta}{2+\Delta}(1-\cos 2\pi\varepsilon)$$

あるいは

$$2\pi^2a^2+O(a^4)=\Delta(\pi^2\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)).$$

$\Delta=2\varepsilon^2/\omega^2+O(\varepsilon^4)$ を上式に代入すれば

$$a=\pm\frac{\varepsilon^2}{\omega}+o(\varepsilon^2), \qquad \text{つまり，}\ \omega=k\pm\frac{\varepsilon^2}{k}+o(\varepsilon^2)$$

が分る．方程式(6_2)も同様に解けて，結果は次の通りである．

$$\omega=k+\frac{1}{2}\pm\frac{\varepsilon}{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}+o(\varepsilon).$$

答は図101に描いた形となる．

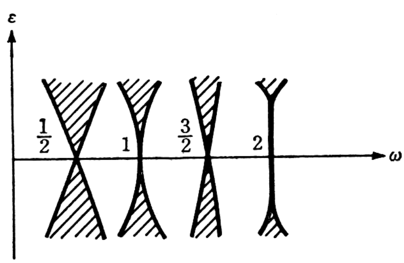


図101 $f=\omega\pm\varepsilon$ に対するパラメーター共鳴帯

E. 支点が上下振動する逆さ振子の安定性

問 普通は不安定な振子の上方の平衡点は，支点が上下振動するとき安定になり得るか(図 102)．

振子の長さを l，支点の振動周期を 2τ，振幅を $a \ll l$ とし，各半周期の間，支点の加速度は一定で $\pm c$ に等しいとする(このとき $c=8a/\tau^2$ となる)．支点が十分速く振動すれば($\tau \ll 1$)，上方の平衡点は安定になることが分る．

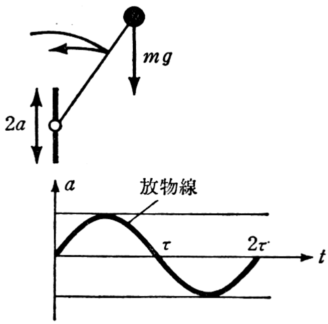


図 102　支点が振動する逆さ振子

［解］ 運動方程式は $\ddot{x}=(\omega^2 \pm d^2)x$ である(符号は時間 τ ごとに変る)．ただし，$\omega^2=g/l$，$d^2=c/l$．支点の振動が十分速ければ，$d^2>\omega^2$ ($d^2=8a/l\tau^2$) となる．

前問と同様にして $A=A_2A_1$ が分る．ただし，

$$A_1=\begin{bmatrix} \operatorname{ch} k\tau & k^{-1}\operatorname{sh} k\tau \\ k\operatorname{sh} k\tau & \operatorname{ch} k\tau \end{bmatrix}, \qquad A_2=\begin{bmatrix} \cos \Omega\tau & \Omega^{-1}\sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{bmatrix},$$

$$k^2=d^2+\omega^2, \qquad \Omega^2=d^2-\omega^2.$$

こうして，安定性の条件 $|\operatorname{tr} A|<2$ は次のようになる．

$$\left|2\operatorname{ch} k\tau \cos \Omega\tau+\left(\frac{k}{\Omega}-\frac{\Omega}{k}\right)\operatorname{sh} k\tau \sin \Omega\tau\right|<2. \tag{7}$$

支点の振動が十分速いとき，すなわち $c \gg g$ のとき，この条件が満たされることを示そう．次元をもたないパラメーター ε, μ を導入する：

$$\frac{a}{l}=\varepsilon^2 \ll 1, \qquad \frac{g}{c}=\mu^2 \ll 1.$$

このとき，

$$k\tau=2\sqrt{2}\,\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}, \qquad \Omega\tau=2\sqrt{2}\,\varepsilon\sqrt{1-\mu^2},$$

$$\frac{k}{\Omega}-\frac{\Omega}{k}=\sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}}-\sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}}=2\mu^2+O(\mu^6)$$

となる．したがって小さい ε, μ に対しては次の展開が誤差 $o(\varepsilon^4+\mu^4)$ で正しい．

$$\operatorname{ch} k\tau = 1+4\varepsilon^2(1+\mu^2)+\frac{8}{3}\varepsilon^4+\cdots,$$

$$\cos \Omega\tau = 1-4\varepsilon^2(1-\mu^2)+\frac{8}{3}\varepsilon^4+\cdots,$$

$$\left(\frac{k}{\Omega}-\frac{\Omega}{k}\right)\operatorname{sh} k\tau \sin \Omega\tau = 16\varepsilon^2\mu^2+\cdots.$$

こうして，安定性の条件(7)は次のようになる．

$$2\left(1-16\varepsilon^4+\frac{16}{3}\varepsilon^4+8\varepsilon^2\mu^2+\cdots\right)+16\varepsilon^2\mu^2 < 2.$$

高次の無限小を無視すると，$\frac{4}{3}\cdot 16\varepsilon^4 > 32\varepsilon^2\mu^2$ となり，$\mu<\varepsilon\sqrt{2/3}$，つまり，$g/c<2a/3l$ となる．この条件は

$$N > \sqrt{\frac{3}{64}}\omega\frac{l}{a} \approx 0.2\omega\frac{l}{a} \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{64}}\approx 0.22\right)$$

と書き直せる．ここで，$N=1/2\tau$ は単位時間内の支点の振動数である．たとえば，振子の長さが $l=20$ cm で，支点の振幅が $a=1$ cm であると，

$$N > 0.22\sqrt{\frac{980}{20}}\cdot 20 \approx 31 \ (\text{回/秒})$$

となる．たとえば，支点の振動数が1秒間に50以上ならば，上方の平衡点は安定である．

第6章　剛　　体

本章では極めて特殊な力学の問題を幾つか詳しく述べる．これらの問題は伝統的に古典力学の講義に含まれている．それは，Euler と Lagrange によって解かれたことと，われわれが3次元 Euclid 空間に住んでいて，出会わなければならない自由度有限の力学系の大半が剛体からなるという事情に基づく．

§26　動座標系における運動

本節では角速度を定義する．

A. 動座標系　Lagrange 系の Lagrange 関数 L が $\boldsymbol{q}, t$ 座標で表わされているとする: $L=L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$．このとき，動座標系 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t)$ へ移ると便利なことがよくある．

動座標系で運動方程式を書きくだすには，Lagrange 関数を新座標で表わせばよい．

定理　Lagrange 方程式 $(d/dt)(\partial L/\partial \dot{\boldsymbol{q}})=\partial L/\partial \boldsymbol{q}$ の軌跡 $\boldsymbol{\gamma}: \boldsymbol{q}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ が，局所座標 $\boldsymbol{Q}, t$ $(\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t))$ で，$\boldsymbol{\gamma}: \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Phi}(t)$ の形に書けるならば，関数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ は Lagrange 方程式 $(d/dt)(\partial L'/\partial \dot{\boldsymbol{Q}})=\partial L'/\partial \boldsymbol{Q}$ を満たす．ここで，$L'(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, t)=L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ である．

証明　軌跡 $\boldsymbol{\gamma}$ は極値曲線である: $\delta\int_{\gamma} L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\,dt=0$．ゆえに，$\delta\int_{\gamma} L'(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, t)\,dt=0$ となり，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ は Lagrange 方程式を満たす．▮

B. 運動，回転，並進運動　とくに，次の重要な場合を考えよう．つまり，$\boldsymbol{q}$ は慣性座標系 $\boldsymbol{k}$ (これを**静止系**であるという) に関して，$\boldsymbol{Q}$ は動座標系 K に関して，共に Descartes 座標で表わされた動径(位置)ベクトルであるとする．

定義　$\boldsymbol{k}, K$ を向きづけられた3次元線形 Euclid 空間とする．$\boldsymbol{k}$ に関する K の**運動**とは，t に滑らかに依存する写像

$$M_t: K \longrightarrow \boldsymbol{k}$$

で，計量と向きづけとを保つものである (図103)．

定義　運動 M_t が**回転**であるとは，M_t が K の原点を $\boldsymbol{k}$ の原点へ移すとき，つまり M_t が線形写像であるときをいう．

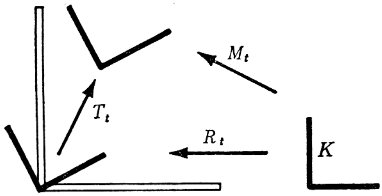


図103 運動 M_t は回転 R_t と平行移動 T_t との積に分解する

定理 運動 M_t はすべて回転 $R_t: K \to k$ と平行移動 $T_t: k \to k$ との積に一意的に分解される:

$$M_t = T_t R_t,$$

ここで，$T_t \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}(t)$ $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in k)$ である．

証明 $\boldsymbol{r}(t) = M_t \boldsymbol{O}$，$R_t = T_t^{-1} M_t$ とおく．このとき，$R_t \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$ である．∎

定義 運動 M_t が**並進運動**であるとは，対応する写像(回転部分) $R_t: K \to k$ が t に依存しないときをいう．つまり $R_t = R_0 = R$，$M_t \boldsymbol{Q} = R\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r}(t)$ となる．

k を**静止座標系**，K を**動座標系**，$\boldsymbol{q}(t) \in k$ を**静止座標系に関する動点の動径ベクトル**と呼ぶことにする．$\boldsymbol{Q}(t)$ が，

$$\boldsymbol{q}(t) = M_t \boldsymbol{Q}(t) = R_t \boldsymbol{Q}(t) + \boldsymbol{r}(t) \tag{1}$$

であるとき(図104)，$\boldsymbol{Q}(t)$ を**動座標系に関する動径ベクトル**という．

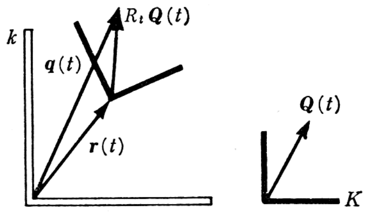


図104 静止座標系($\boldsymbol{q}$)と動座標系($\boldsymbol{Q}$)に関する動径ベクトル

警告 ベクトル $R_t \boldsymbol{Q}(t) \in k$ を，$\boldsymbol{Q}(t) \in K$ と混同しないこと．これらは異なる空間にある!

C. 速度の合成 さて，《絶対速度》$\dot{\boldsymbol{q}}$ を相対運動 $\boldsymbol{Q}(t)$ と座標系の運動 M_t とで表わす．式(1)を t で微分すれば，速度を合成する式が得られる:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{R}\boldsymbol{Q} + R\dot{\boldsymbol{Q}} + \dot{\boldsymbol{r}}. \tag{2}$$

(2)の3項の意味を明確にするために，まず特殊な場合を考えよう．

並進運動($\dot{R}=0$)の場合 このとき方程式(2)は $\dot{\boldsymbol{q}} = R\dot{\boldsymbol{Q}} + \dot{\boldsymbol{r}}$ となる．いいかえると次の定理が証明された．

定理 動座標系 K が $\boldsymbol{k}$ に対して並進運動をすれば，絶対速度は，相対速度と系 K の運動速度の和に等しい：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_0. \tag{3}$$

ここで，

$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{q}}\in\boldsymbol{k}$ は絶対速度，

$\boldsymbol{v}'=R\dot{\boldsymbol{Q}}\in\boldsymbol{k}$ は相対速度（$\dot{\boldsymbol{Q}}\in K$ と混同しないこと！），

$\boldsymbol{v}_0=\dot{\boldsymbol{r}}\in\boldsymbol{k}$ は動座標系の運動速度，である．

D. 角速度 系 K が回転している場合には，相対速度と絶対速度の関係はそう簡単ではない．まず，点が系 K に対しては静止していて（つまり，$\dot{\boldsymbol{Q}}=0$），座標系 K が回転している（つまり，$\boldsymbol{r}=0$）場合を考えよう．このとき，点 $\boldsymbol{q}(t)$ の運動を**遷移回転**という．

例 定角速度 $\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{k}$ の回転 $U(t):\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}$ を，空間 $\boldsymbol{k}$ の $\boldsymbol{\omega}$ 軸を角 $|\boldsymbol{\omega}|t$ 回る回転とする．このとき，$R(t)=U(t)R(0)$ を，<u>角速度 $\boldsymbol{\omega}$ をもつ K の一様回転</u>という．

このとき，明らかに点 $\boldsymbol{q}(t)$ の遷移運動の速度は次式で与えられる（図 105）．

$$\dot{\boldsymbol{q}}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q}].$$

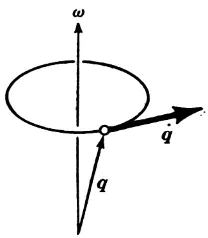


図105 角 速 度

さて，K が回転する一般の場合（$\boldsymbol{r}=0$, $\dot{\boldsymbol{Q}}=0$）に戻ろう．

定理 各瞬間 t にベクトル $\boldsymbol{\omega}(t)\in\boldsymbol{k}$ が存在して，遷移速度は次式で与えられる．

$$\dot{\boldsymbol{q}}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q}],\qquad \forall\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を**瞬間角速度**という．明らかにこれは式(4)により一意的に定まる．

系 剛体 K が不動点 O ($O\in\boldsymbol{k}$) のまわりに回転している．このとき，各瞬

間に瞬間回転軸が存在する．これは点 O を通る剛体内の直線で，直線上の各点はこの瞬間の速度が 0 に等しい．他の点の速度はこの直線に垂直で，この直線までの距離に比例する．——

空間 $\boldsymbol{k}$ における瞬間回転軸は，ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ 自身で与えられる．K では対応するベクトルを $\boldsymbol{\Omega}=R^{-1}\boldsymbol{\omega}\in K$ と表わす．ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ を**剛体での角速度ベクトル**という．

例　地球の角速度は中心から北極へ向い，大きさは

$$\frac{2\pi}{3600\cdot 24}\,\mathrm{sec}^{-1}\approx 7.3\cdot 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

に等しい．

定理の証明　(2)によれば，

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\dot{R}\boldsymbol{Q}$$

である．$\boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{q}$ で表わすと $\dot{\boldsymbol{q}}=\dot{R}R^{-1}\boldsymbol{q}=A\boldsymbol{q}$ となる．ここで，$A=\dot{R}R^{-1}:\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{k}$ 上の線形作用素である．

補題1　作用素 A は歪対称である：${}^tA+A=0$.

証明　$R:K\to\boldsymbol{k}$ は Euclid 空間から，もう1つの Euclid 空間への直交作用素であるから，その共役作用素 ${}^tR$ は，逆作用素 $R^{-1}:\boldsymbol{k}\to K$ に一致する．関係式 $R\,{}^tR=E$ を，t で微分すれば，次のようになる．

$$\dot{R}\,{}^tR+R\,{}^t\dot{R}=\dot{R}R^{-1}+{}^t(\dot{R}R^{-1})=0. \qquad \blacksquare$$

補題2　向きづけられた3次元 Euclid 空間では，歪対称作用素 A はすべて或るベクトル $\boldsymbol{\omega}$ とのベクトル積を作るという作用素である．つまり

$$A\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q}],\qquad \forall\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^3.$$

証明　歪対称作用素：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ の全体は線形空間をなす．歪対称 3×3 行列は対角線より上の3要素で定まるから，この線形空間の次元は3に等しい．

$\boldsymbol{\omega}$ とのベクトル積を作る作用素は線形で歪対称である．3次元空間のあらゆるベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に対して，ベクトル積を作る作用素を考えると，これらは歪対称作用素全体がなす空間の線形部分空間をつくる．

この部分空間の次元は3である．したがって，ベクトル積を作るという作用素がなす部分空間は，歪対称作用素全体の空間に一致する．∎

定理の証明を完結させる．補題1, 2により

$$\dot{\boldsymbol{q}} = A\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}].$$ ▮

Descartes 座標では，作用素 A は歪対称行列で与えられる．その要素を $\pm\omega_{1,2,3}$ と表わす：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

このように表わすと，ベクトル $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$ は固有値 0 の固有ベクトルである．ベクトル $\boldsymbol{q}=q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3$ に A を作用させると，簡単な計算で次式が得られる．

$$A\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}].$$

E. 遷移速度．純粋な回転運動の場合　さて，系 K が回転していて$(\boldsymbol{r}=0)$，点は系 K で運動しているとする$(\dot{\boldsymbol{Q}}\neq 0)$．(2)からこのとき

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{R}\boldsymbol{Q}+R\dot{\boldsymbol{Q}} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]+\boldsymbol{v}'$$

が得られる(図 106)．いいかえると次の定理が証明された．

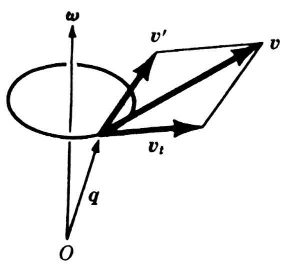


図 106　速度の合成

定理　動座標系 K が $O\in k$ に関して回転していれば，絶対速度は相対速度と遷移速度の和に等しい：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_t. \tag{5}$$

ここで，

$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{q}}\in k$　は絶対速度，

$\boldsymbol{v}' = R\dot{\boldsymbol{Q}}\in k$　は相対速度，

$\boldsymbol{v}_t = \dot{R}\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]\in k$　は回転の遷移速度，である．——

最後に，一般の場合は以上の 2 つの場合に帰着できる．k に対して並進運動している補助的な動座標 K_1 で $O\in K_1$ のまわりを K が回転しているものを考

えればよい．また式(2)から，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{v}_0$$

が得られる．ここで，

$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{q}}\in k$ は**絶対速度**，

$\boldsymbol{v}'=R\dot{\boldsymbol{Q}}\in k$ は**相対速度**，

$\boldsymbol{v}_t=\dot{R}\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}]\in k$ は**回転の遷移速度**，

$\boldsymbol{v}_0=\dot{\boldsymbol{r}}\in k$ は**動座標系の運動速度**，である．

問 剛体の角速度は，動座標系 K の原点のとり方にはよらないことを示せ．

問 剛体のもっとも一般的な動き方は，螺線運動，つまり或る軸を角 φ だけまわる回転と，この軸に沿う $\boldsymbol{h}$ だけの平行移動との積である．これを示せ．

問 机の上に時計がある．a) 地球に対する，b) 慣性座標系に対する，時計の針の角速度を求めよ．

［ヒント］ 3つの座標系 k, K_1, K_2 が与えられているとき，K_2 の k に対する角速度は，k に対する K_1 の角速度と，K_1 に対する K_2 の角速度との和に等しい．なぜなら，

$$(E+A_1t+\cdots)(E+A_2t+\cdots)=E+(A_1+A_2)t+\cdots.$$

§27 慣性力，Coriolis の力

非慣性座標系における運動方程式には，慣性系における運動方程式と異なり，慣性力といわれる付加項が存在する．このことにより，非慣性系であることが実験によって発見できる(たとえば，地球の自転)．

A. 並進運動する座標系

定理 慣性系に対して並進運動する座標系 K においては，力学系の運動は，あたかも座標系が慣性系であり，質量 m の各質点には，付加的な力《慣性力》$\boldsymbol{F}=-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ が働くかのように起る($\ddot{\boldsymbol{r}}$ は系 K の加速度である)．

証明 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}(t)$ だから，$m\ddot{\boldsymbol{Q}}=m\ddot{\boldsymbol{q}}-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ である．座標系が並進運動することの影響は，このように一様な力の場 $-m\boldsymbol{W}$ ($\boldsymbol{W}$ は座標原点の加速度)を付け加えることに帰する．∎

例1 ロケットは打ち上げるとき上向きの加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を受ける(図107)．このために，ロケットに固定された座標系 K は慣性系ではなく，中の観測者には力の場 $-m\boldsymbol{W}$ が現われるのが分る．この慣性力は，たとえばバネ秤で測定できる．この慣性力を**過重**という．

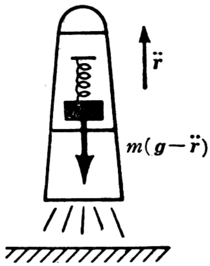


図107 過 重

例 2 飛込台から跳ぶと, 跳躍者は下向きの加速度 $\boldsymbol{g}$ を受ける. このため慣性力と重力の和は 0 に等しい. バネ秤で測ると, 任意の物体の重さが 0 になる. これを**無重力状態**という. 人工衛星の自由弾道飛行の際にも, 全く同様に無重力状態が現われる. なぜなら, 慣性力は地球引力の逆であるから.

例 3 振子の支点が加速度 $\boldsymbol{W}(t)$ で運動すれば, 振子は重力加速度 $\boldsymbol{g}$ が変化して, $\boldsymbol{g}-\boldsymbol{W}(t)$ であるかのように運動する.

B. 回転座標系 $R_t: K\to k$ を, 静止座標系 k に対する座標系 K の回転とする. $\boldsymbol{Q}(t)\in K$ で動座標系における動点の位置ベクトルを, $\boldsymbol{q}(t)=R_t\boldsymbol{Q}(t)\in k$ によって静止系における位置ベクトルを表わすことにする. §26 と同様, 動座標系における回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}$ で表わそう.

座標系 k では, 点 $\boldsymbol{q}$ の運動が Newton 方程式 $m\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ に従うと仮定しよう.

定理 回転座標系における運動では質量 m の各動点 $\boldsymbol{Q}$ に, 次の 3 つの付加的な《慣性力》が働く.

回転の慣性力 $-m[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{Q}]$,

Coriolis の力 $-2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{Q}}]$,

遠心力 $-m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]]$.

こうして, 回転座標系における運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{F}-m[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{Q}]-2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{Q}}]-m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]]$$

となる. ここで,

$$R\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) = \boldsymbol{f}(R\boldsymbol{Q}, (R\boldsymbol{Q})^{\cdot}). \qquad \text{——}$$

3 つの慣性力のうち, 最初のものは一様でない回転にだけ現われるが, 第 2, 第 3 の力は一様な回転でも現われる.

遠心力は(図108)いつも，瞬間回転軸 $\boldsymbol{\Omega}$ から外へ向う方向で，その大きさは $|\boldsymbol{\Omega}|^2 r$ に等しい(r は軸までの距離)．この力は相対運動の速度によらず，座標系 K で静止している物体にも働く．

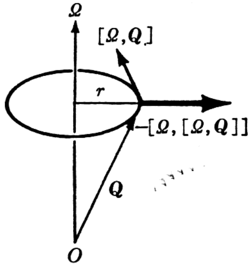


図108　(慣性)遠心力

Coriolis の力は速度 $\dot{\boldsymbol{Q}}$ に依存する．北半球では地表上の運動物体を右へ，落下物体を東へそらせる．

定理の証明　任意のベクトル $\boldsymbol{X}\in K$ に対して，$\dot{R}\boldsymbol{X}=R[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{X}]$ であることに注意する．実際，§26 によれば，$\dot{R}\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{x}]=[R\boldsymbol{\Omega},R\boldsymbol{X}]$．これは $R[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{X}]$ に等しい．なぜなら作用素 R は計量と向きづけを保ち，したがって，ベクトル積を保つからである．

$\boldsymbol{q}=R\boldsymbol{Q}$ を微分して $\dot{\boldsymbol{q}}=\dot{R}\boldsymbol{Q}+R\dot{\boldsymbol{Q}}=R(\dot{\boldsymbol{Q}}+[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Q}])$，これをもう一度微分すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{q}} &= \dot{R}(\dot{\boldsymbol{Q}}+[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Q}])+R(\ddot{\boldsymbol{Q}}+[\dot{\boldsymbol{\Omega}},\boldsymbol{Q}]+[\boldsymbol{\Omega},\dot{\boldsymbol{Q}}])\\ &= R([\boldsymbol{\Omega},\dot{\boldsymbol{Q}}+[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Q}]]+\ddot{\boldsymbol{Q}}+[\dot{\boldsymbol{\Omega}},\boldsymbol{Q}]+[\boldsymbol{\Omega},\dot{\boldsymbol{Q}}])\\ &= R(\ddot{\boldsymbol{Q}}+2[\boldsymbol{\Omega},\dot{\boldsymbol{Q}}]+[\boldsymbol{\Omega},[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Q}]]+[\dot{\boldsymbol{\Omega}},\boldsymbol{Q}]).\end{aligned}$$

(ここで，もう一度関係式 $\dot{R}\boldsymbol{X}=R[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{X}]$ を使った．ここでは，$\boldsymbol{X}=\dot{\boldsymbol{Q}}+[\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{Q}]$ である.) ▮

地球の自転が室内実験に与える影響を詳しく調べよう．地球は実際上は一様に自転しているので，$\dot{\Omega}=0$ としてよい．遠心力は赤道上で最大値をとり，そこでは $\Omega^2\rho/g\approx(7.3\cdot10^{-5})^2\cdot6.4\cdot10^6/9.8\approx3/1000$ 重力単位に達する．しかしながら，実験室ではこの変化は小さく，これを観測するには，遠くへ旅行せねばならない．

いま述べたことから，実験室内に限れば，地球の自転の影響は Coriolis の力の形でしか現われない．地球に固定された座標系 $\boldsymbol{Q}$ では，

$$\frac{d}{dt}m\dot{\boldsymbol{Q}}=m\boldsymbol{g}+2m[\dot{\boldsymbol{Q}},\boldsymbol{\Omega}]$$

が十分正確に成り立つ(遠心力は $\boldsymbol{g}$ に含める).

例 1 レニングラードの緯度($\lambda=60°$)で，深さ 250 m の縦坑に初速度 0 で石を落す．石は鉛直線からどれほどそれるか．$|\boldsymbol{\Omega}|\ll 1$ を考慮して，方程式

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{g}+2[\dot{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{\Omega}]$$

を近似的に解こう．そのために次のようにおく(図 109).

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2, \qquad \text{ここで，}\ \dot{\boldsymbol{Q}}_2(0) = \boldsymbol{Q}_2(0) = 0, \qquad \boldsymbol{Q}_1(t) = \boldsymbol{Q}_1(0)+\frac{\boldsymbol{g}t^2}{2}.$$

このとき，$\boldsymbol{Q}_2$ に対しては次の評価が得られる.

$$\ddot{\boldsymbol{Q}}_2 = 2[\boldsymbol{g}t, \boldsymbol{\Omega}]+O(\boldsymbol{\Omega}^2), \qquad \boldsymbol{Q}_2 \approx \frac{t^3}{3}[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\Omega}] \approx \frac{2t}{3}[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\Omega}], \qquad \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{g}t^2}{2}.$$

これから分るように，石は東へ約

$$\frac{2t}{3}|\boldsymbol{h}||\boldsymbol{\Omega}|\cos\lambda \approx \frac{2\cdot 7}{3}\cdot 250\cdot 7\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{m} \approx 4\,\mathrm{cm}$$

それる.

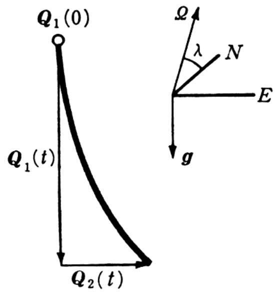


図 109 落下する石の Coriolis 力によるずれ

問 レニングラードで真上に発射した弾丸が，1 km 上昇してから逆に，銃口へ向って落下すると，Coriolis の力によって，どれだけそれるか.

例 2 Foucault の振子 Coriolis の力を考慮して，単振子の微小振動を考えてみよう．地球に固定された座標系 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 軸が，$\boldsymbol{e}_z$ 軸は鉛直上方に，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ 軸は水平方向に向うとする(図 110)．微小振動を近似すると，$\dot{z}=0$ である($\dot{x}, \dot{y}$ と比べて)．よって，

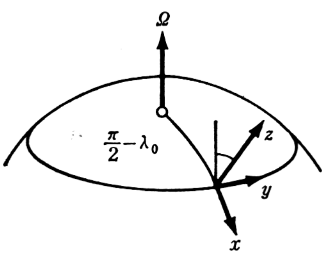


図 110 Foucault の振子の運動を調べるための座標系

Coriolis の力の水平成分は $2m\dot{y}\Omega_z e_x - 2m\dot{x}\Omega_z e_y$ である．これから次の運動方程式が得られる．

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + 2\dot{y}\Omega_z, \\ \ddot{y} = -\omega^2 y - 2\dot{x}\Omega_z. \end{cases} \qquad (\Omega_z = |\boldsymbol{\Omega}| \sin\lambda_0,\ \lambda_0 \text{ は緯度})$$

$x+iy=w$ とおくと，$\dot{w}=\dot{x}+i\dot{y}$，$\ddot{w}=\ddot{x}+i\ddot{y}$，したがって，上の2つの方程式は1つの複素方程式にまとめられる．

$$\ddot{w}+2i\Omega_z\dot{w}+\omega^2 w = 0.$$

これを解こう．$w=e^{\lambda t}$ とおくと，$\lambda^2+2i\Omega_z\lambda+\omega^2=0$，$\lambda=-i\Omega_z\pm i\sqrt{\Omega_z{}^2+\omega^2}$ となる．ところで，$\Omega_z{}^2 \ll \omega^2$ であるから，$\sqrt{\Omega_z{}^2+\omega^2}=\omega+O(\Omega_z{}^2)$，$\Omega_z{}^2$ を無視すると，

$$\lambda \approx -i\Omega_z \pm i\omega,$$

あるいは，同じ誤差のもとで，

$$w = e^{-i\Omega_z t}(c_1 e^{i\omega t}+c_2 e^{-i\omega t})$$

となる．

$\Omega_z=0$ であると通常の球面振子の調和振動が得られる．Coriolis の力の影響で，振子の描く図形全体が角速度 $-\Omega_z$ ($|\Omega_z|=|\boldsymbol{\Omega}|\sin\lambda_0$) で回転することが分る．

とくに，初期条件が平面運動に対応すれば ($y(0)=\dot{y}(0)=0$)，振動面は地球の座標系に対して，角速度 $-\Omega_z$ で回転する (図111)．

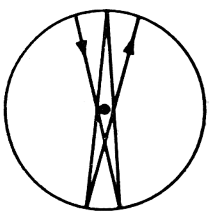


図111　Foucault の振子が描く軌跡

極では，振動面は1昼夜で1回転する (静止座標系に対しては，動かない)．モスクワの緯度 (56°) では，振動面は1昼夜に 0.83 回転，つまり1時間に 12.5° 回転する．

問　河の水が 3 km/時 で流れている．河が湾曲するその曲率半径がどれ程の時に，地球の自転による Coriolis の力が河の湾曲からくる遠心力よりも大きいか．

［解］　中緯度にある河に対して，曲率半径は 10 km のオーダーの大きさを下まわってはならない．

この問の解は，モスクワ河のように小さい曲率半径で蛇行する河が (湾曲の外側に当る) 左岸あるいは右岸を交互に洗い流すのに，北半球の大河 (たとえばボルガ河中流) が，なぜ主に右岸を洗い流すのかを説明している．

§28 剛　体

本節では，剛体とその慣性テンソル，慣性楕円体，慣性モーメント，慣性軸を定義する．

A. 剛体の配位多様体

定義　**剛体**とは，質点間の距離が一定である：

$$|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j| = r_{ij} = \mathrm{const} \tag{1}$$

というホロノーム拘束を受けた質点系をいう．

定理　剛体の配位多様体は，1直線上にはない3点が剛体に存在すれば，6次元多様体 $\mathbf{R}^3\times SO(3)$ (3次元空間 $\mathbf{R}^3$ とその回転群 $SO(3)$ との直積) である．

証明　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を1直線上にはない剛体の3点とする．右手系正規直交枠で，最初のベクトルが $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$ と同方向で，第2のベクトルが $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 平面で $\boldsymbol{x}_3$ の側にあるものを考えよう (図112)．

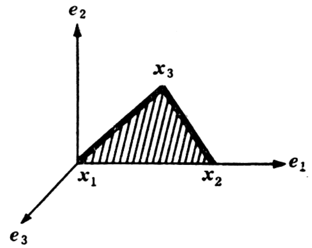


図112　剛体の配位多様体

条件 $|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|=r_{ij}$ $(i=1, 2, 3)$ より，剛体のすべての点の位置が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の位置によって一意的に定まる．後者は枠の位置によって与えられる．最後に，$\mathbf{R}^3$ の枠全体の空間は $\mathbf{R}^3\times SO(3)$ である．なぜなら，各枠は固定した枠から平行移動と回転とによって得られるから*)．∎

問　すべての点が1直線上にあるような剛体の配位空間を求めよ．

［解］　$\mathbf{R}^3\times S^2$.

定義　**不動点 O をもつ剛体**とは，拘束(1)に加えて，拘束 $\boldsymbol{x}_1=O$ を受けた質点系のことである．

明らかに，この剛体の配位空間は3次元回転群 $SO(3)$ である．

B. 保存法則　力の場がないところで慣性運動する自由剛体の運動を考えよ

*)　厳密には，剛体の配位空間は $\mathbf{R}^3\times O(3)$ である．$\mathbf{R}^3\times SO(3)$ は，この多様体の2連結成分のうち，剛体の向きづけを保つ方である．

う．(近似的な)例として，宇宙船の宙返りがある．

系はすべての並進運動を許容する．つまり，並進運動は Lagrange 関数を変えない．Noether の定理によって，3つの第1積分が存在する．それが運動量ベクトルの3成分である．いいかえると次の定理が証明された．

定理 剛体が自由運動するとき，その慣性中心は等速直線運動をする．——

このとき，慣性中心が静止しているような慣性座標系を考えることができる．こうして，次の系が証明された．

系 自由剛体は慣性中心が不動点 O に固定されているかのように，その慣性中心のまわりに回転する．——

こうして問題は，不動点 O を回る剛体の運動という自由度3の問題に帰着する．この問題をもっと詳しく調べよう(O が剛体の慣性中心であるとは，必ずしも仮定しない)．

Lagrange 関数は，点 O を回るすべての回転によって変化しない．Noether の定理により，3つの第1積分が存在する．それが角運動量ベクトルの3成分である．また，系の全エネルギー E(ここでは，運動エネルギーに等しい，つまり $E=T$)も保存される．こうして，次の定理が証明された．

定理 外力がないとき，不動点 O を回る剛体の運動では，M_x, M_y, M_z, E という4つの第1積分が存在する．——

この定理から，計算することなく，運動に関する定性的な結論が得られる．

剛体の位置と速度とは，6次元多様体 $TSO(3)$，つまり配位多様体 $SO(3)$ の接バンドルの1点によって決まる．第1積分 M_x, M_y, M_z, E は6次元多様体 $TSO(3)$ 上の4つの関数である．一般の場合(つまり系に特別な対称性がない限り)，この4つの関数は独立であることが分る．よって，4つの方程式

$$M_x = C_1, \qquad M_y = C_2, \qquad M_z = C_3, \qquad E = C_4 > 0$$

は6次元多様体 $TSO(3)$ の中に，2次元部分多様体 V_c を定める．

この多様体は不変である．つまり，初期条件が多様体 V_c 上に点を与えると，剛体の位置と速度に対応する $TSO(3)$ 上の点は，運動の間，この V_c 上にとどまる．

したがって，多様体 V_c 上に接ベクトル場ができる($TSO(3)$ 上の運動の速度場である)．$C_4>0$ であれば，この場は特異点を持たない．さらに(E を使って)

V_c がコンパクトであること，($TSO(3)$ が向きづけ可能である*)ことから)向きづけ可能であることが容易に分る．

位相幾何学において，向きづけ可能な2次元の連結コンパクト多様体は，すべて，$n \geq 0$ 個のハンドルをもつ球面であることが分っている(図113)

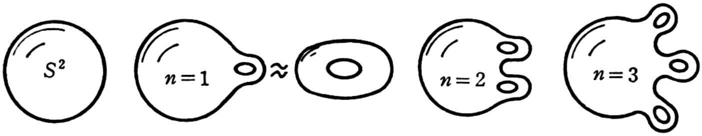


図113　向きづけ可能な2次元の連結コンパクト多様体

このうち，特異点のない接ベクトル場を持ち得るのは，トーラス($n=1$)だけである．

こうして，不変多様体 V_c は1個または数個の2次元トーラスである．

後に見るように，このトーラス上には角座標 $\varphi_1, \varphi_2 \pmod{2\pi}$ がとれて，V_c 上に表わされた点の運動は方程式 $\dot{\varphi}_1=\omega_1(c)$，$\dot{\varphi}_2=\omega_2(c)$ で与えられる．

いいかえると，剛体の回転は，一般には異なる周期をもつ2つの周期運動の重ね合わせとして表わされる．振動数 ω_1 と ω_2 とが通約不能であれば，剛体は過去の運動状態へは決して戻らない．振動数 ω_1, ω_2 の大きさは初期条件 c による．

C. 慣性作用素　さて，定量的な理論に移る．ここで以下の**記号**を導入しよう．k を静止座標系，K は点 O のまわりを剛体とともに回る回転座標系で，そこでは剛体は静止しているものとする．空間 K の各ベクトルは作用素 R で空間 k に移る．空間 K と k の対応するベクトルは同一の文字で，K に対しては大文字で，k に対しては小文字で表わすことにする．たとえば，次のように

---

*)　以下の主張は容易に証明できる．

1. $f_1, \cdots, f_k$: $M \to \mathbf{R}$ を向きづけ可能な多様体 M 上の関数とする．方程式 $f_1=c_1$，…，$f_k=c_k$ が定める集合 V を考えよう．V の各点で $f_1, \cdots, f_k$ のグラジエントが1次独立であると仮定しよう．このとき，V は向きづけ可能である．

2. 向きづけ可能な多様体の直積は，向きづけ可能である．

3. 接バンドル $TSO(3)$ は，直積 $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$ である．

接バンドルが直積であるような多様体は，**平行性をもつ**という．群 $SO(3)$ は(すべての Lie 群と同様)，平行性をもつ．

4. 平行性をもつ多様体は，向きづけ可能である．

1-4 から，$SO(3)$，$TSO(3)$，V_c は向きづけ可能である．

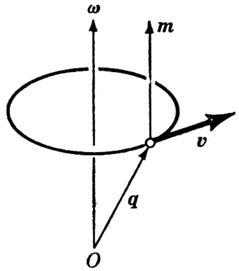


図 114 空間(静止系)における，剛体上の点の位置ベクトル，速度ベクトル，角速度，角運動量

なる(図 114).

$\boldsymbol{q} \in k$ は点の空間における位置ベクトル，

$\boldsymbol{Q} \in K$ はその点の剛体における位置ベクトル，$\boldsymbol{q} = R\boldsymbol{Q}$,

$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{q}} \in k$ は点の空間における速度ベクトル，

$\boldsymbol{V} \in K$ はその点の剛体における速度ベクトル，$\boldsymbol{v} = R\boldsymbol{V}$,

$\boldsymbol{\omega} \in k$ は空間における角速度，

$\boldsymbol{\Omega} \in K$ は剛体における角速度，$\boldsymbol{\omega} = R\boldsymbol{\Omega}$,

$\boldsymbol{m} \in k$ は空間における角運動量，

$\boldsymbol{M} \in K$ は剛体における角運動量，$\boldsymbol{m} = R\boldsymbol{M}$.

角速度の定義によって(§26),

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}].$$

質量 m の点の O に関する角運動量の定義によって

$$\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{q}, m\boldsymbol{v}] = m[\boldsymbol{q}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{q}]].$$

作用素 $R: K \to k$ は計量と向きづけとを保つから，スカラー積とベクトル積を保つ．ゆえに，

$$\boldsymbol{M} = m[\boldsymbol{Q}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]].$$

こうして，$\boldsymbol{\Omega}$ を $\boldsymbol{M}$ に移す線形作用素

$$A: K \longrightarrow K, \qquad A\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{M}$$

が得られる．この作用素は剛体上の点($\boldsymbol{Q}$)と質量(m)にも依存する．

補題 作用素 A は対称である．

証明 関係式 $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = ([\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{b})$ により，任意の $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in K$ に対して

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) &= m([\boldsymbol{Q}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}]], \boldsymbol{Y}) \\ &= m([\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Q}], [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}])\end{aligned}$$

となるが，最後の表示は $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に対して対称である．∎

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ に角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ を代入する．$[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]^2=\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{v}^2$ に注意すれば次の系が得られる．

系　剛体上の点の運動エネルギーは角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ の 2 次形式である．つまり，

$$T=\frac{1}{2}(A\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}).$$

——

対称作用素 A を**点 $\boldsymbol{Q}$ の慣性作用素**(または慣性テンソル)という．

剛体が質量 m_i の点 $\boldsymbol{Q}_i$ の幾つかからなれば，その和をとって次の定理が得られる．

定理　不動点 O に関する剛体の角運動量 $\boldsymbol{M}$ は，角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ に線形に依存する．つまり，線形作用素 $A:K\to K$ が存在して $A\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{M}$ である．この作用素 A は対称である．

剛体の運動エネルギーは角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ の 2 次形式である：

$$T=\frac{1}{2}(A\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}).$$

証明　定義により，剛体の角運動量は各点の角運動量の和に等しい：

$$\boldsymbol{M}=\sum_i \boldsymbol{M}_i=\sum_i A_i\boldsymbol{\Omega}=A\boldsymbol{\Omega}, \qquad \text{ここで，} A=\sum_i A_i.$$

各点の慣性作用素 A_i は補題により対称であるから，作用素 A も対称である．運動エネルギーに対しては，定義により次のようになる．

$$T=\sum_i T_i=\sum_i \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}_i, \boldsymbol{\Omega})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega})=\frac{1}{2}(A\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}). \qquad ∎$$

D. 慣性軸　すべての対称作用素と同じく，A は 3 つの互いに直交する固有方向をもつ．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in K$ をその単位ベクトル，I_1, I_2, I_3 を固有値とする．基底 $\boldsymbol{e}_i$ では，慣性作用素と運動エネルギーはとくに簡単な形をとる：

$$M_i=I_i\Omega_i,$$

$$T=\frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2).$$

軸 $\boldsymbol{e}_i$ を点 O における剛体の**慣性軸**という．

もちろん，I_1, I_2, I_3 の値がすべて異なっていないと，慣性軸 $\boldsymbol{e}_i$ は一意的には定まらない．固有値 I_1, I_2, I_3 の意味をより詳しく明らかにしよう．

定理　点 O で固定された剛体が角速度 $\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{e}$ $(\Omega=|\boldsymbol{\Omega}|)$ で軸 $\boldsymbol{e}$ のまわりを回転するとき，運動エネルギーは，

$$T=\frac{1}{2}I_e\Omega^2,\qquad \text{ここで,}\ I_e=\sum_i m_i r_i^2$$

に等しい．r_i は第 i 点から軸 $\boldsymbol{e}$ までの距離である(図115)．

証明　定義によって $T=(1/2)\sum m_i v_i^2$，一方，$|\boldsymbol{v}_i|=\Omega r_i$ である．よって $T=(1/2)\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\Omega^2$ となる．∎

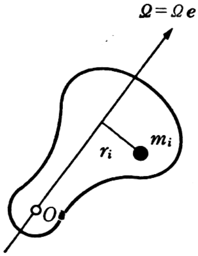


図115　軸のまわりを回転する剛体の運動エネルギー

I_e の値は剛体における角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ の回転軸の方向 $\boldsymbol{e}$ に依存する．

定義　I_e を**軸 $\boldsymbol{e}$ に関する剛体の慣性モーメント**という：

$$I_e=\sum_i m_i r_i^2.$$

T に対する2つの表示を比較すれば，次の系が得られる．

系　慣性作用素 A の固有値 I_i は，慣性軸 $\boldsymbol{e}_i$ に関する剛体の慣性モーメントである．

E. 慣性楕円体　慣性モーメント I_e が剛体内の軸 $\boldsymbol{e}$ にどう関係するかを調べるために，ベクトル $\boldsymbol{e}/\sqrt{I_e}$ を考えよう．ここで $\boldsymbol{e}$ は単位球面上を動くものとする．

定理　ベクトル $\boldsymbol{e}/\sqrt{I_e}$ は K において楕円体をつくる．

証明　$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}/\sqrt{I_e}$ とすれば，2次形式 $T=(A\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega})/2$ は $1/2$ に等しい．したがって，$\{\boldsymbol{\Omega}\}$ は正定値2次形式のレベル集合，つまり楕円体である．∎

この楕円体は，運動エネルギーが $1/2$ に等しいような角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ からなるといえる．

定義　楕円体 $\{\boldsymbol{\Omega}:(A\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega})=1\}$ を点 O における**剛体の慣性楕円体**という(図116)．

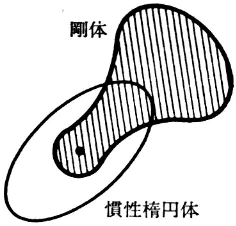


図116 慣性楕円体

慣性軸 e_i を基底にとると，この方程式は

$$I_1\Omega_1{}^2+I_2\Omega_2{}^2+I_3\Omega_3{}^2=1$$

の形である．ゆえに，慣性楕円体の主軸は慣性軸の向きをもち，その長さは $\sqrt{I_i}$ に反比例する．

注意 剛体が或る軸に沿って延びていると，この軸に関する剛体の慣性モーメントは小さく，したがって慣性楕円体もまた，この軸に沿って延びている．したがって，慣性楕円体は剛体の或る特徴を表わしているといえる．

剛体が O を通る位数 k の対称軸をもつ(したがって，O のまわりに $2\pi/k$ 回転すると自分自身に一致する)ならば，慣性楕円体もこの軸に関して同じ対称性をもつ．しかし，3軸楕円体には位数 $k>2$ の対称軸は存在しない．したがって，位数 $k>2$ である剛体の対称軸はすべて慣性楕円体の回転軸であり，よって主軸である．

例 正3角形の3頂点に同じ質量 m をおく．3角形の中心 O に関する3頂点の慣性楕円体は，3角形が張る平面の法線を軸とする回転楕円体である(図117)．

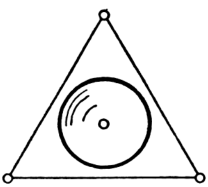


図117 正3角形の慣性楕円体

このような軸が幾つか存在すれば，慣性楕円体は球となり，すべての軸が主軸となる．

問 立方体の中心を通る直線で，各頂点までの距離の2乗和が，a) 最大，b) 最小，となるものを引け．——

慣性楕円体(または慣性作用素，または慣性モーメント I_1, I_2, I_3)が，剛体の

回転特性を完全に決定することを注意しておこう．つまり，同一の慣性楕円体をもつ2つの剛体を考えると，同じ初期条件のもとでは同じ運動をする(なぜなら，両者は同一の Lagrange 関数 $L=T$ をもつからである)．

こうして，O を回る回転の力学という観点からは，剛体がどれ程の点からなろうと，**剛体全体の空間は3次元である．**

さらに《密度 $\rho(\boldsymbol{Q})$ の連続剛体》も，質量 $\rho(\boldsymbol{Q}_i)\Delta\boldsymbol{Q}_i$ をもつ有限個の点 $\boldsymbol{Q}_i$ からなる剛体の列(図118)の $\Delta\boldsymbol{Q}_i\to 0$ のときの極限を考えれば，調べることができる．慣性モーメントは，

$$I_e=\iiint\rho(\boldsymbol{Q})r^2(\boldsymbol{Q})d\boldsymbol{Q}$$

(r は $\boldsymbol{Q}$ から軸 $\boldsymbol{e}$ までの距離)となる．

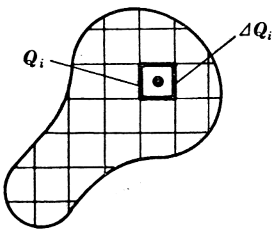


図118　連続剛体

例　一様な平板 $|x|\leq a$, $|y|\leq b$, $z=0$ の O に関する慣性軸と慣性モーメントを求めよ．

［解］　この板は3つの対称面をもつから，慣性楕円体も同じ対称面をもち，したがって慣性軸 x, y, z をもつ．さらに，

$$I_x=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}y^2\rho dxdy=\frac{mb^2}{3}$$

である．全く同様に

$$I_y=\frac{ma^2}{3}$$

である．明らかに $I_z=I_x+I_y$ である．

問　どんな剛体の慣性モーメントも，3角不等式

$$I_3\leq I_1+I_2,\qquad I_2\leq I_1+I_3,\qquad I_1\leq I_2+I_3$$

を満たし，等号は平面剛体に対してのみ成り立つことを示せ．

問　主半軸 a, b, c をもつ質量 m の均質な楕円体の，中心 O に関する慣性軸と慣性モ

ーメントを求めよ.

［ヒント］ まず球を考えよ.

問 次の Steiner の定理を証明せよ.

2本の平行軸に関する剛体の慣性モーメントの間には，次の関係がある.

$$I = I_0 + mr^2.$$

ただし，1本の軸は剛体の慣性中心を通るとする．I_0 はこの軸に関する慣性モーメント，m は剛体の質量，r は2軸間の距離である.

こうして，慣性中心を通る軸に関する慣性モーメントは，これに平行などんな軸に関する慣性モーメントよりも小さい.

問 一様な4面体の頂点に関する慣性軸，慣性モーメントを求めよ.

問 与えられた慣性楕円体をもつ剛体が角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転している．角運動量ベクトル $\boldsymbol{M}$ を描け.

［解］ $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{\Omega}$ 軸上の点で慣性楕円体に垂直な方向をもつ(図119).

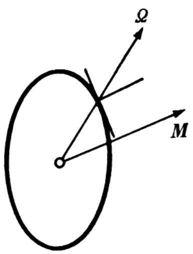


図119 角速度，慣性楕円体，角運動量

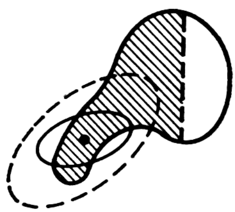


図120 剛体が小さくなるときの慣性モーメントの振舞

問 不動点 O に固定された剛体から一部を切り取った(図120)．主慣性モーメントは，どのように変るか.

［解］ 3つの主慣性モーメントはすべて小さくなる.

［ヒント］ §24と比べよ.

問 慣性モーメント $I_1 > I_2 > I_3$ をもつ剛体に点 $\boldsymbol{Q} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ のところへ微小質量 ε を付け加えた．I_1 と $\boldsymbol{e}_1$ の変化を誤差 $O(\varepsilon^2)$ で求めよ.

［解］ 慣性中心は ε のオーダーで移動する．したがって，新旧の慣性中心を通る2本の平行軸に関する元の剛体の慣性モーメントは，ε^2 のオーダーで異なる．また，このとき質量 ε を付け加えれば，どんな固定軸に対しても，慣性モーメントが ε のオーダーで変化する．したがって誤差 $O(\varepsilon^2)$ の計算では，慣性中心の移動は無視してよい.

こうして，微小質量を付け加えた後の運動エネルギーは，

$$T = T_0 + \frac{1}{2}\varepsilon[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]^2 + O(\varepsilon^2)$$

となる．ここで，$T_0 = (I_1\Omega_1{}^2 + I_2\Omega_2{}^2 + I_3\Omega_3{}^2)/2$ は元の剛体の運動エネルギーである．慣性作用素の固有値 $I_1(\varepsilon)$ と固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1(\varepsilon)$ を，ε に関する Taylor 級数の形で求めよう．関係式 $A(\varepsilon)\boldsymbol{e}_1(\varepsilon) = I_1(\varepsilon)\boldsymbol{e}_1(\varepsilon)$ において，ε の係数を比較すれば，誤差 $O(\varepsilon^2)$ で，次の結果を得る．

$$I_1(\varepsilon) \approx I_1 + \varepsilon(x_2{}^2 + x_3{}^2), \qquad \boldsymbol{e}_1(\varepsilon) \approx \boldsymbol{e}_1 + \varepsilon\left(\frac{x_1x_2}{I_2 - I_1}\boldsymbol{e}_2 + \frac{x_1x_3}{I_3 - I_1}\boldsymbol{e}_3\right).$$

$I_1(\varepsilon)$ に対する式から明らかに，主慣性モーメントの変化は (ε に関する1次近似では)，慣性中心も慣性軸も変らなかったかのようである．$\boldsymbol{e}_1(\varepsilon)$ に対する式は主軸がどう変化するかを示している．最大主軸は $\boldsymbol{Q}$ に近づき，最短主軸は $\boldsymbol{Q}$ から遠ざかる．さらに，慣性楕円体の1つの主平面上に微小質量をおくと，この主平面上の2本の主軸は向きを変えるが，第3の主軸は向きを変えない．分母に慣性モーメントの差が現われることは，回転楕円体の主軸が定まらないことと関係する．慣性楕円体がほぼ回転楕円体であれば (たとえば $I_1 \approx I_2$)，微小質量を付け加えるだけで主軸 $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は，その張る平面上で激しく向きを変える．

§29 Euler 方程式，Poinsot による運動の記述

ここでは，外力がない時の不動点のまわりの剛体の運動および自由剛体の運動を調べる．運動は2つの振動数をもつことが分る．

A. Euler 方程式 不動点 O のまわりの剛体の運動を考えよう．$\boldsymbol{M}$ を O に関する剛体における角運動量ベクトル，$\boldsymbol{\Omega}$ を剛体における角速度ベクトル，A を慣性作用素 ($A\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{M}$) とする．ベクトル $\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{M}$ は動座標系 K に属する (§26)．O に関する空間における角運動量ベクトル $\boldsymbol{m} = R\boldsymbol{M}$ は，運動のあいだ不変である (§28, B 項)．

つまり，剛体におけるベクトル $\boldsymbol{M}(\in K)$ は，t が変化してもベクトル $\boldsymbol{m} = R_t\boldsymbol{M}(t)$ が変化しないように，動かなければならない．

定理 次の方程式が成り立つ．

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = [\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}]. \tag{1}$$

証明 静止空間 k に対する《点》$\boldsymbol{M}(t) \in K$ の運動速度に，§26 の式(5)を適用すれば，次式が得られる．

$$\dot{\boldsymbol{m}} = R\dot{\boldsymbol{M}}+[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{m}] = R(\dot{\boldsymbol{M}}+[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{M}]).$$

ところで，空間に関する角運動量 $\boldsymbol{m}$ は変化しない($\dot{\boldsymbol{m}}=0$)から，$\dot{\boldsymbol{M}}+[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{M}]=0$. ∎

式(1)を **Euler 方程式**という．$\boldsymbol{M}=A\boldsymbol{\Omega}$ であるから，(1)は $\boldsymbol{M}$ (または $\boldsymbol{\Omega}$)に関する微分方程式と考えられる．$\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{M}$ を点 O における慣性軸で分解する：

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\boldsymbol{e}_1+\Omega_2\boldsymbol{e}_2+\Omega_3\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{M} = M_1\boldsymbol{e}_1+M_2\boldsymbol{e}_2+M_3\boldsymbol{e}_3.$$

このとき，$M_i=I_i\Omega_i$ であり，(1)は 3 つの方程式からなる系となる：

$$\frac{dM_1}{dt} = a_1M_2M_3, \qquad \frac{dM_2}{dt} = a_2M_3M_1, \qquad \frac{dM_3}{dt} = a_3M_1M_2, \tag{2}$$

ここで，

$$a_1 = \frac{I_2-I_3}{I_2I_3}, \qquad a_2 = \frac{I_3-I_1}{I_3I_1}, \qquad a_3 = \frac{I_1-I_2}{I_1I_2}.$$

あるいは，角速度の 3 成分に対する方程式の形にも書ける：

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt} = (I_2-I_3)\,\Omega_2\Omega_3,$$

$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt} = (I_3-I_1)\,\Omega_3\Omega_1,$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt} = (I_1-I_2)\,\Omega_1\Omega_2.$$

注意 剛体に外力が働き，O に関するそのモーメントの和が静止座標系では $\boldsymbol{n}$，動座標系では $\boldsymbol{N}$ に等しい($\boldsymbol{n}=R\boldsymbol{N}$)とすると，

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{n}$$

であり，Euler 方程式は次のようになる．

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = [\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Omega}]+\boldsymbol{N}.$$

B. Euler 方程式の解の研究

補題 Euler 方程式(2)は 2 次式である 2 つの第 1 積分 E と M^2 とをもつ：

$$2E = \frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}, \qquad M^2 = M_1^2+M_2^2+M_3^2.$$

証明 E はエネルギーの保存法則により保たれ，$\boldsymbol{m}^2=\boldsymbol{M}^2=M^2$ であるから，M^2 は角運動量の保存法則により保たれる．∎

こうして，M は楕円体と球面の交線上にある．交線の構造を調べるために，楕円体 $E>0$ を固定して，球面の半径 M を変化させよう(図121)．

話を明確にするために，$I_1>I_2>I_3$ と仮定しよう．楕円体の主半軸は，$\sqrt{2EI_1}>\sqrt{2EI_2}>\sqrt{2EI_3}$ である．球面の半径 M が最短主半軸よりも短いか最長主半軸よりも長ければ($M<\sqrt{2EI_3}$ であるか $M>\sqrt{2EI_1}$)交点はなく，このような E と M の値には実際の運動は対応しない．球面の半径が最短主半軸に等しければ，交線は2点よりなる．半径が増すと($\sqrt{2EI_3}<M<\sqrt{2EI_2}$)，最短主半軸の両端のまわりに，2曲線が得られる．全く同様に，球面半径が最長主半軸に等しければその両端が，さらに少し小さくなれば最長主半軸の両端に近い2つの閉曲線が得られる．最後に $M=\sqrt{2EI_2}$ であれば，交線は2つの円周からなる．

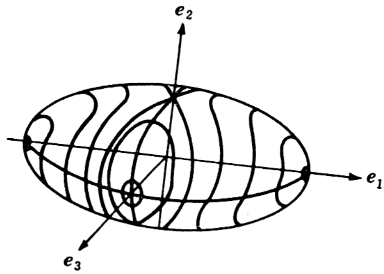


図121 等エネルギー面上の Euler 方程式の軌跡

楕円体の主軸の6つの端点は，おのおのが Euler 方程式(2)の孤立した軌道，すなわちベクトル $\boldsymbol{M}$ の停留点である．対応する角速度ベクトルは慣性軸の1つ $\boldsymbol{e}_i$ と同方向であり，一定の値をもつ．このとき，$\boldsymbol{\Omega}$ はすべての時間にわたって，$\boldsymbol{M}$ と共線的(平行)である．したがって，角速度ベクトルは空間における位置 $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{m}$ と共線的に保つ．剛体は空間において静止した慣性軸 $\boldsymbol{e}_i$ のまわりを，一定角速度で回転するだけである．

定義 角速度が一定である($\boldsymbol{\omega}=$const, $\boldsymbol{\Omega}=$const)剛体の運動を**定常回転**という．

以上のことから，次の定理が証明された．

定理 1点 O で固定された剛体は，3本の慣性軸 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ のそれぞれのまわりの定常回転を許容する．——

先に仮定したように $I_1>I_2>I_3$ であると，Euler 方程式の右辺は，他のとこ

ろでは 0 にならない，すなわち，これら以外に定常回転は存在しない．

さて，Euler 方程式の定常解の (Liapunov の意味の) 安定性を調べよう．

定理 最大，最小の慣性軸に対応する Euler 方程式の定常解 $\boldsymbol{M}=M_1\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{M}=M_3\boldsymbol{e}_3$ は安定であるが，中間軸に対応する解 ($\boldsymbol{M}=M_2\boldsymbol{e}_2$) は不安定である．——

実際，初期条件が $M_1\boldsymbol{e}_1$ あるいは $M_3\boldsymbol{e}_3$ から少しはずれようと軌道は小さい閉曲線であるが，$M_2\boldsymbol{e}_2$ からは少しでもはずれれば軌道は大きくなってしまう．

問 最大，最小の慣性軸のまわりの，剛体の定常回転は漸近安定であるか．

［解］ 否．

C. Poinsot による運動の記述 剛体における角運動量ベクトル $\boldsymbol{M}$ も角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ もその運動は十分に想像することができる．$M \neq \sqrt{2EI_i}$ であれば，これらは周期的である．

空間において剛体がどう回転するかを見るために，その慣性楕円体

$$E=\{\boldsymbol{\Omega}:(A\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega})=1\}\subset K$$

を考えよう．ここで，$A:\boldsymbol{\Omega}\to\boldsymbol{M}$ は 1 点 O で固定された剛体の慣性作用素である．

楕円体 E は各瞬間に，静止空間 k では R_tE の位置にある．

定理 (Poinsot) 慣性楕円体 E は，角運動量ベクトル $\boldsymbol{m}$ に垂直な或る静止平面に沿って，滑ることなく転がる (図 122)．

証明 角運動量ベクトル $\boldsymbol{m}$ に垂直で，慣性楕円体 R_tE に接する平面 π を考

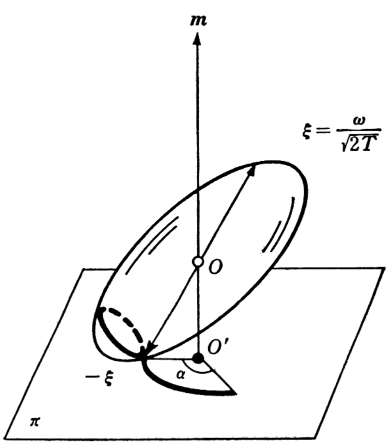


図 122 慣性楕円体は静止平面に沿って転がる

えよう．このような平面は2枚あるが，接点における楕円体の法線は $\boldsymbol{m}$ に平行である．

一方，慣性楕円体 E は点 $\boldsymbol{\Omega}$ で法線 $\mathrm{grad}(A\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})=2A\boldsymbol{\Omega}=2\boldsymbol{M}$ をもつ．よって，$\boldsymbol{\omega}$ 軸と楕円体 R_tE の交点 $\pm\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\omega}/\sqrt{2T}$ では，R_tE の法線が $\boldsymbol{m}$ と平行である．

こうして，平面 π は瞬間回転軸上の点 $\pm\boldsymbol{\xi}$ で R_tE に接する．ところで，$\boldsymbol{\xi}$ と静止ベクトル $\boldsymbol{m}$ とのスカラー積は $\pm(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\omega})/\sqrt{2T}=\pm\sqrt{2T}$ であり定数である．よって，平面 π と O との距離は変らない，つまり平面 π は静止している．

接点は瞬間回転軸上にあるから，その速度は0である，つまり楕円体 R_tE は π に沿って滑ることなく転がる．∎

系 初期条件が最大(または最短)慣性軸のまわりの定常回転に近ければ，角速度は剛体においても($\boldsymbol{\Omega}$)，空間においても($\boldsymbol{\omega}$)，常にその初期条件の近くにとどまる．——

さて，静止平面 π 上の接点の軌跡を考えよう．接点が楕円体上を1回りすると，剛体が軸 $\boldsymbol{m}$ のまわりに，或る角度 α 回転するだけで，同じ初期条件が繰り返される．2回り目も，1回り目と全く同様である．$\alpha=2\pi p/q$ であると，運動は全体として周期的であるが，α が 2π と通約不能ならば，剛体は決して最初の位置には戻らない．

このとき，接点は平面 π 上で，O' を中心とする或る円環の中を，至るところ稠密に覆う(図123)．

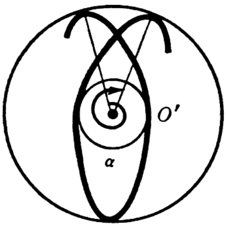


図123 静止平面上の接点の軌跡

問 6次元空間 $TSO(3)$ の2次元不変多様体 V_c (§28, B項)の連結成分はトーラスであり，その上に座標 $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ を $\dot{\varphi}_1=\omega_1(c)$，$\dot{\varphi}_2=\omega_2(c)$ となるようにとれることを示せ．

［ヒント］ φ_1 として，$\boldsymbol{M}$ の周期的変化の位相をとれ．——

慣性楕円体が回転楕円体であるという，重要かつ特殊な場合を考えよう：

$$I_2 = I_3 \neq I_1.$$

このとき，楕円体の軸 $R_t\boldsymbol{e}_1$，瞬間回転軸 $\boldsymbol{\omega}$，ベクトル $\boldsymbol{m}$ は常に1平面上にある．この3本のベクトル間の角とベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の長さは保たれて，接点は楕円体上にも平面上にも円周を描く．回転軸($\boldsymbol{\omega}$)と対称軸($R_t\boldsymbol{e}_1$)は同一角速度でベクトル $\boldsymbol{m}$ のまわりに円錐を描く(図124)．

$\boldsymbol{m}$ のまわりのこの運動を**歳差**という．

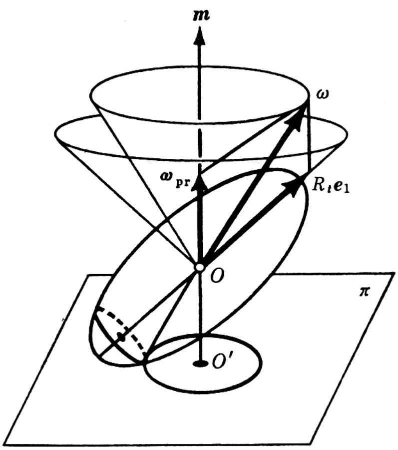


図124　回転楕円体は静止平面に沿って転がる

問　歳差運動の角速度を求めよ．

［解］　角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を角運動量ベクトル $\boldsymbol{m}$ と剛体の軸 $R_t\boldsymbol{e}_1$ との方向に分解せよ．第1成分が歳差運動の角速度 $\omega_{pr}=M/I_2$ を与える．

［ヒント］　剛体の運動を角運動量軸のまわりの回転と，それに続く剛体の軸のまわりの回転との積に表わす．運動の積の角速度は角速度ベクトルの和である．

注意　外力がない時，点 O に固定された剛体は Lagrange 系であり，その配位空間は群 $SO(3)$ である．Lagrange 関数は左平行移動で不変である．

剛体の Euler 理論の重要な部分はこの事実だけを使うため，任意の Lie 群上の左不変な Lagrange 系に対しても有効であることが示せる．

とくに，Riemann 空間の領域 D の体積要素を保つ微分同相群にこの理論を適用すると，理想流体の力学に対する基本定理が得られる［付録2参照］．

§30 Lagrange のこま

ここでは，一様な力の場で，1点で固定された軸対称な剛体の運動を扱う．この運動は回転，歳差，章動という3つの周期的な過程からなる．

A. Euler 角 不動点 O で固定された，重力 mg の作用を受ける剛体を考えよう．このような《重い剛体》の運動に関する問題は，一般には現在まで解かれていないし，或る意味で解くことができない．

この問題は自由度3であるにもかかわらず，第1積分は2つしか分っていない．エネルギー積分 $E=T+U$ と角運動量を鉛直軸へ射影した量 M_z とである．

問題が完全に解ける重要かつ特殊な場合がある．**対称なこま**の場合である．対称なこま，あるいは Lagrange のこまとは，不動点 O で固定された剛体で，O における慣性楕円体が回転楕円体であり，剛体の重心が回転軸 $\boldsymbol{e}_3$ 上にあるものをいう (図125)．

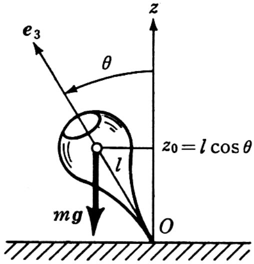


図125 Lagrange のこま

このとき，軸 $\boldsymbol{e}_3$ のまわりの回転は Lagrange 関数を変えないから，Noether の定理によって，E と M_z の外に，もう1つ第1積分が存在するはずである．(後で見るように，これは角運動量を軸 $\boldsymbol{e}_3$ へ射影した量 M_3 である.)

z 軸のまわりの回転角と，こまの軸のまわりの回転角とを含む3つの座標が導入できれば，この2つの座標は循環的であり，自由度3をもつこの問題は (第3座標に対する) 自由度1の問題に帰着する．

配位空間 $SO(3)$ にこのように座標を選ぶことは可能である．この座標 φ, θ, ψ を **Euler 角**という．これは $SO(3)$ 上の局所座標をなし，球面上の地理的座標に似ている．両極に特異性があり，1本の子午線上で多価である．

次の記号を導入しよう (図126)．

$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ は不動点 O における右手系の正規直交静止座標系の基底ベクトル，

e_1, e_2, e_3 は剛体に固定された右手系の動座標系における単位ベクトルで，その方向は剛体の O における慣性軸の方向である.

$I_1=I_2\neq I_3$ は点 O における剛体の慣性モーメントである.

e_N は《交線》$[e_z, e_3]$ の単位ベクトルである.（ベクトルはすべて《静止空間》k のものである.）

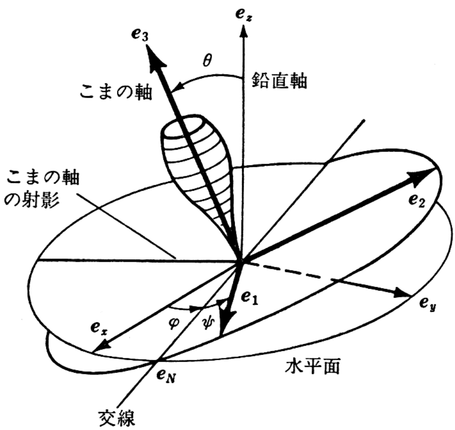


図126 Euler 角

静止枠 (e_x, e_y, e_z) を動枠 (e_1, e_2, e_3) へ移すためには，次の3つの回転を行う必要がある.

1) 軸 e_z のまわりの角 φ の回転. このとき，e_z は動かず，e_x は e_N へ移る.

2) 軸 e_N のまわりの角 θ の回転. このとき，e_z は e_3 へ移るが，e_N は動かない.

3) 軸 e_3 のまわりの角 ψ の回転. このとき，e_N は e_1 へ移るが，e_3 は動かない.

3つの回転を行うと，e_x は e_1 へ，e_z は e_3 へ，したがって，e_y は e_2 へ移る.

角 φ, θ, ψ を **Euler 角**という.

定理 3数の組 (φ, θ, ψ) のおのおのに，上の作り方で，3次元空間の回転 $R(\varphi, \theta, \psi)\in SO(3)$ が対応し，枠 (e_x, e_y, e_z) を枠 (e_1, e_2, e_3) へ移す. 領域

$$0<\varphi<2\pi, \quad 0<\theta<\pi, \quad 0<\psi<2\pi$$

上で，写像 $(\varphi, \theta, \psi)\to R(\varphi, \theta, \psi)$ はこまの配位空間 $SO(3)$ の局所座標を与え

る. ——

地球の経度と同様, φ と ψ は mod 2π の角であると考えてよい. $\theta=0$, $\theta=\pi$ では, 写像 $(\varphi, \theta, \psi)\to R$ は極の型の特異点をもつ.

B. Lagrange 関数の計算 Lagrange 関数を座標 φ, θ, ψ およびその微分で表わそう.

ポテンシャル・エネルギーは, 明らかに

$$U=\iiint zg\,dm=mgz_0=mgl\cos\theta$$

に等しい. ここで z_0 は重心の O からの高さである(図125).

運動エネルギーを計算しよう. ここで, 少し工夫する. $\varphi=\psi=0$ である**特殊な場合**を考えよう.

補題 $\varphi=\psi=0$ の時には, こまの角速度は Euler 角の微分によって, 次のように表わされる.

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1+(\dot{\varphi}\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_3.$$

証明 時刻 t のとき位置 $\boldsymbol{r}$ にあるこまの点の速度を考えよう. 時間 dt の後, この点は($(dt)^2$ の誤差で)次の位置にある.

$$R(\varphi+d\varphi, \theta+d\theta, \psi+d\psi)R^{-1}(\varphi, \theta, \psi)\boldsymbol{r}.$$

ここで, $d\varphi=\dot{\varphi}dt$, $d\theta=\dot{\theta}dt$, $d\psi=\dot{\psi}dt$ である.

したがって, 同程度の誤差で, 点の変位は次の3項の和となる.

$$R(\varphi+d\varphi, \theta, \psi)R^{-1}(\varphi, \theta, \psi)\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}=[\boldsymbol{\omega}_\varphi, \boldsymbol{r}]dt,$$
$$R(\varphi, \theta+d\theta, \psi)R^{-1}(\varphi, \theta, \psi)\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}=[\boldsymbol{\omega}_\theta, \boldsymbol{r}]dt,$$
$$R(\varphi, \theta, \psi+d\psi)R^{-1}(\varphi, \theta, \psi)\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}=[\boldsymbol{\omega}_\psi, \boldsymbol{r}]dt.$$

(角速度 $\boldsymbol{\omega}_\varphi, \boldsymbol{\omega}_\theta, \boldsymbol{\omega}_\psi$ はこれらの式で定義される.)

ゆえに, 点 $\boldsymbol{r}$ の速度は $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\omega}_\varphi+\boldsymbol{\omega}_\theta+\boldsymbol{\omega}_\psi, \boldsymbol{r}]$ である. つまり, 剛体の角速度は

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_\varphi+\boldsymbol{\omega}_\theta+\boldsymbol{\omega}_\psi$$

である. ここで各項は上式で定義される.

ベクトル $\boldsymbol{\omega}_\varphi, \boldsymbol{\omega}_\theta, \boldsymbol{\omega}_\psi$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で分解することが残っている. $\varphi=\psi=0$ は, まだ使っていない. $\varphi=\psi=0$ であれば,

$$R(\varphi+d\varphi, \theta, \psi)R^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$$

は単に軸 $\boldsymbol{e}_z$ のまわりの角 $d\varphi$ の回転であり, したがって,

$$\boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z$$

である．さらに，$R(\varphi, \theta+d\theta, \psi)R^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$ も，$\varphi=\psi=0$ の時には軸 $\boldsymbol{e}_N=\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_1$ のまわりの角 $d\theta$ の回転であり，したがって，

$$\boldsymbol{\omega}_\theta = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_1$$

である．

最後に，$R(\varphi, \theta, \psi+d\psi)R^{-1}(\varphi, \theta, \psi)$ は軸 $\boldsymbol{e}_3$ のまわりの角 $d\psi$ の回転であり，したがって，

$$\boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_3$$

である．結局，$\varphi=\psi=0$ のときには，

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z+\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1+\dot{\psi}\boldsymbol{e}_3$$

となる．ところで $\varphi=\psi=0$ のときには明らかに

$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta$$

である．こうして，慣性軸 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する角速度の成分は次のようになる．

$$\omega_1 = \dot{\theta}, \qquad \omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta, \qquad \omega_3 = \dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta. \qquad \blacksquare$$

$T=(I_1\omega_1{}^2+I_2\omega_2{}^2+I_3\omega_3{}^2)/2$ であるから，$\varphi=\psi=0$ の時の運動エネルギーは，

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2$$

で与えられる．一方，運動エネルギーは φ と ψ とには依存しない．なぜならば，これらは循環座標であり，T を変えないように φ と ψ の基準点を選べば，いつでも $\varphi=\psi=0$ とできるからである．

こうして，上の運動エネルギーの式は，すべての φ, ψ に対して正しい．

こうして，Lagrange 関数が得られた：

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-mgl\cos\theta.$$

C. 運動の研究　循環座標 φ, ψ には次の第1積分が対応する．

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = M_z = \dot{\varphi}(I_1\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta)+\dot{\psi}I_3\cos\theta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = M_3 = \dot{\varphi}I_3\cos\theta+\dot{\psi}I_3.$$

定理　こまの軸が鉛直線から傾く角 θ は次のエネルギー E' をもつ1次元系

と全く同様な時間変化をする.

$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta).$$

ここで，有効ポテンシャル・エネルギーは次式で与えられる.

$$U_{\text{eff}} = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta.$$

証明　一般論にならって，$\dot{\varphi}$ と $\dot{\psi}$ を M_3 と M_z とで表わそう．系の全エネルギーは次の形で得られる.

$$E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta + \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta},$$

そして，

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}.$$

θ に無関係な項 $M_3^2/2I_3 = E - E'$ は，θ の方程式には影響を与えない. ▮

上に得た1次元系を調べるためには，変換 $\cos\theta = u$ $(-1 \leq u \leq 1)$ を行うと便利である.

さらに，

$$\frac{M_z}{I_1} = a, \quad \frac{M_3}{I_1} = b, \quad \frac{2E'}{I_1} = \alpha, \quad \frac{2mgl}{I_1} = \beta > 0$$

とおくと，エネルギー E' の保存法則および方位角 φ の変化法則は，それぞれ次の形に書き直すことができる.

$$\dot{u}^2 = f(u), \qquad \text{ここで,}\ f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}.$$

$f(u)$ は3次多項式で $f(+\infty) = +\infty$ である．そして $a \neq \pm b$ であれば，$f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$ である．一方，実際の運動は或る $-1 \leq u \leq 1$ に対して，$f(u) \geq 0$ となるような定数 a, b, α, β にのみ対応する.

こうして，$f(u)$ は区間 $-1 \leq u \leq 1$ にちょうど2個の実根 u_1, u_2 をもつ(もう1つは，$u > 1$，図127).

したがって，こまの軸の傾き θ は2つの限界値 θ_1, θ_2 の間を周期的に変化する(図128).

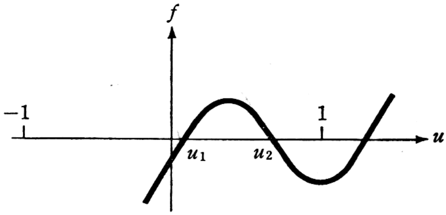


図 127 関数 $f(u)$ のグラフ

この傾きの周期的な変化を**章動**という.

さて, こまの軸の運動を方位角で考えて見る. 軸と単位球面との交点は, 2本の等緯線 θ_1, θ_2 の間の円環内を動く. このとき, 軸の方位角の変化は次の方程式によって定まる.

$$\dot{\varphi}=\frac{a-bu}{1-u^2}.$$

方程式 $a=bu$ の根 u' が, 区間 (u_1, u_2) の外にあれば, 角 φ は単調に変化し, 軸は単位球面上, 正弦曲線形の曲線を描く (図 128, a).

方程式 $a=bu$ の根 u' が, 区間 (u_1, u_2) の中にあれば, 角 φ の変化速度は等緯線 θ_1, θ_2 上で逆向きで, 軸は単位球面上にループ状の曲線を描く (図 128, b).

方程式 $a=bu$ の根 u' が境界上にあると (たとえば, $u'=u_2$), 軸は尖点をもつ曲線を描く (図 128, c).

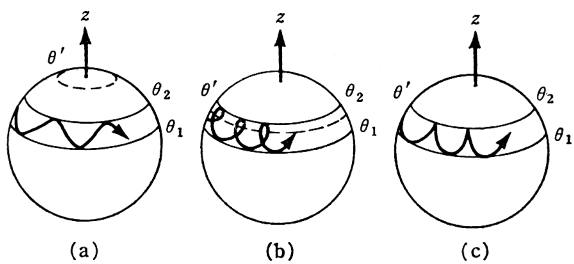


図 128 こまの軸の単位球面上の軌跡

この最後の場合は例外的ではあるが, θ_2 傾けて回転させたこまを初速度 0 で放すと必ず見られる. こまは初め倒れて行くが, やがて起き上がる.

こまの軸の方位角の運動を**歳差**という. 結局, こまの運動は固有軸のまわりの回転, 章動, 歳差からなる. この 3 つの運動はおのおの振動数をもつ. 振動

数が 2π と通約不能であれば，こまは決して初期状態へは戻らない，幾らでも近く接近するのではあるが….

§31　眠っているこまと速いこま

§30で得た式により，こまの運動方程式を解くことは，楕円積分の問題に帰着する．しかし運動の定性的結論は，普通，求積法によることなく簡単に得られる．

この節では，直立するこまの安定性を調べ，速く回転するこまに対して近似公式を与える．

A. 眠っているこま　まず，運動方程式の特殊解で，こまの軸が常に垂直であり $(\theta=0)$，角速度が一定であるもの《眠っているこま》を考えよう．このとき明らかに，$M_z=M_3=I_3\omega_3$ である（図129）．

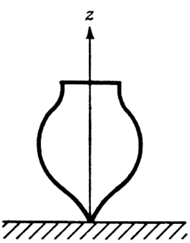


図129　眠っているこま

問　鉛直軸のまわりの定常回転は，常に Liapunov の意味で不安定である．これを示せ．——

さて，こま自体の運動ではなく，**こまの軸**の運動を考えよう．こまの軸は鉛直線の近くに安定してとどまるであろうか．つまり，角 θ は小さいままであろうか．系の有効ポテンシャル・エネルギー

$$U_{\text{eff}}=\frac{(M_z-M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+mgl\cos\theta$$

を，θ の巾級数に展開すると，次のようになる．

$$U_{\text{eff}}=\frac{I_3{}^2\omega_3{}^2\dfrac{\theta^4}{4}}{2I_1\theta^2}+\cdots-mgl\frac{\theta^2}{2}+\cdots=C+A\theta^2+\cdots,$$

$$A=\frac{\omega_3{}^2I_3{}^2}{8I_1}-\frac{mgl}{2}.$$

$A>0$ であれば1次元系の平衡点 $\theta=0$ は安定で，$A<0$ であれば不安定である．

こうして，**安定性の条件**は次のようになる．

$$\omega_3{}^2 > \frac{4mglI_1}{I_3{}^2}.$$

摩擦によって，眠っているこまの速度がこの限界を下回ると，こまは目覚める．

問 $\omega_3{}^2>4mglI_1/I_3{}^2$ のとき眠っているこまの軸は，θ だけでなく M_z, M_3 の値を変える摂動に関しても，安定であることを示せ．

B. 速いこま こまは，回転の運動エネルギーがポテンシャル・エネルギーに比べて遙かに大きいとき，**速い**という．つまり次のときである．

$$\frac{1}{2}I_3\omega_3{}^2 \gg mgl.$$

相似性の考え方から，明らかに，角速度が N 倍に増加することは，重さが $1/N^2$ に減少することと同値である．

定理 こまの初期位置を保ったまま角速度を N 倍すると，こまの軌跡はちょうど，角速度が変らず重力加速度 g が $1/N^2$ 倍になったものと同一である．もちろん，角速度の大きい方は軌跡を N 倍速く進行する*)．——

このようにして，$g\to 0$ の場合を調べ，その結果を $\omega\to\infty$ の場合に適用することができる．

まず，$g=0$，つまり重力がない場合に，対称なこまの運動を考えよう．この運動の，Lagrange による記述(§30, C 項)と Poinsot による記述(§29, C 項)とを比較しよう．

最初に，こまの軸の傾き θ の変動に対する Lagrange 方程式を考える．

補題 重力のない場合には，$M_z=M_3\cos\theta_0$ となる角 θ_0 は，こまの軸の運動方程式に対する安定な平衡点である．

この平衡点の近くで行われる θ の微小振動の振動数は，ω_{nut} に等しい．

$$\omega_{\mathrm{nut}} = \frac{I_3\omega_3}{I_1}.$$

証明 重力がなければ，有効ポテンシャル・エネルギーは，次のようになる．

---

*) 初期条件 $\xi\in TSO(3)$ と重力加速度 g とに対応する，時刻 t におけるこまの位置を $\varphi_g(t,\xi)$ で表わそう．定理は次のことを主張する．

$$\varphi_g(t, N\xi) = \varphi_{g/N^2}(Nt, \xi).$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}.$$

この非負関数は条件 $M_z = M_3\cos\theta_0$ から定まる角 θ_0 において，最小値0をとる(図130).

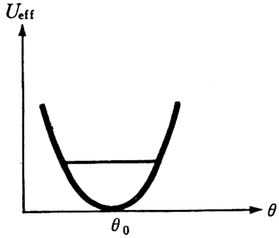


図130　こまの有効ポテンシャル・エネルギー

こうして，鉛直線に対するこまの軸の傾き θ_0 は，定常的で安定である．傾き θ の初期値が θ_0 から少しずれると，θ_0 の近くで θ の周期的な振動が起こる(章動)．これらの振動の振動数は公式により簡単に求まる．エネルギー

$$E = \frac{a\dot{x}^2}{2} + U(x), \qquad U(x_0) = \min U(x)$$

をもつ1次元系においては，微小振動の振動数は，次式で与えられる(§22, D項).

$$\omega^2 = \frac{U''(x_0)}{a}.$$

こまの軸の傾きの振動を記述する1次元系のエネルギーは，

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}$$

である．$\theta = \theta_0 + x$ とおくと，

$$M_z - M_3\cos\theta = M_3(\cos\theta_0 - \cos(\theta_0 + x)) = M_3 x\sin\theta_0 + O(x^2),$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{M_3{}^2 x^2 \sin^2\theta_0}{2I_1\sin^2\theta_0} + o(x^2) = \frac{I_3{}^2\omega_3{}^2}{2I_1}x^2 + \cdots$$

となり，これから章動の微小振動に対して，次の結果が得られる．

$$\omega_{\text{nut}} = \frac{I_3\omega_3}{I_1}.$$

∎

式 $\dot{\varphi} = (M_z - M_3\cos\theta)/(I_1\sin^2\theta)$ から分るように，$\theta = \theta_0$ のとき，こまの軸の方位角は時間変化しない，つまり軸は静止したままである．θ が θ_0 から少しずれた時の方位角の動きも，この式を使って調べられるが，ここでは別の取り扱いをしよう．

重力がないときのこまの運動は，Poinsot による運動とも考えられる．した

がって，こまの軸は角運動量ベクトルのまわりを等速回転するが，このベクトルは空間においてはその位置を変えない．

こうして，こまの軸は球面上に円周を描くが，その中心は角運動量ベクトルに対応する(図131)．

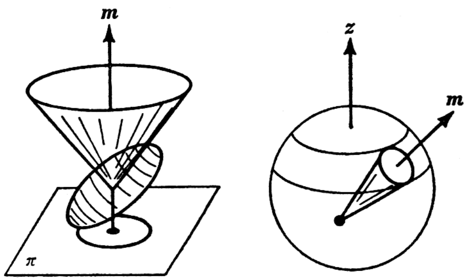


図131 Poinsot と Lagrange による
こまの運動の表わし方の比較

注意 こうして，Lagrange の表わし方では**章動**と呼ばれる，こまの軸の運動は，Poinsot の表わし方では**歳差**と呼ばれる．

もちろん，微小章動の振動数を与える公式: $\omega_{\rm nut}=I_3\omega_3/I_1$ は，Poinsot の運動における歳差の振動数を与える公式: $\omega=M/I_1$ と矛盾しない．したがって，章動の振幅が 0 に近づくとき $I_3\omega_3\to M$ となる．

C. 弱い場の中のこま 重力は存在するものの非常に弱い場合へ移ろう(M_z と M_3 の値は固定しておく)．このとき，有効ポテンシャル・エネルギーには，項 $mgl\cos\theta$ が付け加わる．この項はその導関数も小さい．この項が章動の振動数を少ししか変えないことを示そう．

補題 関数 $f(x)$ は $x=0$ で最小値 0 をとり，$x=0$ における Taylor 展開が $f(x)=Ax^2/2+\cdots$, $A>0$ であるとする．$x=0$ における関数 $h(x)$ の Taylor 展開を，$h(x)=B+Cx+\cdots$ とする．このとき，十分小さい ε に対して，関数 $f_\varepsilon(x)=f(x)+\varepsilon h(x)$ は 0 に近い点

$$x_\varepsilon=-\frac{C}{A}\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

において，最小値をとる(図132)．このとき，$f_\varepsilon''(x_\varepsilon)=A+O(\varepsilon)$ である．

証明 実際，$f_\varepsilon'(x)=Ax+C\varepsilon+O(x^2)+\varepsilon O(x)$ であるから，$f_\varepsilon'(x)$ に陰関数の定理を適用すれば，結果が得られる．∎

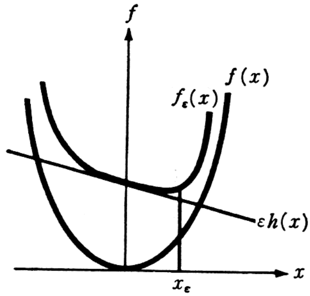


図132 関数を少し変化させたときの最小点の移動

この補題によって，g が小さければ有効ポテンシャル・エネルギーは θ_0 に近い最小点 θ_g をもち，$U''(\theta_g)$ と $U''(\theta_0)$ との差は極めて小さい．したがって，θ_0 のまわりの微小章動の振動数は，$g=0$ のときの値に近い．つまり，

$$\lim_{g\to 0}\omega_{\mathrm{nut}}=\frac{I_3}{I_1}\omega_3.$$

D. 速く回っているこま さて，鉛直線から θ_0 傾いた位置で，力を加えずに，こまの軸を手放すという特殊な初期条件を考えよう．

定理 最初の瞬間にこまの軸が静止していて$(\dot\varphi=\dot\theta=0)$，こまが鉛直線から θ_0 $(M_z=M_3\cos\theta_0)$ 傾いている軸のまわりを，速く$(\omega_3\gg 0)$回転しているならば $\omega_3\to\infty$ のとき，漸近的に

1) 章動の振動数は角速度に比例する；
2) 章動の振幅は角速度の2乗に反比例する；
3) 歳差の振動数は角速度に反比例する；
4) $(\omega_3\to\infty$ のとき$)$次の漸近公式が成り立つ，

$$\omega_{\mathrm{nut}}\sim\frac{I_3}{I_1}\omega_3,\qquad a_{\mathrm{nut}}\sim\frac{I_1mgl}{I_3{}^2\omega_3{}^2}\sin\theta_0,\qquad \omega_{\mathrm{pr}}\sim\frac{mgl}{I_3\omega_3}.$$

(ここで，$f(\omega_3)\sim g(\omega_3)$ とは $\lim_{\omega_3\to\infty}f/g=1$ となるときをいう.) ——

証明のために，角速度の初期値を固定して $g\to 0$ という場合を考える．ついで，結果の式を相似性によって解釈すれば(B 項を参照)，定理が得られる．

すでに§30, C 項で見たように，この初期条件のもとでは，こまの軸は球面上に尖点のある曲線を描く．

有効ポテンシャル・エネルギーの最小点 θ_g を求めるために，補題を使う．

$$\theta=\theta_0+x,\qquad \cos\theta=\cos\theta_0-x\sin\theta_0+\cdots$$

とおくと(図133)，先のように x による Taylor 展開が得られる．

$$U_{\rm eff}|_{g=0}=\frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1}x^2+\cdots,\qquad mgl\cos\theta=mgl\cos\theta_0-xmgl\sin\theta_0+\cdots.$$

$f=U_{\rm eff}|_{g=0}$, $g=\varepsilon$, $h=ml\cos(\theta_0+x)$ に補題を使えば，有効ポテンシャル・エネルギーの最小値は角 θ_g の傾きのところで与えられることが分る：

$$\theta_g=\theta_0+x_g,\qquad x_g=\frac{I_1ml\sin\theta_0}{I_3^2\omega_3^2}g+O(g^2).$$

こうして，こまの軸の傾き θ は θ_g の近くで振動する(図134)．

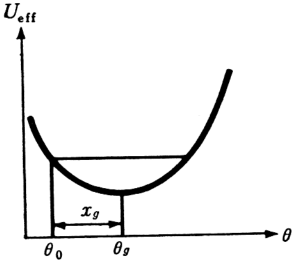


図133　章動の振幅

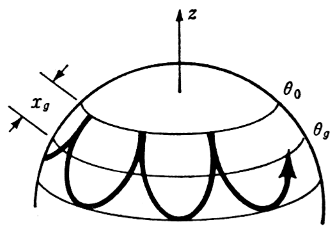


図134　こまの軸の運動

一方，最初は $\theta=\theta_0$, $\dot\theta=0$ である．つまり，θ_0 はこまの軸のもっとも高い位置に対応する．こうして，g が小さければ，章動の振幅は漸近的に次の式で与えられる．

$$a_{\rm nut}\sim x_g\sim\frac{I_1ml\sin\theta_0}{I_3^2\omega_3^2}g\qquad(g\to0).$$

さて，軸の歳差運動を求めよう．公式

$$\dot\varphi=\frac{M_z-M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}$$

により，$M_z=M_3\cos\theta_0$, $\theta=\theta_0+x$ のときには，$M_z-M_3\cos\theta=M_3x\sin\theta_0+\cdots$, したがって，

$$\dot\varphi=\frac{M_3}{I_1\sin\theta_0}x+\cdots$$

となる．一方，x は0から $2x_g$ まで ($O(g^2)$ の誤差で) 調和振動する．したがって，章動の1周期間における歳差の平均速度は，漸近的に

$$\bar{\dot\varphi}\sim\frac{M_3}{I_1\sin\theta_0}x_g\sim\frac{mgl}{I_3\omega_3}\qquad(g\to0)$$

に等しい．

問　$\displaystyle\lim_{g\to0}\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{tmgl/I_3\omega_3}=1$ を示せ．

第 III 部　Hamilton 力　学

Hamilton 力学——これは相空間の幾何学である．相空間はシンプレクティック多様体の構造をもつ．シンプレクティック多様体には，シンプレクティック微分同相の群が働く．Hamilton 力学の主要な概念と定理は（たとえシンプレクティックな局所座標の言葉で定義されているとしても），この群（さらに，時間をも変換する，より大きな群）に関して不変である．

Hamilton 力学系は，偶数次元多様体《相空間》とその上のシンプレクティック構造《Poincaré の積分不変式》と関数《Hamilton 関数》とによって表わされる．相空間のシンプレクティック微分同相で Hamilton 関数を保つ変換からなる 1-パラメーター群はいずれも運動方程式の第 1 積分と関連する．

Lagrange 力学は，特別な場合として Hamilton 力学に含まれる（このとき，相空間は配位空間の余接バンドルであり，Hamilton 関数は Lagrange 関数の Legendre 変換である）．

Hamilton の観点に立つと，他の方法では決して解けない多くの問題が徹底して調べられる（たとえば，2 つの固定中心による引力の問題，3 軸楕円体上の測地線の問題）．Hamilton の観点は，摂動論の近似的方法（天体力学）に対しても，複雑な力学系の運動の一般的特性を理解する（エルゴード理論，統計力学）のにも，また，数理物理学の他領域（光学，量子力学等）との関連においても，より大きい意味を持つ．

第 7 章　微 分 形 式

外微分形式は，曲線上で場のなす仕事，曲面を通過する流体の流れなどの概念を，高次元の場合に拡張するときに現われる．

Hamilton 力学は微分形式なしでは理解できない．われわれに必要な微分形式の知識は，外積，外微分，積分，Stokes の公式である．

§32 外形式

ここでは代数的な外形式を定義する.

A. 1-形式 $\mathbf{R}^n$ を n 次元実線形空間とする*). この空間のベクトルは $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \cdots$ と書くことにする.

定義 **1次形式**(または略して**1-形式**)とは, 線形関数 $\omega: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ をいう. つまり,

$$\omega(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2) = \lambda_1\omega(\boldsymbol{\xi}_1)+\lambda_2\omega(\boldsymbol{\xi}_2), \qquad \forall\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \ \ \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbf{R}^n.$$

線形代数で知られている1-形式の主な事柄を想い出して見よう. 1-形式全体は実線形空間となる. ここで, 1-形式の和は

$$(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{\xi}) = \omega_1(\boldsymbol{\xi})+\omega_2(\boldsymbol{\xi})$$

によって, 数との積は次式によって定義する.

$$(\lambda\omega)(\boldsymbol{\xi}) = \lambda\omega(\boldsymbol{\xi}).$$

$\mathbf{R}^n$ 上の1-形式の空間はそれ自身 n 次元であり, これを共役空間 $(\mathbf{R}^n)^*$ という.

$\mathbf{R}^n$ に線形座標系 $x_1, \cdots, x_n$ を選んだとする. 各座標, たとえば x_i 自身も1-形式である. これら n 個の1-形式は1次独立である. したがって, 各1-形式 ω は次の形で表わされる.

$$\omega = a_1x_1+\cdots+a_nx_n, \qquad a_i \in \mathbf{R}.$$

ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ に対する ω の値は

$$\omega(\boldsymbol{\xi}) = a_1x_1(\boldsymbol{\xi})+\cdots+a_nx_n(\boldsymbol{\xi})$$

に等しい. ここで, $x_1(\boldsymbol{\xi}), \cdots, x_n(\boldsymbol{\xi})$ はこの座標系によるベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の成分である.

例 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ に一様な力の場 $\boldsymbol{F}$ が与えられると, 変位 $\boldsymbol{\xi}$ に対する $\boldsymbol{F}$ の仕事 A は, $\boldsymbol{\xi}$ の1-形式である(図135).

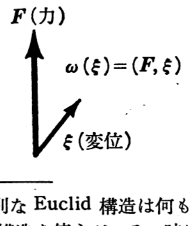


図135 力のなす仕事は変位に対する1-形式である

*) $\mathbf{R}^n$ には, 特別な Euclid 構造は何も固定されていないことを, とくに注意しておく. 幾つかの例では, 特別な構造を使うが, その時は《Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$》ととくに断わる.

B. 2-形式

定義　**2次外形式**(または略して**2-形式**)とは，ベクトルの組に対する関数 $\omega^2 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ で，双線形かつ歪対称であるものをいう．つまり

$$\omega^2(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \lambda_1\omega^2(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_3)+\lambda_2\omega^2(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3),$$

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = -\omega^2(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1), \qquad \forall\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \ \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3 \in \mathbf{R}^n.$$

例1　$S(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ は向きづけられた Euclid 平面 $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ が作る平行4辺形の，向きを考えた面積であるとする．すなわち，

$$S(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 &= \xi_{11}\boldsymbol{e}_1+\xi_{12}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{\xi}_2 &= \xi_{21}\boldsymbol{e}_1+\xi_{22}\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は $\mathbf{R}^2$ に向きを与える直交基底である．

$S(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ が2-形式であることを見るのは易しい(図136)．

例2　$\boldsymbol{v}$ を向きづけられた3次元 Euclid 空間における，流体の一様な速度場とする(図137)．このとき，平行4辺形 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ を通過する流体の流量は，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ の双線形歪対称関数，すなわち2-形式である．

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = (\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2]).$$

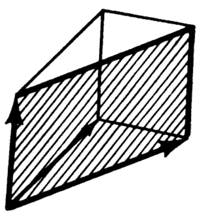


図136　向きを考えた面積は2-形式である

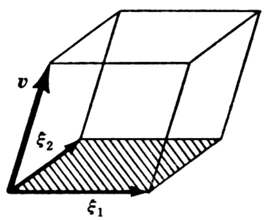


図137　面を通過する流体の流量は2-形式である

例3　Euclid $\mathbf{R}^3$ で辺 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ をもつ平行4辺形を，(x_1, x_2) 平面へ射影する．射影像の向きを考えた面積は2-形式である．

問1　$\mathbf{R}^n$ のすべての2-形式 ω^2 に対して，次のことを示せ．

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad \forall\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n.$$

［解］　歪対称性から，$\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = -\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$．——

$\mathbf{R}^n$ の2-形式全体は実線形空間となる．ただし，2-形式の和は

$$(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \omega_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)+\omega_2(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$$

によって，数との積は次式によって定義する．

$$(\lambda\omega)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \lambda\omega(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2).$$

問 2 この空間は有限次元であることを示し，その次元を求めよ．

［解］ $n(n-1)/2$；基底は後に示す．

C. k-形 式

定義 ***k* 次外形式**，または，***k*-形式**とは，k 個のベクトルに対する関数で，k-線形かつ歪対称であるものをいう．つまり

$$\omega(\lambda_1\xi_1'+\lambda_2\xi_1'', \xi_2, \cdots, \xi_n) = \lambda_1\omega(\xi_1', \xi_2, \cdots, \xi_n)+\lambda_2\omega(\xi_1'', \xi_2, \cdots, \xi_n),$$

$$\omega(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k}) = (-1)^{\nu}\omega(\xi_1, \cdots, \xi_n),$$

ここで，

$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{置換 } i_1, \cdots, i_k \text{ が偶置換であるとき}, \\ 1, & \text{置換 } i_1, \cdots, i_k \text{ が奇置換であるとき}. \end{cases}$$

例 1 向きづけられた Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ において，辺 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ をもつ平行多面体の，向きを考えた体積は n-形式である (図 138)．

$$V(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix},$$

ここで，$\xi_i=\xi_{i1}e_1+\cdots+\xi_{in}e_n$，$e_1, \cdots, e_n$ は $\mathbf{R}^n$ の直交基底である．

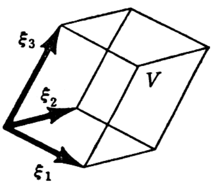


図 138 向きを考えた体積は 3-形式である

例 2 $\mathbf{R}^k$ を，n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の中の向きづけられた k 次元平面とする．辺 $\xi_1, \cdots, \xi_k \in \mathbf{R}^n$ をもつ平行多面体を $\mathbf{R}^k$ へ射影する．得られる多面体の向きを考えた k 次元体積は，$\mathbf{R}^n$ 上の k-形式である．——

$\mathbf{R}^n$ の k-形式全体は実線形空間となる．ただし，加法は

$$(\omega_1+\omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi)+\omega_2(\xi),$$

$$\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_k\}, \qquad \xi_i \in \mathbf{R}^n$$

として，また，数との積は，

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda\omega(\xi)$$

として入れる．

問 3 この線形空間は有限次元であることを示し，その次元を求めよ．

［解］ ${}_nC_k$; 基底は後に示す.

D. 2つの1-形式の外積　さて，外積というもう1つの演算を導入しよう. ω^k, ω^l が $\mathbf{R}^n$ 上の k-形式，l-形式であれば，外積 $\omega^k\wedge\omega^l$ は $k+l$-形式となる. まず，1-形式の外積を定義しよう．これは $\mathbf{R}^n$ 上の1組の1-形式 ω_1, ω_2 に，$\mathbf{R}^n$ 上の或る2-形式 $\omega_1\wedge\omega_2$ を対応させるものである.

$\boldsymbol{\xi}$ を $\mathbf{R}^n$ のベクトルとする．2つの1-形式 ω_1, ω_2 があれば，$\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$ に，座標 ω_1, ω_2 をもつ平面上の，成分が $\omega_1(\boldsymbol{\xi}), \omega_2(\boldsymbol{\xi})$ であるベクトル $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})$ を対応させると，$\mathbf{R}^n$ から平面 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ の上への写像が定義できる(図139).

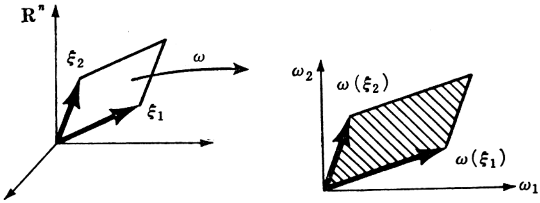


図139　2つの1-形式の外積

定義　ベクトルの組 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ に対する外積 $\omega_1\wedge\omega_2$ の値とは，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ を辺とする平行4辺形を (ω_1, ω_2) 平面へ写したときの，向きを考えた面積をいう．つまり

$$(\omega_1\wedge\omega_2)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)=\begin{vmatrix}\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \omega_2(\boldsymbol{\xi}_1)\\ \omega_1(\boldsymbol{\xi}_2) & \omega_2(\boldsymbol{\xi}_2)\end{vmatrix}.$$

問4　$\omega_1\wedge\omega_2$ は実際に2-形式であることを示せ.

問5　$(\omega_1, \omega_2)\to\omega_1\wedge\omega_2$ は双線形かつ歪対称であることを示せ:

$$(\lambda'\omega_1'+\lambda''\omega_1'')\wedge\omega_2=\lambda'\omega_1'\wedge\omega_2+\lambda''\omega_1''\wedge\omega_2,$$

$$\omega_1\wedge\omega_2=-\omega_2\wedge\omega_1.$$

［ヒント］ 行列式は行についても，列についても，双線形かつ歪対称である. ——

$\mathbf{R}^n$ に線形座標系を選んだとする．つまり独立な n 個の1-形式 $x_1, \cdots, x_n$ を与えたとする．これらを**基底形式**といおう.

基底形式の外積は2-形式 $x_i\wedge x_j$ である．歪対称性から $x_i\wedge x_i=0$, $x_i\wedge x_j=-x_j\wedge x_i$ である．形式 $x_i\wedge x_j$ の図形的な意味はきわめて簡単である．すなわち，まず平行4辺形 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ を (x_i, x_j) 平面へ残りの座標軸方向に平行に射影する．得られた平行4辺形の向きを考えた面積が，ベクトル $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ に対する値 $(x_i\wedge x_j)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ に等しい.

問6 ${}_nC_2=n(n-1)/2$ 個の形式 $x_i\wedge x_j$ $(i<j)$ は1次独立であることを示せ. ——

とくに3次元空間 (x_1, x_2, x_3) では, (x_1, x_2) 平面へ射影した面積は $x_1\wedge x_2$ で表わされ, (x_2, x_3) 平面, (x_3, x_1) 平面へ射影した面積は, それぞれ $x_2\wedge x_3$, $x_3\wedge x_1$ で表わされる.

問7 3次元空間 (x_1, x_2, x_3) の2-形式は次の形のもので尽きることを示せ.

$$Px_2\wedge x_3+Qx_3\wedge x_1+Rx_1\wedge x_2.$$

問8 $x_1, \cdots, x_n$ を座標とする n 次元空間では, 各2-形式は一意的に次の形に表わされることを示せ.

$$\omega^2=\sum_{i<j}a_{ij}x_i\wedge x_j.$$

[ヒント] $\boldsymbol{e}_i$ を i 番目の基底ベクトルとする. つまり, $x_i(\boldsymbol{e}_i)=1$, $x_j(\boldsymbol{e}_i)=0$, $j\neq i$. $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ の組に対して, ω^2 の値を考えると,

$$a_{ij}=\omega^2(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j).$$

E. 外単項式 さて, k 個の1-形式 $\omega_1, \cdots, \omega_k$ が与えられたとする. その外積 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k$ を定義しよう.

定義

$$(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)=\begin{vmatrix}\omega_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\xi}_1)\\ \vdots & & \vdots\\ \omega_1(\boldsymbol{\xi}_k) & \cdots & \omega_k(\boldsymbol{\xi}_k)\end{vmatrix}$$

とおく.

いいかえると, 1-形式の積が平行多面体 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ に対してとる値は, 写像 $\boldsymbol{\xi}\to(\omega_1(\boldsymbol{\xi}), \cdots, \omega_k(\boldsymbol{\xi}))$ によって, 向きづけられた座標 Euclid 空間 $\mathbf{R}^k$ へこの多面体を写したときの向きを考えた体積に等しい.

問9 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k$ は k-形式であることを示せ.

問10 1-形式の外積をとる演算は, 多重線形な歪対称写像

$$(\omega_1, \cdots, \omega_k)\longrightarrow\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k$$

を与えることを示せ. いいかえると,

$$(\lambda'\omega_1'+\lambda''\omega_1'')\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_k=\lambda'\omega_1'\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_k+\lambda''\omega_1''\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_k,$$

$$\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}=(-1)^{\nu}\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k,$$

ここで

$$\nu=\begin{cases}0, & \text{置換 } i_1, \cdots, i_k \text{ が偶置換であるとき},\\ 1, & \text{置換 } i_1, \cdots, i_k \text{ が奇置換であるとき}.\end{cases}$$

——

さて，$\mathbf{R}^n$ において基底形式 $x_1, \cdots, x_n$ による座標系を考えよう．k 個の基底形式の外積

$$x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}, \qquad 1 \leq i_m \leq n$$

は，k 次元平行多面体を k 次元平面 $(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$ へ残りの座標軸に平行に射影したときの，向きを考えた体積である．

問 11 添数 $i_1, \cdots, i_k$ の内に同じものがあれば，形式 $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$ は 0 に等しいことを示せ．

問 12 次の形式は 1 次独立であることを示せ．

$$x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}, \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n.$$

このような形式の数は，明らかに ${}_n\mathrm{C}_k$ である．これらを**基底 k-形式**ということにする．

問 13 $\mathbf{R}^n$ の k-形式は，一意的に基底形式の 1 次結合として表わされることを示せ．

$$\omega^k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \cdots i_k} x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}.$$

［ヒント］ $a_{i_1 \cdots i_k} = \omega^k(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$.

この問によって，$\mathbf{R}^n$ の k-形式が作る線形空間の次元は ${}_n\mathrm{C}_k$ に等しい．とくに $k=n$ のときは ${}_n\mathrm{C}_k = 1$ であるから次の系が得られる．

系 $\mathbf{R}^n$ の n-形式は，適当に単位体積を選んだ時の，平行多面体の向きを考えた体積であるか，または 0 である．つまり

$$\omega^n = a \cdot x_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

問 14 $k > n$ に対して，$\mathbf{R}^n$ の k-形式はすべて 0 に等しいことを示せ．——

さて，k-形式 ω^k と l-形式 ω^l の積の問題に移ろう．まず，2 つの単項式

$$\omega^k = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k, \qquad \omega^l = \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l}$$

が与えられたとする．ここで，$\omega_1, \cdots, \omega_{k+l}$ は 1-形式である．その積 $\omega^k \wedge \omega^l$ を次の単項式として定義する．

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) \wedge (\omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l})$$
$$= \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k+l}.$$

問 15 単項式の積は結合的である：

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m).$$

さらに，歪可換である：

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k.$$

これらのことを示せ．

［ヒント］ ω^l の l 個の因子のおのおのを前へ出すには，ω^k の k 個の因子と，1 つず

つ k 回入れかえる必要がある.

注意 次数 k, l が1つでも偶数であれば, 歪可換性は可換性を意味し, 次数 k, l 共に奇数であれば, 反可換性を意味すると覚えればよい.

§33 外 積

ここでは, 形式に対して外積演算を定義し, それが歪可換であること, 分配的, 結合的であることを示す.

A. 外積の定義 さて, 任意の k-形式 ω^k と任意の l-形式 ω^l の外積を定義しよう. 外積 $\omega^k \wedge \omega^l$ は $k+l$-形式である. 外積演算は次の性質をもつことが分る.

1) 歪可換性: $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl}\omega^l \wedge \omega^k$,

2) 分配性: $(\lambda_1\omega_1{}^k + \lambda_2\omega_2{}^k) \wedge \omega^l = \lambda_1\omega_1{}^k \wedge \omega^l + \lambda_2\omega_2{}^k \wedge \omega^l$,

3) 結合性: $(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$.

定義 $\mathbf{R}^n$ の k-形式 ω^k と $\mathbf{R}^n$ の l-形式 ω^l の外積 $\omega^k \wedge \omega^l$ は, $\mathbf{R}^n$ の $k+l$-形式で, $k+l$ 個のベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_k, \xi_{k+1}, \cdots, \xi_{k+l} \in \mathbf{R}^n$ に対する値は, 次式で与えられる.

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \cdots, \xi_{k+l}) = \sum (-1)^\nu \omega^k(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k})\,\omega^l(\xi_{j_1}, \cdots, \xi_{j_l}). \qquad (1)$$

ここで, $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_l$ は, $(i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l)$ が $(1, 2, \cdots, k+l)$ の置換である. また,

$$\nu = \begin{cases} 1, & \text{この置換が奇置換であるとき,} \\ 0, & \text{この置換が偶置換であるとき.} \end{cases}$$

いいかえると, $k+l$ 個のベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_{k+l}$ を2つに(k 個と l 個に)分けると, これが和(1)の1つの項を与える. この項は前の k 個のベクトルに対する k-形式 ω^k の値と, 後の l 個のベクトルに対する l-形式 ω^l の値の積に等しく, 符号はベクトルがどう並ぶかによる. まず k 個のベクトルを, 次いで l 個のベクトルを並べたとき, これがベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_{k+l}$ の偶置換を作れば符号は + で, 奇置換を作れば符号は − である.

例 $k=l=1$ であれば, 分け方は全部で2つである: ξ_1, ξ_2 と ξ_2, ξ_1. したがって

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\,\omega_2(\xi_2) - \omega_1(\xi_2)\,\omega_2(\xi_1)$$

となり，§32 の 1-形式の積の定義と一致する．

問 1　上の定義が，実際に，或る $k+l$-形式を定めること（つまり，$(\omega^k\wedge\omega^l)(\xi_1, \cdots, \xi_{k+l})$ がベクトル ξ に関して，多重線形，歪対称であること）を示せ．

B. 外積の性質

定理　上に定義した形式の外積は歪可換であり，分配的，結合的である．単項式に対しては，これは§32 で定義した積と一致する．——

歪可換性の証明は，偶，奇置換の簡単な性質に基づくから，読者にまかせる．

分配的であることは，定義(1)の各項が ω^k と ω^l について線形であることから分る．

結合性の証明には，組み合せ論的なことが幾分必要である．対応する議論は，代数の教程で行列式をその小行列式で展開する Laplace の定理を証明するときにすでに行われているから，この定理を使うことができる*)．

次の**注意**から始めよう．結合性が各項について示されれば，和についても正しい．つまり，

$$\left.\begin{aligned}(\omega_1'\wedge\omega_2)\wedge\omega_3&=\omega_1'\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)\\(\omega_1''\wedge\omega_2)\wedge\omega_3&=\omega_1''\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$((\omega_1'+\omega_1'')\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=(\omega_1'+\omega_1'')\wedge(\omega_2\wedge\omega_3).$$

なぜなら，すでに証明した分配性によって，次のようになるからである．

$$((\omega_1'+\omega_1'')\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=(\omega_1'\wedge\omega_2)\wedge\omega_3+(\omega_1''\wedge\omega_2)\wedge\omega_3,$$

$$(\omega_1'+\omega_1'')\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)=\omega_1'\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)+\omega_1''\wedge(\omega_2\wedge\omega_3).$$

ところで，§32，問 12 から分るように，$\mathbf{R}^n$ の形式はすべて単項式の和である．したがって，単項式の積の結合性を示せばよい．

§32 における k 個の 1-形式の積の定義と，一般の定義(1)とが同値であることを示すまでは，k 個の 1-形式の積を，当分，記号 $\bar{\wedge}$ で表わすことにする．したがって，単項式は

---

*)　結合性の直接的な証明は（それは Laplace の定理の証明をも含むが），次の等式で符号が一致することを見るわけである．

$$((\omega^k\wedge\omega^l)\wedge\omega^m)(\xi_1, \cdots, \xi_{k+l+m})$$
$$=\sum\pm\omega^k(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k})\omega^l(\xi_{j_1}, \cdots, \xi_{j_l})\omega^m(\xi_{h_1}, \cdots, \xi_{h_m}).$$

ここで，$i_1<\cdots<i_k$，$j_1<\cdots<j_l$，$h_1<\cdots<h_m$ は，$(i_1, \cdots, j_1, \cdots, h_m)$ が $(1, \cdots, k+l+m)$ の置換である．

$$\omega^k = \omega_1 \barwedge \cdots \barwedge \omega_k, \qquad \omega^l = \omega_{k+1} \barwedge \cdots \barwedge \omega_{k+l}$$

で表わされる．ここで，$\omega_1, \cdots, \omega_{k+l}$ は 1-形式である．

補題　2つの単項式の外積は単項式である．つまり

$$(\omega_1 \barwedge \cdots \barwedge \omega_k) \wedge (\omega_{k+1} \barwedge \cdots \barwedge \omega_{k+l})$$
$$= \omega_1 \barwedge \cdots \barwedge \omega_k \barwedge \omega_{k+1} \barwedge \cdots \barwedge \omega_{k+l}.$$

証明　$k+l$ 個のベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_{k+l}$ に対して，両辺の値を計算しよう．右辺の値は $k+l$ 次の行列式 $\det|\omega_i(\xi_j)|$ に等しい．左辺の値は(1)により，次の和に等しい．

$$\sum \pm \det_{1 \le i \le k} |\omega_i(\xi_{i_m})| \cdot \det_{k < i \le k+l} |\omega_i(\xi_{j_m})|.$$

各項は $k+l$ 次行列式の最初の k 行の小行列式と，その余因子行列式の積である．最初の k 行の小行列式で展開する Laplace の定理は，正に定義(1)と同じ符号の選び方で，この和が行列式 $\det|\omega_i(\xi_j)|$ に等しいことをいう．∎

補題によって，演算 $\barwedge$ と $\wedge$ とは一致することが分る．実際，繰り返して行けば次のようになる．

$$\omega_1 \barwedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2,$$
$$\omega_1 \barwedge \omega_2 \barwedge \omega_3 = (\omega_1 \barwedge \omega_2) \wedge \omega_3 = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3,$$
$$\omega_1 \barwedge \cdots \barwedge \omega_k = (\cdots((\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3) \wedge \cdots) \wedge \omega_k.$$

k 個の 1-形式の $\barwedge$-積は明らかに結合的であるから，単項式の $\wedge$-積もまた結合的である．こうして，先の注意によって，一般の場合にも結合性が示された．

問 2　1-形式，一般には奇数次形式の2乗は0に等しいこと，つまり，k が奇数ならば $\omega^k \wedge \omega^k = 0$ であることを示せ．

例 1　$\mathbf{R}^{2n}$ において，座標系 $p_1, \cdots, p_n,\ q_1, \cdots, q_n$ と 2-形式

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i$$

を考えよう．

(幾何学的には，2-形式 ω^2 は平行4辺形を n 個の2次元座標平面 $(p_1, q_1), \cdots, (p_n, q_n)$ へ射影したときの，向きを考えた面積の和を意味する．後に見るように，2-形式 ω^2 は Hamilton 力学に対して基本的な意味をもつ．$\mathbf{R}^{2n}$ の非退化*) 2-形式 ω^2 はすべて，或る座標系 $(p_1, \cdots, q_n)$ において，この ω^2 の形であることが示せる.)

---

*)　双線形形式 ω^2 は，$\forall \xi \neq 0,\ \exists \eta \neq 0$: $\omega^2(\xi, \eta) \neq 0$ のとき非退化であるという．

問 3　2-形式 ω^2 の 2 乗を求めよ.

［解］
$$\omega^2\wedge\omega^2=-2\sum_{i>j}p_i\wedge p_j\wedge q_i\wedge q_j.$$

問 4　ω^2 の k 乗を求めよ.

［解］
$$\underbrace{\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^2}_{k}=\pm k!\sum_{i_1<\cdots<i_k}p_{i_1}\wedge\cdots\wedge p_{i_k}\wedge q_{i_1}\wedge\cdots\wedge q_{i_k}.$$

とくに,
$$\underbrace{\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^2}_{n}=\pm n!p_1\wedge\cdots\wedge p_n\wedge q_1\wedge\cdots\wedge q_n,$$
これは乗数を除いて, $\mathbf{R}^{2n}$ の $2n$ 次元平行多面体の体積である.

例 2　向きづけられた Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ を考えよう. 各ベクトル $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^3$ に 1-形式 $\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}$
$$\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi})=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi})\qquad(\text{スカラー積}),$$
および, 2-形式 $\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$
$$\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{A},[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2])\qquad(\text{混合積})$$
を対応させよう.

問 5　写像 $\boldsymbol{A}\to\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}$ と $\boldsymbol{A}\to\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$ とは, それぞれ線形空間 $\mathbf{R}^3$ と $\mathbf{R}^3$ 上の 1-形式, 2-形式の作る線形空間との同型を与える. これを示せ. $\mathbf{R}^3$ に向きを定める正規直交座標系 (x_1,x_2,x_3) を選ぶと, 上の対応は次のようになる.
$$\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}=A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3,\qquad \omega^2{}_{\boldsymbol{A}}=A_1x_2\wedge x_3+A_2x_3\wedge x_1+A_3x_1\wedge x_2.$$

注意　こうして, この同型は向きを与える正規直交座標系 (x_1,x_2,x_3) のとり方にはよらない. しかし $\mathbf{R}^3$ の Euclid 構造のとり方には依存する. 同型 $\boldsymbol{A}\to\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$ は向きづけにも依存する(これは混合積の定義に入っている).

問 6　上の同型対応によって, 1-形式の外積は $\mathbf{R}^3$ のベクトル積になることを示せ. つまり,
$$\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1{}_{\boldsymbol{B}}=\omega^2{}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]},\qquad\forall\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^3.$$

このように, <u>形式の外積は $\mathbf{R}^3$ におけるベクトル積を高次元の場合へ移したものと考えられる</u>. ただ, 高次元の場合には, 積はもはやその空間のベクトルではない. $\mathbf{R}^n$ の 2-形式の空間が $\mathbf{R}^n$ に同型となるのは, $n=3$ のときだけである.

問 7　上の同型対応によると, 1-形式と 2-形式の外積は $\mathbf{R}^3$ のスカラー積になることを示せ. つまり,
$$\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2{}_{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\,x_1\wedge x_2\wedge x_3.$$

C. 写像による移り方　$f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ を線形写像, ω^k を $\mathbf{R}^n$ 上の k 次外形式とする. このとき $\mathbf{R}^m$ 上に k-形式 $f^*\omega^k$ が生じる. ベクトル $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k\in\mathbf{R}^m$ に対する値は, 像 $f\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,f\boldsymbol{\xi}_k$ に対する ω^k の値に等しい:
$$(f^*\omega^k)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\omega^k(f\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,f\boldsymbol{\xi}_k).$$

問 8　$f^*\omega^k$ は外形式であることを示せ.

問 9　f^* は $\mathbf{R}^n$ 上の k-形式の空間から，$\mathbf{R}^m$ 上の k-形式の空間への線形写像であることを示せ(右肩の＊印は，f^* が f とは**反対の**方向に働くことを示す)．

問 10　$f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$，$g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$ とする．$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$ を確かめよ．

問 11　f^* は外積を保つことを確かめよ：

$$f^*(\omega^k\wedge\omega^l)=(f^*\omega^k)\wedge(f^*\omega^l).$$

§34　微分形式

ここでは微分可能多様体上の微分形式の定義を与える．

A. 1次微分形式　微分形式のもっとも簡単な例は関数の微分である．

例　関数 $y=f(x)=x^2$ を考えよう．微分 $df=2xdx$ は，点 x と，《変数の増分》つまり x 軸への接ベクトル ξ とに関係する．いま点 x をとめておく．このとき，x における微分 df_x は ξ について線形である．よって，$x=1$ では，接ベクトル ξ の座標が 1 であると $df=2$ となる．ξ の座標が 10 であると $df=20$ となる(図 140)．

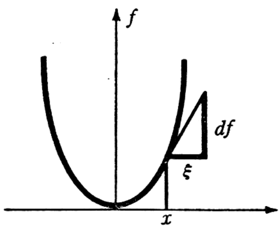


図 140　関数の微分

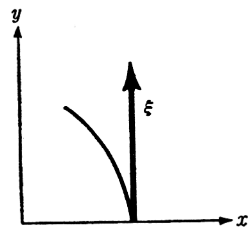


図 141　問 1 のために

$f:M\to\mathbf{R}$ を多様体 M 上に与えられた微分可能な関数とする(《多変数関数》$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ と思ってもよい)．点 $\boldsymbol{x}$ における関数 f の微分 $df_{\boldsymbol{x}}$ は，点 $\boldsymbol{x}$ における M の接空間から実数直線への線形写像である：

$$df_{\boldsymbol{x}}:TM_{\boldsymbol{x}}\longrightarrow\mathbf{R}.$$

この写像の定義を思い起そう．$\xi\in TM_{\boldsymbol{x}}$ を曲線 $\boldsymbol{x}(t):\mathbf{R}\to M$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}$ の速度ベクトルとする．つまり $\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\xi$．このとき定義によれば，

$$df_{\boldsymbol{x}}(\xi)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f(\boldsymbol{x}(t)).$$

問 1　ξ を平面曲線 $x(t)=\cos t$，$y(t)=\sin t$ の $t=0$ での速度ベクトルとする．関数 x,y の微分 dx,dy がベクトル ξ に対してとる値を計算せよ(図 141)．

［解］　$$dx_{(1,0)}(\xi)=0,\qquad dy_{(1,0)}(\xi)=1.$$ ――

点 $x \in M$ における関数 f の微分は，接空間 TM_x 上の 1-形式 df_x である．

多様体 M 上の関数 f の微分 df は，接バンドル TM から数直線への滑らかな写像である：

$$df: TM \longrightarrow \mathbf{R} \qquad \left(TM = \bigcup_x TM_x\right).$$

この写像は各接空間 $TM_x \subset TM$ 上では線形であり，それゆえに微分可能である．

定義 **多様体 M 上の 1 次微分形式**(または **1-形式**)とは，多様体 M の接バンドルから数直線への滑らかな写像

$$\omega: TM \longrightarrow \mathbf{R}$$

で，各接空間 TM_x 上線形なものをいう．

つまり，M 上の 1 次微分形式は，《x について微分可能》な TM_x 上の代数的な 1-形式である，といえる．

問 2 直線上の 1 次微分形式は，すべて或る微分可能な関数の微分であることを示せ．

問 3 円周および平面上で関数の微分とはなり得ない 1 次微分形式を求めよ．

B. $\mathbf{R}^n$ 上の 1 次微分形式の一般形 多様体 M として，座標 $x_1, \cdots, x_n$ をもつ線形空間を考えよう．接ベクトル $\boldsymbol{\xi} \in T\mathbf{R}^n{}_x$ の成分 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ とは，座標の微分 $dx_1, \cdots, dx_n$ がベクトル $\boldsymbol{\xi}$ でとる値のことであった．$T\mathbf{R}^n{}_x$ 上のこの n 個の 1-形式は 1 次独立である．こうして，1-形式 $dx_1, \cdots, dx_n$ は，$T\mathbf{R}^n{}_x$ 上の 1-形式が作る n 次元空間の基底を作る．

したがって，$T\mathbf{R}^n{}_x$ 上の 1-形式はすべて一意的に，$a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$ の形に書ける．ここで a_i は実係数である．

さて，ω を $\mathbf{R}^n$ 上の任意の 1-形式とする．各点 x で ω は基底 $dx_1, \cdots, dx_n$ により一意的に分解される．これから，次の定理が導かれる．

定理 空間 $\mathbf{R}^n$ に座標 $x_1, \cdots, x_n$ をとれば，1 次微分形式はすべて一意的に，次の形に書き表わされる．

$$\omega = a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n.$$

ここで，$a_i(x)$ は滑らかな関数である．

問 4 ベクトル $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ に対して，形式 $\omega_1 = dx_1$, $\omega_2 = x_1dx_2$, $\omega_3 = dr^2$ ($r^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2$) の値を計算せよ (図 142).

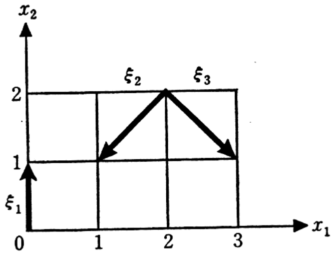


図142　問4のために

[解]

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ω_1	0	-1	1
ω_2	0	-2	-2
ω_3	0	-8	0

問5　$x_1, \cdots, x_n$ は多様体 M 上の関数で，或る近傍において局所座標系をなすとする．この領域における1-形式は，すべて $\omega = a_1(x)\,dx_1 + \cdots + a_n(x)\,dx_n$ の形に一意的に書き表わされることを示せ．

C. k 次微分形式

定義　多様体 M の点 $\boldsymbol{x}$ における k 次微分形式 $\omega^k{}_{\boldsymbol{x}}$ とは，点 $\boldsymbol{x}$ の接空間 TM_x 上の k 次外形式，つまり，$\boldsymbol{x}$ において M に接する k 個のベクトル $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ に関して，k-線形かつ歪対称な関数をいう．——

このような関数が多様体 M の各点 $\boldsymbol{x}$ で与えられ，$\boldsymbol{x}$ について微分可能であれば，**多様体 M 上の k-形式 ω^k** が与えられたという．

問6　或る点 $\boldsymbol{x}$ で M に接する k 個のベクトルの組からなる集合に，自然な微分可能多様体の構造を入れよ．——

k 次微分形式は，問6の多様体から数直線への滑らかな写像である．

M 上の k-形式は，《$\boldsymbol{x}$ について微分可能》な TM_x 上の k 次外形式である，

ということができる．

M 上の形式に対して，加法，数との積，外積は，各点ごとに定義される．接空間 TM_x 上の対応する代数的外形式を，各点 $\boldsymbol{x}$ で加えたり，数を掛けたり，外積をとったりすればよい．

問7　M 上の k-形式全体は，線形空間(k が M の次元以下ならば，無限次元の)を作ることを示せ．——

微分形式には，数だけでなく，関数も掛けることができる．こうして，k 次

C^∞-微分形式全体は，M 上無限回微分可能な関数の作る環の上の加群の自然な構造をもつ.

D. $\mathbf{R}^n$ 上の k 次微分形式の一般形　多様体 M として，座標関数 $x_1, \cdots, x_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を固定した線形空間 $\mathbf{R}^n$ を考えよう．点 $\boldsymbol{x}$ を固定する．上に見たように，n 個の 1-形式 $dx_1, \cdots, dx_n$ は接空間 $T\mathbf{R}^n{}_x$ 上の 1-形式の空間で基底をなす.

基底形式の外積

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \qquad i_1 < \cdots < i_k$$

を考えよう．§32 で見たように，この ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の k-形式が，$T\mathbf{R}^n{}_x$ 上の k 次外形式の空間の基底を作る．したがって，$T\mathbf{R}^n{}_x$ 上の k 次外形式は，一意的に次の形に表わされる.

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

さて，ω^k を空間 $\mathbf{R}^n$ 上の任意の k 次微分形式とする．ω^k は各点 $\boldsymbol{x}$ で，この基底によって一意的に分解される．これから次の定理が導かれる.

定理　$\mathbf{R}^n$ 上の k 次微分形式は座標系 $x_1, \cdots, x_n$ をとると，一意的に次の形に書き表わされる.

$$\omega^k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

ここで，$a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})$ は $\mathbf{R}^n$ 上の滑らかな関数である.

問 8　形式 $\omega_1 = dx_1 \wedge dx_2$，$\omega_2 = x_1 dx_1 \wedge dx_2 - x_2 dx_2 \wedge dx_1$，$\omega_3 = r dr \wedge d\varphi$ $(x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi)$ の値を，ベクトルの組 (ξ_1, η_1)，(ξ_2, η_2)，(ξ_3, η_3) に対して計算せよ.

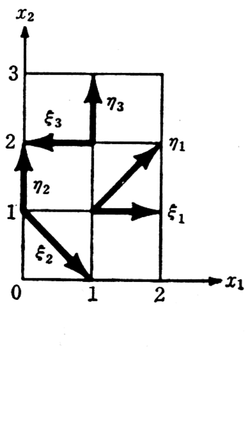


図143　問8のために

［解］

	(ξ_1,η_1)	(ξ_2,η_2)	(ξ_3,η_3)
ω_1	1	1	−1
ω_2	2	1	−3
ω_3	1	1	−1

問 9　形式 $\omega_1=dx_2\wedge dx_3$，$\omega_2=x_1dx_3\wedge dx_2$，$\omega_3=dx_3\wedge dr^2$，$r^2=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2$ の値を，点 $\boldsymbol{x}=(2,0,0)$ にあるベクトル $\boldsymbol{\xi}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\eta}=(1,2,3)$ の組に対して計算せよ．

［解］　$\omega_1=1,\quad \omega_2=-2,\quad \omega_3=-8.$

問 10　$x_1,\cdots,x_n:M\to\mathbf{R}$ は多様体上の関数で，或る領域の局所座標系をなすとする．この領域上の微分形式は一意的に次の形に表わされることを示せ．

$$\omega^k=\sum_{i_1<\cdots<i_k}a_{i_1\cdots i_k}(x)\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

例　形式に対する変数変換　$\mathbf{R}^3$ に2つの座標系 x_1,x_2,x_3 と y_1,y_2,y_3 があるとする．ω を $\mathbf{R}^3$ 上の2-形式とする．このとき，上の定理によって，ω は x 座標系では

$$\omega=X_1dx_2\wedge dx_3+X_2dx_3\wedge dx_1+X_3dx_1\wedge dx_2$$

と書き表わせる．X_1,X_2,X_3 は x_1,x_2,x_3 の関数である．また，y 座標系でも，

$$\omega=Y_1dy_2\wedge dy_3+Y_2dy_3\wedge dy_1+Y_3dy_1\wedge dy_2$$

と表わせて，Y_1,Y_2,Y_3 は y_1,y_2,y_3 の関数である．

問 11　x 座標における形式の形(つまり X_i)と変数変換 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$ とを知って，y 座標における形，つまり Y_j を求めよ．

［解］　$dx_i=(\partial x_i/\partial y_1)dy_1+(\partial x_i/\partial y_2)dy_2+(\partial x_i/\partial y_3)dy_3$ であるから，

$$dx_2\wedge dx_3=\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial x_2}{\partial y_2}dy_2+\frac{\partial x_2}{\partial y_3}dy_3\right)\wedge\left(\frac{\partial x_3}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial x_3}{\partial y_2}dy_2+\frac{\partial x_3}{\partial y_3}dy_3\right)$$

となる．これから，たとえば Y_3 は次のようになる．

$$Y_3=X_1\left|\frac{D(x_2,x_3)}{D(y_1,y_2)}\right|+X_2\left|\frac{D(x_3,x_1)}{D(y_1,y_2)}\right|+X_3\left|\frac{D(x_1,x_2)}{D(y_1,y_2)}\right|.$$

E.　補遺　3次元空間における微分形式　M を向きづけられた3次元 Riemann 多様体とする(以下の例では，すべて，M は3次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ である)．x_1,x_2,x_3 を局所座標系とし，線素の2乗が次の形であるとする．

$$ds^2=E_1dx_1{}^2+E_2dx_2{}^2+E_3dx_3{}^2.$$

(つまり，座標系は直交系である．)

問 12 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ において，Descartes 座標 x, y, z，円筒座標 r, φ, z，球面座標 R, φ, θ に対して E_1, E_2, E_3 を求めよ (図 144).

［解］
$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2$$
$$= dR^2+R^2\cos^2\theta\, d\varphi^2+R^2d\theta^2.$$ ——

座標方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と表わそう．この3個のベクトルは接空間の基底となる．

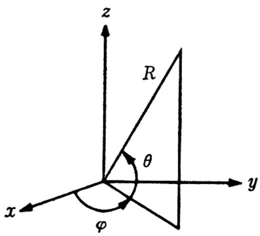


図 144 問 12 のために

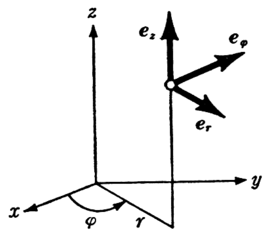


図 145 問 13 のために

問 13 形式 dx_1, dx_2, dx_3 の値をベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に対して求めよ．

［解］ $dx_i(\boldsymbol{e}_i)=1/\sqrt{E_i}$ であり，他は 0 である．

とくに Descartes 座標系では $dx(\boldsymbol{e}_x)=dy(\boldsymbol{e}_y)=dz(\boldsymbol{e}_z)=1$，円筒座標系では $dr(\boldsymbol{e}_r)=dz(\boldsymbol{e}_z)=1$，$d\varphi(\boldsymbol{e}_\varphi)=1/r$ (図 145)，球面座標系では $dR(\boldsymbol{e}_R)=1$，$d\varphi(\boldsymbol{e}_\varphi)=1/(R\cos\theta)$，$d\theta(\boldsymbol{e}_\theta)=1/R$. ——

多様体 M の計量と向きづけは，M の各点の接空間に，向きづけられた3次元 Euclid 空間の構造を与える．この構造の意味で，スカラー積，ベクトル積，混合積を語ることにする．

問 14 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$，$(\boldsymbol{e}_R, \boldsymbol{e}_\theta)$，$(\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ を計算せよ．

［解］ $\boldsymbol{e}_3, 0, 1$. ——

向きづけられた3次元 Euclid 空間では各ベクトル $\boldsymbol{A}$ に，次のようにして，1-形式 $\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}$ と 2-形式 $\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$ とが対応する．

$$\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\xi}), \qquad \omega^2{}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \qquad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^3.$$

ベクトル場と形式の対応は，座標系にはよらず，Euclid 構造と向きづけにのみに依存する．よって，多様体 M 上の各ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に M 上の1次微分形式 $\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}$ と2次微分形式 $\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$ とが対応する．

場から形式への変換式およびその逆は，座標系ごとに形が異なる．上の座標 x_1, x_2, x_3 で，ベクトル場が次の形をしているとする．

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3,$$

(成分 A_i は多様体 M 上の滑らかな関数である). 対応する1-形式 $\omega^1{}_A$ は基底 dx_i により, また2-形式 $\omega^2{}_A$ は基底 $dx_i \wedge dx_j$ により分解される.

問 15 ベクトル場 A の成分を知って, 1-形式 $\omega^1{}_A$ と2-形式 $\omega^2{}_A$ の分解を求めよ.

［解］ $\omega^1{}_A(e_1) = (A, e_1) = A_1$ である. 一方, $(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3)(e_1) = a_1 dx_1(e_1) = a_1/\sqrt{E_1}$. これから, $a_1 = A_1\sqrt{E_1}$, したがって,

$$\omega^1{}_A = A_1\sqrt{E_1}\,dx_1 + A_2\sqrt{E_2}\,dx_2 + A_3\sqrt{E_3}\,dx_3.$$

まったく同様にして, $\omega^2{}_A(e_2, e_3) = (A, e_2, e_3) = A_1$ である. 一方

$$(\alpha_1 dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3 dx_1 \wedge dx_2)(e_2, e_3) = \alpha_1/\sqrt{E_2 E_3}$$

である. これから $\alpha_1 = A_1\sqrt{E_2 E_3}$. したがって,

$$\omega^2{}_A = A_1\sqrt{E_2 E_3}\,dx_2 \wedge dx_3 + A_2\sqrt{E_3 E_1}\,dx_3 \wedge dx_1 + A_3\sqrt{E_1 E_2}\,dx_1 \wedge dx_2.$$

とくに, $\mathbf{R}^3$ の Descartes 座標, 円筒座標, 球面座標では, ベクトル場

$$A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z = A_r e_r + A_\varphi e_\varphi + A_z e_z$$
$$= A_R e_R + A_\varphi e_\varphi + A_\theta e_\theta$$

には, 次の1-形式と2-形式とが対応する.

$$\omega^1{}_A = A_x dx + A_y dy + A_z dz = A_r dr + r A_\varphi d\varphi + A_z dz$$
$$= A_R dR + R\cos\theta\, A_\varphi d\varphi + R A_\theta d\theta,$$
$$\omega^2{}_A = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy$$
$$= r A_r d\varphi \wedge dz + A_\varphi dz \wedge dr + r A_z dr \wedge d\varphi$$
$$= R^2\cos\theta\, A_R d\varphi \wedge d\theta + R A_\varphi d\theta \wedge dR + R\cos\theta\, A_\theta dR \wedge d\varphi. \quad ——$$

多様体 M 上のベクトル場の例に, 関数 $f: M \to \mathbf{R}$ のグラジエントがある. 関数のグラジエントとは, 微分に対応するベクトル場 $\mathbf{grad}\, f$ のことであった.

$$\omega^1{}_{\mathbf{grad}\, f} = df,$$

つまり,

$$df(\xi) = (\mathbf{grad}\, f, \xi), \qquad \forall \xi.$$

問 16 基底 e_1, e_2, e_3 で, 関数のグラジエントの成分を求めよ.

［解］ $df = (\partial f/\partial x_1)\,dx_1 + (\partial f/\partial x_2)\,dx_2 + (\partial f/\partial x_3)\,dx_3$ である. 前問によれば,

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial x_1}e_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial x_2}e_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial x_3}e_3.$$

とくに Descartes 座標, 円筒座標, 球面座標では

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}e_x + \frac{\partial f}{\partial y}e_y + \frac{\partial f}{\partial z}e_z$$

$$=\frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{\partial f}{\partial R}\boldsymbol{e}_R+\frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta.$$

§35　微分形式の積分

ここではチェイン，チェインの境界，チェイン上の形式の積分などの概念を定義する．

微分形式の積分は曲面を通過する流体の流量とか，道の上で力がなす仕事などの概念を高次元へ一般化したものである．

A. 1-形式の道に沿う積分　多様体 M 上の 1-形式 ω^1 を積分することから始めよう．$\gamma:[0,1]\to M$ を滑らかな写像とする《積分路》．形式 ω^1 の道 γ 上の積分は積分和の極限として定義される．積分和の各項は接ベクトル $\boldsymbol{\xi}_i$ に対する 1-形式 ω^1 の値である (図 146)：

$$\int_\gamma \omega^1=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega^1(\boldsymbol{\xi}_i).$$

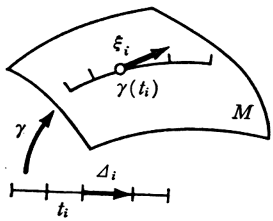


図 146　1-形式を曲線に沿って積分する

接ベクトル $\boldsymbol{\xi}_i$ は次のように作る．線分 $0\leq t\leq 1$ を点 t_i によって小線分 Δ_i: $t_i\leq t\leq t_{i+1}$ に分ける．線分 Δ_i を，点 t_i における t 軸への接ベクトル Δ_i と考えることができる．点 $\gamma(t_i)$ における M の接空間内の像が $\boldsymbol{\xi}_i$ である：

$$\boldsymbol{\xi}_i=d\gamma_{t_i}(\Delta_i)\in TM_{\gamma(t_i)}.$$

線分 Δ_i のうち最長のものが 0 に近づくと，積分和は極限をもつ．これを 1-形式 ω^1 の道 γ に沿う積分という．

k-形式の k 次元曲面上の積分も，同様に定義される．積分曲面を小さい k 次元の曲平行多面体に分割する (図 147)．これらの曲平行多面体を，接空間内の平行多面体で置き換える．接空間の平行多面体に対する k-形式の値の和は，分割を細かくするとき，積分に近づく．まず特殊な場合を考えよう．

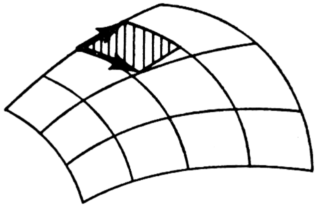


図147 2-形式を曲面上で積分する

B. 向きづけられた k 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^k$ における k-形式の積分 $x_1, \cdots, x_k$ は $\mathbf{R}^k$ を向きづける座標系とする．このとき，$\mathbf{R}^k$ の k-形式は，すべて形式 $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$ に比例する．つまり，$\omega^k=\varphi(x)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$ の形であり，$\varphi(x)$ は滑らかな関数である．

D を $\mathbf{R}^k$ の有界な凸多面体とする(図148)．形式 ω^k の D 上の積分は，関数 φ の積分として定義される：

$$\int_D \omega^k = \int_D \varphi(x)\,dx_1\cdots dx_k.$$

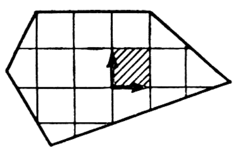


図148 k-形式を k 次元空間で積分する

ここで，右辺の積分は通常の Riemann 和の極限であると理解する．

この定義は上の構想を実現したものである．なぜなら，今の場合，多様体の接空間は多様体自身と同一視されるからである．

問1 $\int_D \omega^k$ は ω^k について線形であることを示せ．

問2 D を2つの凸多面体 D_1, D_2 に分割すれば，

$$\int_D \omega^k = \int_{D_1} \omega^k + \int_{D_2} \omega^k$$

となることを示せ．——

一般の場合(n 次元空間における k-形式)には，分割の各元を接空間の平行多面体と同一視することは，そう簡単ではない．以下，この場合を上で考えた場合に帰着させよう．

C. 写像による微分形式の移り方 $f: M\to N$ を滑らかな多様体 M から滑らかな多様体 N への微分可能な写像，ω を N 上の k 次微分形式とする(図149)．

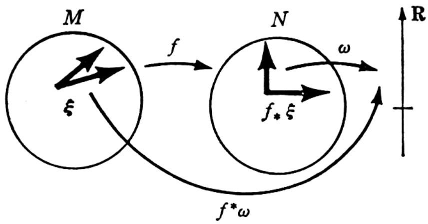


図149 N 上の形式は M 上の形式を誘導する

このとき，M 上にも 1 つの k-形式が得られる．それを $f^*\omega$ と書き，次の関係式で定義する．

$$(f^*\omega)(\xi_1, \cdots, \xi_k) = \omega(f_*\xi_1, \cdots, f_*\xi_k), \qquad \forall \xi_i \in TM_x.$$

ここで，f_* は写像 f の微分である．

いい換えると，形式 $f^*\omega$ のベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_k$ に対する値は，形式 ω がこれらのベクトルの像に対してとる値に等しい．

例 $y=f(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$，$\omega=dy$ のときは，

$$f^*\omega = 2x_1dx_1+2x_2dx_2.$$

問 3 $f^*\omega$ は M 上の k-形式であることを示せ．

問 4 写像 f^* は形式に対する演算を保つことを示せ．つまり

$$f^*(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2) = \lambda_1 f^*(\omega_1)+\lambda_2 f^*(\omega_2),$$

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2).$$

問 5 $g: L \to M$ を微分可能な写像とする．$(fg)^*=g^*f^*$ を示せ．

問 6 D_1, D_2 を向きづけられた k 次元空間 $\mathbf{R}^k$ における 2 つのコンパクト凸多面体とし，微分可能な写像 $f: D_1 \to D_2$ は，D_1 の内部を D_2 の内部の上へ移し，向きを保つ微分同相写像*)を与えるとする．このとき，D_2 上の任意の k-形式 ω^k に対して，

$$\int_{D_1} f^*\omega^k = \int_{D_2} \omega^k.$$

［ヒント］ これは重積分における変数変換の定理である：

$$\int_{D_1} \frac{\partial(y_1, \cdots, y_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} \varphi(y(x))\, dx_1 \cdots dx_k = \int_{D_2} \varphi(y)\, dy_1 \cdots dy_k.$$

D. k-形式の n 次元多様体上での積分 ω を n 次元多様体 M 上の k 次微分形式，D を k 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^k$ の有界な k 次元凸多面体とする（図 150）．

---

*) つまり 1 対 1 で，逆写像も微分可能である．

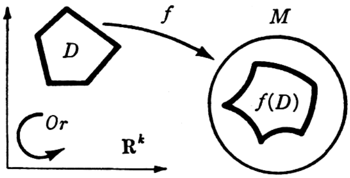


図150　特異 k 次元多面体

《積分路》の役割は M の k 次元片[*)] σ が担うが，これは次の 1), 2), 3) からなる組 $\sigma=(D,f,Or)$ で表わされる．

1)　$D\subset \mathbf{R}^k$ は凸多面体，

2)　$f:D\to M$ は微分可能な写像，

3)　Or は $\mathbf{R}^k$ の向きづけ．

定義　k-形式 ω の k 次元片 σ 上の積分とは，対応する形式を多面体 D 上で積分したものをいう：

$$\int_\sigma \omega=\int_D f^*\omega.$$

問7　積分は形式について線形であることを示せ：

$$\int_\sigma \lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2=\lambda_1\int_\sigma \omega_1+\lambda_2\int_\sigma \omega_2.$$

σ とは向きづけ Or だけを異にする k 次元片を，σ **に逆向きである**といい，$-\sigma$ とか $-1\cdot\sigma$ で表わす（図151）．

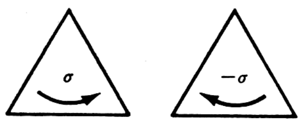


図151　問8のために

問8　向きづけを変えると積分は符号が変わることを示せ：

$$\int_{-\sigma}\omega=-\int_\sigma \omega.$$

E. チェイン　$f(D)$ は必ずしも，M の滑らかな部分多様体ではない．《自己交差》することも，好きなだけ《折れ曲がる》ことも，1点に退化することもある．また，すでに1次元の場合で明らかなように，1つの片のみからなる積分路に限定することも得策ではない．数個の片からなり，どれかの片を数回通過

*)　片 σ は普通 **k 次元特異多面体**という．

する積分路も，便利である．高次元の時の同様な概念を**チェイン**という．

定義 **多様体 M 上の k 次元チェイン**とは，M の向きづけられた k 次元片 $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ と，重複度といわれる整数 $m_1, \cdots, m_r$ の有限個の組をいう（重複度は正負，0 を問わない）．チェインを次のように表わす．

$$c_k = m_1\sigma_1 + \cdots + m_r\sigma_r.$$

このとき，次の自然な恒等式をおく．

$$m_1\sigma + m_2\sigma = (m_1+m_2)\sigma,$$

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 = m_2\sigma_2 + m_1\sigma_1,$$

$$0\sigma = 0, \qquad c_k + 0 = c_k.$$

問 9 チェインの和を次式で定義すれば，多様体 M 上の k 次元チェイン全体は可換群になることを示せ：

$$(m_1\sigma_1+\cdots+m_r\sigma_r) + (m_1'\sigma_1'+\cdots+m_r'\sigma_r')$$
$$= m_1\sigma_1+\cdots+m_r\sigma_r+m_1'\sigma_1'+\cdots+m_r'\sigma_r'.$$

F．例：多面体の境界 D を k 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^k$ の向きづけられた k 次元凸多面体とする．$\mathbf{R}^k$ の $k-1$ 次元チェイン ∂D を D の**境界**と定義する（図 152）．

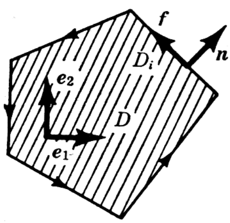


図 152　境界の向きづけ

チェイン ∂D の片 σ_i は，多面体 D の $k-1$ 次元辺 D_i に，$\mathbf{R}^k$ への包含写像 $f_i: D_i \to \mathbf{R}^k$ と，以下に定める向きづけ Or_i とを与えたものである．重複度はいずれも 1 に等しい．

$$\partial D = \sum \sigma_i, \qquad \sigma_i = (D_i, f_i, Or_i).$$

辺に向きづけを与える規則 $e_1, \cdots, e_k$ を $\mathbf{R}^k$ に向きを与える枠とし，D_i を D の 1 つの辺とする．D_i の内点をとり，そこで多面体 D に外向きの法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を引く．**境界 D_i を向きづける枠**は D_i の枠 $(f_1, \cdots, f_{k-1})$ で，枠 $(\boldsymbol{n}, f_1, \cdots, f_{k-1})$ がちょうど（枠 $e_1, \cdots, e_k$ と同じ）空間の向きづけを与えるものである．

チェインの境界も同様に定義される．$\sigma = (D, f, Or)$ を多様体 M の k 次元

片とする．その境界 $\partial\sigma$ とは，片 $\sigma_i=(D_i, f_i, Or_i)$ からなる $k-1$ 次元チェイン $\partial\sigma=\sum\sigma_i$ をいう．ここで，D_i は D の $k-1$ 次元辺，Or_i は上の規則に従って選んだ向きづけであり，f_i は写像 $f: D\to M$ を D_i へ制限したものである．

M の k 次元チェイン c_k の境界 ∂c_k とは，チェイン c_k の片の境界を重複度をつけて加えたものをいう(図153)：

$$\partial c_k=\partial(m_1\sigma_1+\cdots+m_r\sigma_r)=m_1\partial\sigma_1+\cdots+m_r\partial\sigma_r.$$

明らかに，∂c_k は M の $k-1$ 次元チェインである*)．

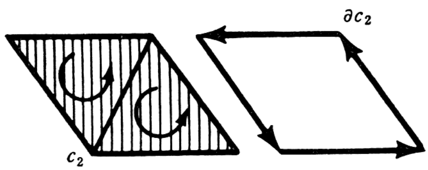


図153　チェインの向きづけ

問10　任意のチェインの境界の境界は0である：$\partial\partial c_k=0$.

［ヒント］ ∂ の線形性から，凸多面体 D に対して $\partial\partial D=0$ を示せばよい．D の各 $k-2$ 次元辺が，チェイン $\partial\partial D$ の中に，2回符号を変えて現われることを確かめるだけでよい．これは，$k=2$ のときに確かめればよい(平面との交わり)．

G. 形式のチェインに沿う積分　さて，ω^k を多様体 M 上の k-形式とし，c_k を M 上の k-チェイン：$c_k=\sum m_i\sigma_i$ とする．**形式 ω^k のチェイン c_k 上の積分**とは，重複度もこめた片上の積分の和をいう：

$$\int_{c_k}\omega^k=\sum_i m_i\int_{\sigma_i}\omega^k.$$

問11　積分は形式に関して線形であることを示せ：

$$\int_{c_k}\omega^k{}_1+\omega^k{}_2=\int_{c_k}\omega^k{}_1+\int_{c_k}\omega^k{}_2.$$

問12　1つ定めた形式 ω^k をチェイン c_k 上で積分することによって，チェインの群から実数群への準同型が定まることを示せ．

例1　M を平面 $\{(p, q)\}$，形式 ω^1 を pdq とし，チェイン c_1 は重複度1の片 σ_1 からなるとする：

$$\sigma_1:\ [0\le t\le 2\pi]\xrightarrow{f}(p=\cos t,\ q=\sin t).$$

---

*)　ここでは，$k>1$ と考えている．次の定義をおくと，1次元チェインも一般の図式に入る．0次元チェインは点とその重複度の組よりなる．有向線分 $\overrightarrow{AB}$ の境界は $B-A$ である(点 B は重複度1，点 A は重複度 -1)．点の境界は空である．

このとき，

$$\int_{c_1} pdq = \pi.$$

一般に，チェイン c_1 が領域 G の境界を表わすと(図154)，$\int_{c_1} pdq$ は G の面積に等しく，その符号 +，− は，(外法線ベクトル，境界に向きを与えるベクトル)の組が基底ベクトル(p 軸ベクトル，q 軸ベクトル)の組と同じ向きであるか否かによる．

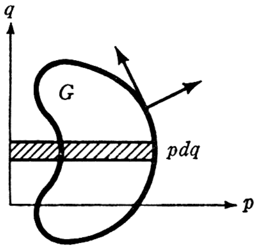


図154　形式 pdq を領域の境界上で積分すると，積分は領域の面積に等しい

例2　M を向きづけられた3次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ とする．このとき，M 上の各1-形式には或るベクトル場 $\boldsymbol{A}$ $(\omega^1=\omega^1{}_{\boldsymbol{A}})$ が対応する．ここで，

$$\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\xi}).$$

向きづけられた曲線 l を表わすチェイン c_1 上で，形式 $\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}$ を積分したものを，**曲線 l に沿う場 $\boldsymbol{A}$ の循環**という：

$$\int_{c_1} \omega^1{}_{\boldsymbol{A}} = \int_l (\boldsymbol{A}, d\boldsymbol{l}).$$

M 上の各2-形式もまた，或る場 $\boldsymbol{A}$ に対応する$(\omega^2=\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$，ここで，$\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}))$．

向きづけられた曲面 S を表わすチェイン c_2 上で，形式 $\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$ を積分したものを，**曲面 S を通る場 $\boldsymbol{A}$ の流量**という：

$$\int_{c_2} \omega^2{}_{\boldsymbol{A}} = \int_S (\boldsymbol{A}, d\boldsymbol{n}).$$

問13　球面 $x^2+y^2+z^2=1$ を，点 $z=1$ でベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ により向きづける．この面を通る場 $\boldsymbol{A}=R^{-2}\boldsymbol{e}_R$ の流量を求めよ．同様に向きづけた楕円面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2=1$ を通る場 $\boldsymbol{A}$ の流量を求めよ．

［ヒント］　本章の最後を見よ．

問14　$2n$ 次元空間 $\mathbf{R}^{2n}=\{(p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n)\}$ に，境界 l をもつ2次元曲面 S が与えられて，2-チェイン c_2 を表わすとする．次の積分を求めよ．

$$\int_{c_2} dp_1\wedge dq_1+\cdots+dp_n\wedge dq_n \quad と \quad \int_l p_1dq_1+\cdots+p_ndq_n.$$

［解］ S を2次元平面 p_i, q_i へ射影したときの，向きを考えた面積の和である．

§36 外微分

ここでは，k-形式の外微分を定義し，Stokes の公式を証明する．つまり，形式の微分をチェイン上で積分すると，もとの形式をチェインの境界上で積分したものに等しい．

A. 例：ベクトル場の発散 多様体 M 上の k-形式 ω の外微分は，この多様体上の $k+1$-形式 $d\omega$ である．形式からその外微分へ移ることは，関数の微分とかベクトル場の発散を作ることに似ている．発散の定義を思い返そう．

$\boldsymbol{A}$ を向きづけられた3次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル場とし，頂点 x で辺 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ をもつ平行6面体 P の境界を S とする：$S=\partial P$(図155)．曲面 S を通る場 $\boldsymbol{A}$ の《外への》流量 F を考えよう：

$$F(P)=\int_S (\boldsymbol{A}, d\boldsymbol{n}).$$

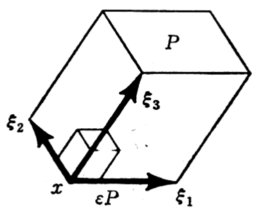


図155 ベクトル場の発散の定義のために

平行6面体 P が非常に小さいと，流量 F は，近似的に，平行6面体の体積 $V=(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3)$ と点 x における《湧出密度》との積に比例する．いいかえると，次の極限が存在する．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(\varepsilon P)}{\varepsilon^3 V}.$$

ここで，εP は辺 $\varepsilon\boldsymbol{\xi}_1, \varepsilon\boldsymbol{\xi}_2, \varepsilon\boldsymbol{\xi}_3$ をもつ平行6面体である．この極限は平行6面体 P のとり方にはよらず，点 x にのみ依存する．これを点 x における場 $\boldsymbol{A}$ の**発散** $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ という．

高次元の場合へ移るために，《面積要素を通る $\boldsymbol{A}$ の流量》が，$\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$ と書いた2-形式であることに注意する．発散とは，3-形式を次のように表わしたときの密度で，これは《要素平行6面体における湧出》を特徴づける．

$$\omega^3=\operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dx\wedge dy\wedge dz,$$

$$\omega^3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \operatorname{div} A \cdot V(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

n 次元多様体上の k-形式 ω^k の外微分 $d\omega^k$ は，$k+1$ 次元平行多面体の境界上で ω^k を積分したときの，多重線形な主要部分として定義される．

B. 外微分の定義　点 x で M に接する $k+1$ 個のベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_{k+1}$ に対して，形式 $d\omega$ の値を定義しよう．このために，M 上の点 x の近傍において，何か或る座標系，つまり，Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の点 O の近傍を，M の点 x の近傍の上へ写す微分同相写像 f を考えよう (図 156).

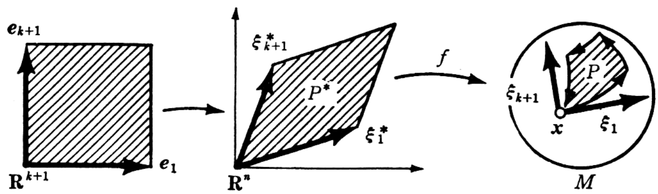


図 156　曲平行多面体

f の微分によるベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_{k+1} \in TM_x$ の逆像は O における $\mathbf{R}^n$ の接空間に入る．この接空間は自然に $\mathbf{R}^n$ と同一視され，したがってベクトルの逆像は

$$\xi^*{}_1, \ \cdots, \ \xi^*{}_{k+1} \in \mathbf{R}^n$$

と見なせる．

これらのベクトルで，$\mathbf{R}^n$ の中に平行多面体 P^* を作る．(厳密には，$\mathbf{R}^{k+1}$ の向きづけられた標準立方体と，その辺 $e_1, \cdots, e_{k+1}$ を $\xi^*{}_1, \cdots, \xi^*{}_{k+1}$ へ移す P^* の上への線形写像とを $\mathbf{R}^n$ の $k+1$ 次元片と考えるべきである.)

写像 f は平行多面体 P^* を M の $k+1$ 次元片 P《曲平行多面体》へ移す．片 P の境界は k 次元チェイン ∂P である．平行多面体 P の境界 ∂P に沿う ω^k の積分を考えよう:

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_{k+1}) = \int_{\partial P} \omega^k.$$

例　滑らかな関数 $\varphi: M \to \mathbf{R}$ を M 上の 0-形式ということにする．0-チェイン $c_0 = \sum_i m_i A_i$ (m_i は整数，A_i は M の点) に沿う 0-形式 φ の積分は，次のようになる．

$$\int_{c_0} \varphi = \sum m_i \varphi(A_i).$$

このとき，先の定義は関数 φ の《増分》$F(\xi_1) = \varphi(x_1) - \varphi(x)$ を与える．O における $F(\xi_1)$ の主要な線形部分は単に関数 φ の微分である (図 157).

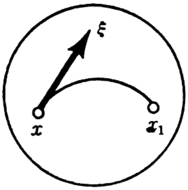


図157　1次元平行多面体の境界に沿う積分は関数の増分である

問1　関数 $F(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+1})$ は $\boldsymbol{\xi}$ について歪対称であることを示せ. ——

《増分》$F(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+1})$ の主要な $k+1$-線形部分は, $\boldsymbol{x}$ における M の接空間 TM_x 上の $k+1$ 次外形式であることが分る. この形式は曲平行多面体を定めるときの座標系にはよらない. これを形式 ω^k の(点 $\boldsymbol{x}$ における)**外微分**といい, $d\omega^k$ と表わす.

C. 外微分に関する定理

定理　TM_x 上に, ただ1つの $k+1$-形式 Ω が存在して, 曲平行多面体の境界に沿う積分 $F(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+1})$ の, O における主要な $k+1$-線形部分となる. すなわち,

$$F(\varepsilon\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \varepsilon\boldsymbol{\xi}_{k+1}) = \varepsilon^{k+1}\Omega(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k+1}) + o(\varepsilon^{k+1}) \qquad (\varepsilon \to 0). \quad (1)$$

形式 Ω は F を定義するときの座標系のとり方にはよらない.

M 上の局所座標系 $x_1, \cdots, x_n$ で, 形式 ω^k が

$$\omega^k = \sum a_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と表わされていれば, 形式 Ω は次のように表わされる.

$$\Omega = d\omega^k = \sum da_{i_1\cdots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \quad (2)$$ ——

この定理の証明を, (x_1, x_2) 平面上の形式 $\omega^1 = a(x_1, x_2)dx_1$ の場合に実行しよう. 一般の場合には, 計算がやや長くなるものの証明は全く同様である.

F の値を, つまり ω^1 の積分を, O を頂点とし $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ を辺とする平行4辺形 P の境界上で計算する(図158).

チェイン ∂P は線分 $0 \leq t \leq 1$ から平面への写像 $t \to \boldsymbol{\xi}t$, $t \to \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}t$, $t \to \boldsymbol{\eta}t$, $t \to \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}t$ と重複度 $1, 1, -1, -1$ とで与えられる. よって,

$$\int_{\partial P} \omega^1 = \int_0^1 [a(\boldsymbol{\xi}t) - a(\boldsymbol{\xi}t + \boldsymbol{\eta})]\xi_1 - [a(\boldsymbol{\eta}t) - a(\boldsymbol{\eta}t + \boldsymbol{\xi})]\eta_1 dt$$

となる. ここで, $\xi_1 = dx_1(\boldsymbol{\xi})$, $\eta_1 = dx_1(\boldsymbol{\eta})$, $\xi_2 = dx_2(\boldsymbol{\xi})$, $\eta_2 = dx_2(\boldsymbol{\eta})$ はベクトル $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ の成分である. ところで,

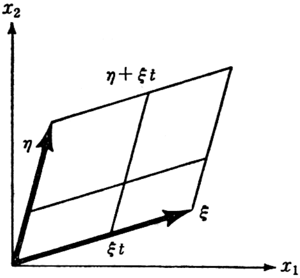


図158 外微分に関する定理のために

$$a(\boldsymbol{\xi}t+\boldsymbol{\eta})-a(\boldsymbol{\xi}t)=\frac{\partial a}{\partial x_1}\eta_1+\frac{\partial a}{\partial x_2}\eta_2+O(\boldsymbol{\xi}^2,\boldsymbol{\eta}^2)$$

(偏微分は，$x_1=x_2=0$ でとる). まったく同様にして，

$$a(\boldsymbol{\eta}t+\boldsymbol{\xi})-a(\boldsymbol{\eta}t)=\frac{\partial a}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial a}{\partial x_2}\xi_2+O(\boldsymbol{\xi}^2,\boldsymbol{\eta}^2).$$

この 2 つの表示を上の積分に代入すれば，

$$F(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\int_{\partial P}\omega^1=\frac{\partial a}{\partial x_2}(\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2)+o(\boldsymbol{\xi}^2,\boldsymbol{\eta}^2).$$

F の主要な双線形部分は，(1)で予告したように，ベクトル $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ の組に対する次の 2 次外形式の値であることが分った.

$$\Omega=\frac{\partial a}{\partial x_2}dx_2\wedge dx_1.$$

この形式は式(2)で与えられる. なぜなら，

$$da\wedge dx_1=\frac{\partial a}{\partial x_1}dx_1\wedge dx_1+\frac{\partial a}{\partial x_2}dx_2\wedge dx_1=\frac{\partial a}{\partial x_2}dx_2\wedge dx_1.$$

最後に，座標系 x_1, x_2 を他のもので置き換えると(図159)，平行 4 辺形 P は，それに近い曲平行 4 辺形 P' で置き換えられ，積分値の差 $\int_{\partial P}\omega^1-\int_{\partial P'}\omega^1$ は 2 次より高次の無限小である(これを証明せよ!). ∎

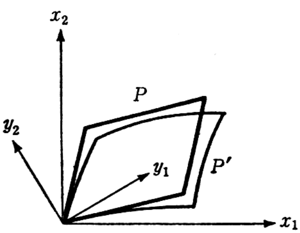


図159 外微分が座標系にはよらないこと

問2 一般の場合に定理の証明を行え．

問3 和と積の微分の公式を示せ：

$$d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2,$$
$$d(\omega^k\wedge\omega^l)=d\omega^k\wedge\omega^l+(-1)^k\omega^k\wedge d\omega^l.$$

問4 微分の微分は0に等しいことを示せ：$dd=0$.

問5 $f:M\to N$ を滑らかな写像，ω を N 上の k-形式とする．$f^*(d\omega)=d(f^*\omega)$ を示せ．

D. Stokes の公式 外微分に関する定理のもっとも重要な結論の1つは，**Newton-Leibniz-Gauss-Green-Ostrogradskii-Stokes-Poincaré の公式**

$$\int_{\partial c}\omega=\int_c d\omega \tag{3}$$

である．c は多様体 M 上の任意の $k+1$-チェイン，ω は多様体 M 上の任意の k-形式である．

この公式の証明は，チェインが1つの片 σ よりなる場合に行えばよい．まず，この片 σ が，向きづけられた平行多面体 $P\subset\mathbf{R}^{k+1}$ で与えられると仮定しよう(図160)．

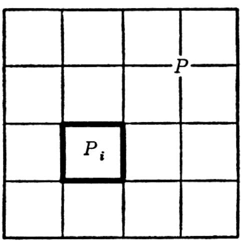


図160 平行多面体に対する Stokes の定理の証明

P を P に相似な N^{k+1} 個の同じ平行多面体 P_i に分割しよう．このとき，明らかに，

$$\int_{\partial P}\omega=\sum_{i=1}^{N^{k+1}}F_i,\qquad \text{ここで，}\ F_i=\int_{\partial P_i}\omega.$$

式(1)により，

$$F_i=d\omega(\xi^i{}_1,\cdots,\xi^i{}_{k+1})+o(N^{-(k+1)})$$

となる．ここで，$\xi^i{}_1,\cdots,\xi^i{}_{k+1}$ は P_i の辺である．一方，$\sum_{i=1}^{N^{k+1}}d\omega(\xi^i{}_1,\cdots,\xi^i{}_{k+1})$ は $\int_P d\omega$ に対する積分和である．$o(N^{-(k+1)})$ が一様であることは簡単に示せる．

よって,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi^i{}_1, \cdots, \xi^i{}_{k+1}) = \int_P d\omega.$$

結局,

$$\int_{\partial P}\omega = \sum F_i = \lim_{N\to\infty}\sum F_i = \int_P d\omega.$$

これから, 多面体が平行多面体であるようなチェインに対しては, 自動的に公式(3)が得られる.

公式(3)を任意の凸多面体 D に対して証明するためには, 単体*)で証明すれば十分である. D は常に単体に分割できるからである(図161):

$$D = \sum D_i, \qquad \partial D = \sum \partial D_i.$$

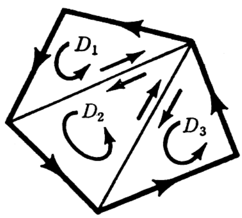


図161　凸多面体の単体分割

公式(3)を単体で証明しよう. 次のことを注意しておく. 向きづけられた k 次元正方体を, 次のように, 向きづけられた k 次元単体の上へ, 微分可能な写像によって移すことができる.

1)　正方体の内部は, 単体の内部へ向きづけを保ったまま微分同相に移る;

2)　正方体の $k-1$ 次元辺の幾つかは, その内部が単体の辺の内部へ向きづけを保ったまま微分同相に移る. 正方体の残りの $k-1$ 次元辺の像は, 単体の $k-2$ 次元辺に入る.

たとえば, $k=2$ のとき, 正方形 $0\leq x_1,\ x_2\leq 1$ から3角形へのこのような写像は, 式 $y_1=x_1,\ y_2=x_1x_2$ で与えられる(図162).

こうして, 単体に対する公式(3)は, 立方体に対して証明した公式(3)と変数

---

*)　2次元単体は3角形であり, 3次元単体は4面体である. k 次元単体は $k-1$ 次元面上にはない $\mathbf{R}^n$ の $k+1$ 個の点の凸包である.

例: $\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^k;\ x_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} x_i\leq 1\right\}$.

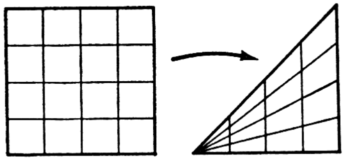


図 162 単体に対する Stokes の公式の証明

変換に関する定理(p. 175)とから得られる.

例 1 $\mathbf{R}^{2n}$ の座標を $p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n$ として, 次の 1-形式 ω^1 を考えよう.

$$\omega^1 = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n = \boldsymbol{p} d\boldsymbol{q}.$$

このとき, $d\omega^1 = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n = d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q}$, したがって,

$$\iint_{c_2} d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q} = \int_{\partial c_2} \boldsymbol{p} d\boldsymbol{q}.$$

とくに, c_2 が閉曲面($\partial c_2 = 0$)であれば, $\iint_{c_2} d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q} = 0$ である.

E. 例 2 ベクトル解析 向きづけられた3次元 Riemann 空間 M では, すべてのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に 1-形式 $\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}$ と 2-形式 $\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}$ とが対応する. したがって, 外微分を行うことはベクトル演算であるとも考えられる.

0-形式(関数), 1-形式, 2-形式の外微分には, グラジエント, 回転, 発散の各ベクトル演算が対応するが, これらは次の関係式で定義される.

$$df = \omega^1{}_{\mathbf{grad}\, f}, \qquad d\omega^1{}_{\boldsymbol{A}} = \omega^2{}_{\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}}, \qquad d\omega^2{}_{\boldsymbol{A}} = \operatorname{div} \boldsymbol{A} \cdot \omega^3$$

(形式 ω^3 は M 上の体積要素である). こうして式(3)より次が得られる.

$$f(y) - f(x) = \int_l \mathbf{grad}\, f \cdot d\boldsymbol{l}, \qquad \text{ただし, } \partial l = y - x,$$

$$\int_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{n}, \qquad \text{ただし, } \partial S = l,$$

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{n} = \iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{A} \cdot \omega^3, \qquad \text{ただし, } \partial D = S.$$

問 6 次のことを示せ.

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) - (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}),$$

$$\mathbf{rot}\,(a\boldsymbol{A}) = [\mathbf{grad}\, a, \boldsymbol{A}] + a\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A},$$

$$\operatorname{div} a\boldsymbol{A} = (\mathbf{grad}\, a, \boldsymbol{A}) + a \operatorname{div} \boldsymbol{A}.$$

［ヒント］ 積に対する微分公式により

$$d\,(\omega^2{}_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]}) = d\,(\omega^1{}_{\boldsymbol{A}} \wedge \omega^1{}_{\boldsymbol{B}}) = d\omega^1{}_{\boldsymbol{A}} \wedge \omega^1{}_{\boldsymbol{B}} - \omega^1{}_{\boldsymbol{A}} \wedge d\omega^1{}_{\boldsymbol{B}}.$$

問 7　**rot grad**=div **rot**=0 を示せ.

［ヒント］　$dd=0$.

F. 付録 1　3 軸直交系におけるベクトル演算　x_1, x_2, x_3 を M の 3 軸直交系とし，$ds^2=E_1dx_1{}^2+E_2dx_2{}^2+E_3dx_3{}^2$，$\boldsymbol{e}_i$ を座標軸上の単位ベクトルとする（§34, E 項を見よ）.

問 8　ベクトル場 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$ の成分を知って回転の成分を求めよ.

［解］　p. 172 によって

$$\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}=A_1\sqrt{E_1}\,dx_1+A_2\sqrt{E_2}\,dx_2+A_3\sqrt{E_3}\,dx_3.$$

よって，

$$d\omega^1{}_{\boldsymbol{A}}=\left(\frac{\partial A_3\sqrt{E_3}}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2\sqrt{E_2}}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3+\cdots=\omega^2{}_{\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}}.$$

p. 172 により，結局，

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}\left(\frac{\partial A_3\sqrt{E_3}}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2\sqrt{E_2}}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{e}_1+\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix}\sqrt{E_1}\,\boldsymbol{e}_1 & \sqrt{E_2}\,\boldsymbol{e}_2 & \sqrt{E_3}\,\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ A_1\sqrt{E_1} & A_2\sqrt{E_2} & A_3\sqrt{E_3}\end{vmatrix}.$$

とくに，$\mathbf{R}^3$ の Descartes，円筒，球面の各座標では次のようになる.

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial rA_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{1}{R\cos\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}-\frac{\partial A_\varphi\cos\theta}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_R+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta}-\frac{\partial RA_\theta}{\partial R}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R}-\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta.$$

問 9　場 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$ の発散を求めよ.

［解］　$\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}=A_1\sqrt{E_2E_3}\,dx_2\wedge dx_3+\cdots$ である．したがって，

$$d\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}=\frac{\partial}{\partial x_1}(A_1\sqrt{E_2E_3})\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+\cdots.$$

発散の定義により

$$d\omega^2{}_{\boldsymbol{A}}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\cdot\sqrt{E_1E_2E_3}\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3.$$

ゆえに，

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_1\sqrt{E_2E_3}+\frac{\partial}{\partial x_2}A_2\sqrt{E_3E_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}A_3\sqrt{E_1E_2}\right).$$

とくに，$\mathbf{R}^3$ の Descartes，円筒，球面の各座標では，

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_r}{\partial r}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left(\frac{\partial R^2\cos\theta\, A_R}{\partial R}+\frac{\partial RA_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial R\cos\theta\, A_\theta}{\partial\theta}\right).$$

問 10 多様体 M 上の Laplace 作用素とは，作用素 $\Delta=\operatorname{div}\mathbf{grad}$ をいう．x_i 座標で表わしてみよ．

［解］

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\frac{E_2E_3}{E_1}}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)+\cdots\right].$$

とくに，$\mathbf{R}^3$ では，

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
$$= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\cos\theta\frac{\partial f}{\partial R}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right].$$

G. 付録 2 閉形式とサイクル (湧出のない)非圧縮性の流体が領域 D の境界を通過するときの流量は 0 である．この自明な命題を高次元へ拡張してみよう．

湧出のない流れを高次元へ拡張したものを**閉形式**という．

場 A は $\operatorname{div} A=0$ であるとき，湧出がないという．

定義 多様体 M 上の微分形式 ω は，その外微分が 0 に等しいとき：$d\omega=0$，**閉じている**という．

とくに，湧出のない場 A に対応する 2-形式 $\omega^2{}_A$ は閉じている．Stokes の公式(3)から，直ちに次の定理が導かれる．

定理 閉形式 ω^k を任意の $k+1$ 次元チェイン c_{k+1} の境界上で積分すると，積分は 0 に等しい：

$$d\omega^k = 0 \quad ならば, \quad \int_{\partial c_{k+1}} \omega^k = 0.$$

問 11 形式を微分したものは常に閉じていることを示せ．——

一方，形式の微分ではない閉形式が存在する．

たとえば，3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ から，点 O を除いたもの：$M=\mathbf{R}^3-O$ を

多様体 M とし，2-形式として場 $A=R^{-2}e_R$ の流れを考えよう(図163)．div A $=0$ は簡単に分る．したがって，2-形式 $\omega^2{}_A$ は閉じている．一方，O を中心とする任意の球面を通過する流れは，その流量が 4π に等しい．外微分した形式を球面上で積分すると 0 になることを示そう．

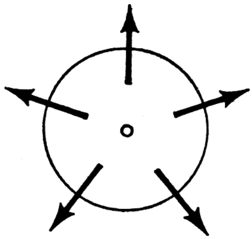


図163 場 A

定義 多様体 M 上の**サイクル**とは，境界が 0 に等しいチェインをいう．

向きづけられた曲面としての球面は，サイクルと考えることができる．Stokes の公式(3)から直ちに，次の定理が従う．

定理 外微分した形式を任意のサイクル上で積分すると，積分は 0 に等しい．つまり

$$\partial c_{k+1}=0 \quad ならば, \int_{c_{k+1}} d\omega^k=0. \qquad ——$$

こうして，上の 2-形式 $\omega^2{}_A$ は 1-形式の微分とはなりえない．

多様体 M 上に，微分にはなりえない閉形式が存在することは，M の位相的性質に関係する．線形空間においては，k 次閉形式はすべて或る $k-1$-形式の微分である(《Poincaré の補題》)．

問 12 1-形式に対して，Poincaré の補題を示せ．

［ヒント］ $\int_{x_0}^{x_1}\omega^1=\varphi(x_1)$ を考えよ．

問 13 線形空間において，閉形式を任意のサイクル上で積分すれば，0 となることを示せ．

［ヒント］ この k-サイクルを境界とする $k+1$-チェインを作れ(図164)．

すなわち，任意のサイクル c に対して，《頂点 O をもつ c 上の錐体》を考えよ．錐体を構成する作用素を p で表わすと，

$$\partial\circ p+p\circ\partial=1 \qquad (恒等写像).$$

よってチェイン c が閉じていると，$\partial(pc)=c$ である．

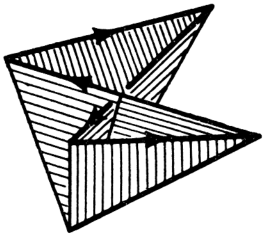


図164 サイクル上の錐体

問 14 線形空間では，閉形式はすべて外微分形式であることを示せ．

[ヒント] 錐体構成を使おう．ω^k を $\mathbf{R}^n$ の k 次微分形式とする．$k-1$ 次微分形式《ω 上の余錐体》$p\omega^k$ を次のように定義しよう．任意のチェイン c_{k-1} に対して，

$$\int_{c_{k-1}} p\omega^k = \int_{pc_{k-1}} \omega^k.$$

$k-1$-形式 $p\omega^k$ が存在して一意的であることは簡単に分る．その値は x における $\mathbf{R}^n$ の接ベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}$ に対して

$$(p\omega)_x(\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}) = \int_0^1 \omega_{tx}(x, t\xi_1, \cdots, t\xi_{k-1})\,dt$$

に等しい．簡単に分るように，

$$d \circ p + p \circ d = 1 \qquad (\text{恒等写像}).$$

よって，形式 ω^k が閉じていると，$d(p\omega^k) = \omega^k$ である．

問 15 X を M 上のベクトル場，ω を k 次微分形式とする．$k-1$ 次微分形式 $i_X\omega$ (X と ω の**内部積**という）を，次の関係式で定義しよう．

$$(i_X\omega)(\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}) = \omega(X, \xi_1, \cdots, \xi_{k-1}).$$

このとき，次の**ホモトピー公式**を証明せよ．

$$i_X d + d i_X = L_X,$$

ここで，L_X は X 方向の微分である．

(微分形式に対する作用素 L_X の作用は，場 X の相流 $\{g^t\}$ を使って次の関係式で定義される．

$$(L_X\omega)(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega(g^t{}_*\xi).$$

この作用素 L_X を **Lie 微分**とか**漁師の水揚げ**とかいう†)．流れはありとあらゆる微分幾何学的対象を浮べて，漁師の傍らを運んで行く．漁師は座ったまま，それを微かく仕分けする．)

†) これは，もちろん洒落である．微分(導関数)を意味する原語は，'生産する'という語からの派生語である．また，後出の Poisson 括弧，poisson には魚という意味がある．

［ヒント］《ホモトピー》作用素 H を考えよう．これは次の式によって，k-チェイン $\gamma:\sigma\to M$ に，$k+1$-チェイン $H\gamma: I\times\sigma\to M$ を対応させる．

$$H\gamma(t,x)=g^t\gamma(x),\qquad ここで,\ I=[0,1].$$

このとき，

$$g^1\gamma-\gamma=\partial(H\gamma)+H(\partial\gamma).$$

問 16 3 次元 Euclid 空間(または Riemann 多様体)で，次のベクトル積の微分公式を証明せよ．

$$\mathbf{rot}\,[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}+\boldsymbol{a}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{a},$$

(ここで，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}=L_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ はベクトル場の Poisson 括弧である．§39 を見よ)．

［ヒント］ τ を体積要素とすると，

$$i_{\mathbf{rot}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}\tau=di_{\boldsymbol{b}}i_{\boldsymbol{a}}\tau,\qquad(\mathrm{div}\,\boldsymbol{a})\tau=di_{\boldsymbol{a}}\tau,\qquad L_{\boldsymbol{b}}i_{\boldsymbol{a}}=i_{\boldsymbol{a}}L_{\boldsymbol{b}}+i\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$$

この関係式を使い，$d\tau=0$ を忘れなければホモトピー公式から $\mathbf{rot}\,[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ に対する式が簡単に導ける†)．

H. 付録 3 コホモロジーとホモロジー M 上の k-形式全体は線形空間をなし，閉形式全体はその部分空間である．$k-1$-形式の微分はさらに閉形式が作る空間の部分空間である．商空間

$$(閉形式)/(微分)=H^k(M,\mathbf{R})$$

を多様体 M の $\boldsymbol{k}$ **次元コホモロジー群**という．この群の元は微分を除いて等しい閉形式のクラスである．

問 17 円周 S^1 に対しては $H^1(S^1,\mathbf{R})=\mathbf{R}$ が成り立つことを示せ．——

$H^k(M,\mathbf{R})$ の次元を，多様体 M の $\boldsymbol{k}$ **次元 Betti 数**という．

問 18 トーラス $T^2=S^1\times S^1$ の 1 次元 Betti 数を求めよ．——

(湧出のない)流体が 2 つの同心球面を通過するときの流量は同じである．一般に，閉形式を k 次元サイクル上で積分するとき，次の条件のもとではこれを別のサイクルにおきかえてよい．つまり，2 つのサイクルの差が或る $k+1$-チェイン《薄膜》の境界となる時である(図 165)：

---

†) 第 3 式(訳者追加)は一種の積の微分の公式 (Leibniz の公式)であって，Lie 微分の定義から簡単に分る．

$$L_X\xi=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g^t{}_*\xi$$

と定義していることに注意する．これは多くの類書のそれと符号が異なる．体積要素 τ が非退化であること，$i_a\tau=0\Longrightarrow a=0$，にも注意せよ．

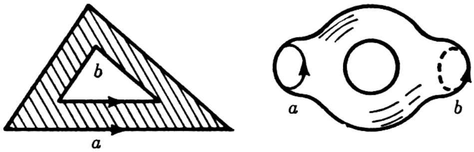


図165 互いにホモローグなサイクル

$a-b=\partial c_{k+1}$ かつ $d\omega^k=0$ であれば,

$$\int_a \omega^k = \int_b \omega^k.$$

このような2つのサイクル a, b を Poincaré は互いに**ホモローグである**と呼んだ.

多様体 M 上のチェイン群, サイクルおよび境界(0 にホモローグなサイクル)の各部分群を然るべく定義したとき*), 商群

$$(\text{サイクル})/(\text{境界}) = H_k(M)$$

を M の $\boldsymbol{k}$ **次元ホモロジー群**という.

この群の元は互いにホモローグなサイクルのクラスである.

この群のランクも, 多様体 M の k 次元 Betti 数に等しい(《de Rham の定理》).

*) このためには, 群 $\{c_k\}$ はパラメーターづけ f と多面体 D の選び方しか異ならない片同士を同一視して, 縮小すべきである. とくに D は常に同一の単体または立方体と考えてよい. さらに, k 次元片 (D, f, Or) は, 退化しているとき, すなわち, k より低い次元の D' と $f_1: D\to D'$ とがあって $f=f_2\circ f_1$ となるとき, 0と見なすべきである.

第8章　シンプレクティック多様体

多様体上のシンプレクティック構造——これは，多様体上の非退化な閉微分2-形式である．力学系の相空間は自然なシンプレクティック構造をもつ．

シンプレクティック多様体上には，Riemann 多様体上と同様，ベクトル場と1-形式の間に自然な同型が存在する．関数の微分に対応する，シンプレクティック多様体上のベクトル場を Hamilton ベクトル場という．多様体上のベクトル場は，相流，つまり微分同相の1-パラメーター群を与える．シンプレクティック多様体上の Hamilton ベクトル場に対応する相流は，相空間のシンプレクティック構造を保つ．

多様体上のベクトル場は Lie 環をなす．シンプレクティック多様体上の Hamilton ベクトル場も，また Lie 環をなす．これらの環における演算を Poisson 括弧という．

§37　多様体上のシンプレクティック構造

ここではシンプレクティック多様体とその上の Hamilton ベクトル場，余接バンドル上の標準シンプレクティック構造を定義する．

A. 定義　M^{2n} を偶数次元の微分可能多様体とする．

M^{2n} 上の**シンプレクティック構造**とは，M^{2n} 上の非退化で閉じた2次微分形式 ω^2 をいう．つまり，

$$d\omega^2=0, \qquad \forall \xi \neq 0,\ \exists \eta:\ \omega^2(\xi, \eta) \neq 0 \qquad (\xi, \eta \in TM_x).$$

組 (M^{2n}, ω^2) を**シンプレクティック多様体**という．

例　線形空間 $\mathbf{R}^{2n}$ に座標 p_i, q_i を考え，$\omega^2=\sum_i dp_i \wedge dq_i$ とおく．

問　$(\mathbf{R}^{2n}, \omega^2)$ がシンプレクティック多様体であることを確かめよ．

$n=1$ のときは，$(\mathbf{R}^2, \omega^2)$ は (平面, 面積) である．——

以下の例は，力学になぜシンプレクティック多様体が現われるかを説明する．微分可能多様体の接バンドルと共にそれに共役な余接バンドルを考えるのも，しばしば有効である．

B. 余接バンドルとそのシンプレクティック構造　V を n 次元微分可能多様

体とする．点 x における V の接空間上の 1-形式を**点 x における V の余接ベクトル**という．点 x における V の余接ベクトル全体は線形空間をなし，接空間 TV_x に共役である．余接ベクトルの作るこの線形空間を T^*V_x と表わし，点 x における多様体 V の**余接空間**という．

多様体のすべての点における余接空間の合併を V の**余接バンドル**といい，T^*V で表わす．集合 T^*V は自然な $2n$ 次元微分可能多様体の構造をもつ．T^*V の点は V の或る点における接空間上の 1-形式である．V の点の局所座標 n 個の組を $\boldsymbol{q}$ とすれば，このような 1-形式は n 個の成分 $\boldsymbol{p}$ で与えられる．$2n$ 個の数 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ が T^*V の点の局所座標の組をつくる．

自然な射影 $f: T^*V \to V$ (TV_x 上の 1-形式に点 x を対応させる) が存在する．射影 f は，**上への**微分可能写像である．写像 f による点 $x \in V$ の原像が余接空間 T^*V_x である．

定理　余接バンドル T^*V は自然なシンプレクティック構造をもつ．上述の局所座標では，この構造は次式で与えられる．

$$\omega^2 = d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q} = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n.$$

証明　まず T^*V 上に特別な 1-形式を定めよう．$\xi \in T(T^*V)_p$ を点 $p \in T^*V$ における余接バンドルの接ベクトルとする (図 166)．自然な射影 $f: T^*V \to V$ の微分 $f_*: T(T^*V) \to TV$ は，ξ を点 x における V の接ベクトル $f_*\xi$ へ移す．T^*V 上の 1-形式 ω^1 を式 $\omega^1(\xi) = p(f_*\xi)$ で定義しよう．上述の局所座標では，この形式は $\omega^1 = \boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{q}$ となる．A 項の例で分るように，2-形式 $\omega^2 = d\omega^1$ は非退化である．∎

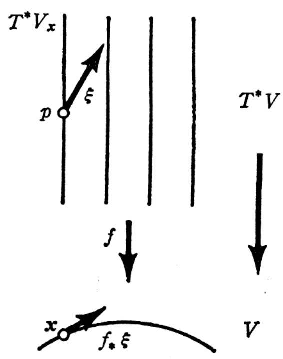


図 166　余接バンドル上の 1-形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$

注意 配位多様体 V と Lagrange 関数 L をもつ Lagrange 力学系を考えよう．容易に分るように，Lagrange の《一般速度》$\dot{\boldsymbol{q}}$ は配位空間 V に接するベクトルであるが，《一般運動量》$\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ は余接ベクトルである．したがって，Lagrange 問題の《$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$》相空間は配位多様体の余接バンドルである．こうして，上の定理は力学の問題の相空間が自然なシンプレクティック多様体の構造をもつことを示す．

問 Legendre 変換は座標系にはよらないことを示せ．この変換は，接バンドル上の関数 $L: TV\to\mathbf{R}$ に，余接バンドル上の関数 $H: T^*V\to\mathbf{R}$ を対応させる．

C. Hamilton ベクトル場 多様体上の Riemann 構造は，接ベクトルの空間と 1-形式の空間の間に同型を与える．シンプレクティック構造も同様の同型を与える．

定義 シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) の点 $\boldsymbol{x}$ における接ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ に TM_x 上の 1-形式 $\omega^1{}_{\xi}$ を，次式によって対応させる．

$$\omega^1{}_{\xi}(\boldsymbol{\eta}) = \omega^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in TM_x.$$

問 対応 $\boldsymbol{\xi}\to\omega^1{}_{\xi}$ はベクトルの作る $2n$ 次元線形空間と 1-形式の作るそれとの間の同型であることを示せ．

例 $\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ では Euclid 構造 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{q}^2$ により，ベクトルと 1-形式とを同一視する．このとき，対応 $\boldsymbol{\xi}\to\omega^1{}_{\xi}$ は変換 $\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ を与える．

問 基底 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ でこの変換の行列を計算せよ．

[解]
$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}.$$

上に構成した同型対応を $I: T^*M_x\to TM_x$ と書くことにしよう．

さて，H をシンプレクティック多様体 M^{2n} 上の関数とする．このとき，dH は M 上の 1 次微分形式であり，したがって，これには各点で M の或る接ベクトルが対応する．こうして，M 上のベクトル場 IdH が得られる．

定義 ベクトル場 IdH を **Hamilton ベクトル場**，H を **Hamilton 関数**（**ハミルトニアン**）という．

例 $M^{2n}=\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ のときは，Hamilton の正準方程式の相速度場が得られる：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = IdH(\boldsymbol{x}) \iff \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}.$$

§38 Hamilton 相流とその積分不変式

Liouville の定理は相流が体積を保つことを主張する．Poincaré は Hamilton 相流

で不変な一連の微分形式を発見した.

A. Hamilton 相流はシンプレクティック構造を保つ　(M^{2n}, ω^2) をシンプレクティック多様体，$H: M^{2n} \to \mathbf{R}$ を関数とする．H に対応する Hamilton ベクトル場 IdH が微分同相の 1-パラメーター群 $g^t: M^{2n} \to M^{2n}$ を与えると仮定しよう．つまり

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = IdH(x).$$

群 g^t を **Hamilton 関数 H に対する Hamilton 相流**という.

定理　Hamilton 相流はシンプレクティック構造を保つ．つまり

$$(g^t)^* \omega^2 = \omega^2. \qquad \text{——}$$

$n=1$, $M^{2n}=\mathbf{R}^2$ の場合，この定理は相流 g^t が面積を保つ(Liouville の定理)ことを意味する.

定理の証明には，以下の記号を導入すると便利である(図 167).

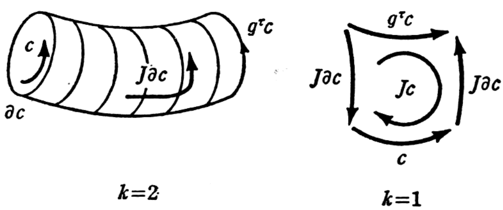


図 167　ホモトピーによるチェインのトレース

M を任意の多様体，c を M 上の k-チェイン，$g^t: M \to M$ を微分可能な変換の 1-パラメーター族とする．**ホモトピー g^t; $0 \leq t \leq \tau$ によるチェイン c のトレース**と呼ばれる，M の $k+1$-チェイン Jc を構成しよう.

(D, f, Or) をチェイン c の 1 つの片とする．これにチェイン Jc の 1 つの片 (D', f', Or') を対応させる．ここで，$D'=I \times D$ は線分 $0 \leq t \leq \tau$ と D との直積であり，写像 $f': D' \to M$ は，$f: D \to M$ により，$f'(t, x)=g^t f(x)$ と表わされる．D' を含む空間 $\mathbf{R}^{k+1}$ の向きづけ Or' は枠 $e_0, e_1, \cdots, e_k$ で与える．e_0 は t 軸のベクトル，$e_1, \cdots, e_k$ は D に向きを与える枠である.

Jc はホモトピー g^t; $0 \leq t \leq \tau$ によって c が掃過するチェインであるといえる．チェイン Jc の境界は c の最初と最後の位置である《断面》と，c の境界が掃過

した《側面》とからなる．

このように向きづけを選ぶとき，次のことは簡単に分る．

$$\partial(Jc_k) = g^\tau c_k - c_k - J\partial c_k. \tag{1}$$

補題　γ をシンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) の 1-チェインとする．g^t は Hamilton 関数 H をもつ M 上の相流であるとする．このとき，

$$\frac{d}{d\tau}\int_{J\gamma}\omega^2 = -\int_{g^\tau\gamma} dH.$$

証明　片 $f:[0,1]\to M$ からなるチェイン γ を考えればよい．そのために

$$f'(t,s) = g^t f(s), \qquad \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial f'}{\partial s}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \frac{\partial f'}{\partial t} \in TM_{f'(t,s)}$$

とおく．積分の定義によって，

$$\int_{J\gamma}\omega^2 = \int_0^1\int_0^\tau \omega^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})\, dt ds.$$

ところで相流の定義により $\boldsymbol{\eta}$ は H に対する Hamilton 場の(点 $f'(t,s)$ におけるベクトルである．Hamilton 場の定義により $\omega^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = -dH(\boldsymbol{\xi})$．ゆえに

$$\int_{J\gamma}\omega^2 = \int_0^\tau\left(\int_{g^t\gamma} -dH\right)dt. \qquad ∎$$

系　チェイン γ が閉じていれば $(\partial\gamma=0)$，$\int_{J\gamma}\omega^2=0$ である．――
実際，

$$\int_\gamma dH = \int_{\partial\gamma} H = 0.$$

定理の証明　任意の 2-チェイン c を考えよう．このとき次式が成り立つ．

$$0 \overset{1}{=} \int_{Jc} d\omega^2 \overset{2}{=} \int_{\partial Jc}\omega^2 \overset{3}{=} \int_{g^\tau c} - \int_c - \int_{J\partial c}\omega^2 \overset{4}{=} \int_{g^\tau c}\omega^2 - \int_c \omega^2.$$

($\overset{1}{=}$ は ω^2 が閉じていること，$\overset{2}{=}$ は Stokes の公式に，$\overset{3}{=}$ は式(1)に，$\overset{4}{=}$ は $\gamma=\partial c$ として，上の系による．) こうして，任意のチェイン c 上と，その像 $g^\tau c$ 上で形式 ω^2 を積分したものが一致する．∎

問　M^{2n} のシンプレクティック構造を保つ微分同相の 1-パラメーター群は，すべて Hamilton 相流であるか．

［ヒント］ §40 を見よ．

B. 積分不変式　$g: M \to M$ を微分可能な写像とする.

定義　k 次微分形式 ω が写像 g の**積分不変式**であるとは，任意の k-チェイン c 上および写像 g による像 gc の上で，ω の積分値が等しいときをいう：

$$\int_{gc} \omega = \int_c \omega.$$

例　$M = \mathbf{R}^2$ で，$\omega^2 = dp \wedge dq$ が面積要素であれば，ω^2 はヤコビアンが1であるすべての変換 g の積分不変式である.

問　形式 ω^k は，$g^* \omega^k = \omega^k$ のとき，かつこのときに限り，写像 g の積分不変式である．これを示せ.

問　形式 ω^k と ω^l とが写像 g の積分不変式であれば，$\omega^k \wedge \omega^l$ も g の積分不変式であることを示せ．——

A 項の定理は次のように定式化できる.

定理　シンプレクティック構造を与える形式 ω^2 は Hamilton 相流の積分不変式である．——

さて，ω^2 の外積による累乗を考えよう.

$$(\omega^2)^2 = \omega^2 \wedge \omega^2, \qquad (\omega^2)^3 = \omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^2, \qquad \cdots$$

系　形式 $(\omega^2)^2, (\omega^2)^3, \cdots$ はすべて Hamilton 相流の積分不変式である.

問　シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) の次元を $2n$ とする．$k > n$ では，$(\omega^2)^k = 0$ であるが，$(\omega^2)^n$ は M^{2n} 上の非退化な $2n$-形式であることを示せ．——

M^{2n} 上の体積要素を $(\omega^2)^n$ によって定める．このとき，Hamilton 相流は体積要素を保ち，上の系から Liouville の定理が得られる.

例　座標シンプレクティック空間 $M^{2n} = \mathbf{R}^{2n} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$, $\omega^2 = d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q} = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ を考えよう．このとき，形式 $(\omega^2)^k$ は形式 ω^{2k} の定数倍である．ただし

$$\omega^{2k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} dp_{i_1} \wedge \cdots \wedge dp_{i_k} \wedge dq_{i_1} \wedge \cdots \wedge dq_{i_k}.$$

形式 ω^{2k} の積分は座標平面 $(p_{i_1}, \cdots, p_{i_k}, q_{i_1}, \cdots, q_{i_k})$ へ射影したときの向きを考えた体積の和に等しい.

写像 $g: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ は ω^2 を積分不変式にもつとき**正準である**という．$\omega^4, \omega^6, \cdots, \omega^{2n}$ の各形式はすべての正準変換の積分不変式である．したがって，正準変換に対しては，座標平面 $(p_{i_1}, \cdots, p_{i_k}, q_{i_1}, \cdots, q_{i_k})$, $1 \leq k \leq n$ へ射影したときの向きを考えた体積の和は不変である．とくに，正準変換は体積を保つ.

方程式 $\dot{\boldsymbol{p}}=-\partial H/\partial \boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}=\partial H/\partial \boldsymbol{p}$ で与えられる Hamilton 相流は正準変換 g^t からなる.

上で考えた積分不変式を**絶対積分不変式**ともいう.

定義 k 次微分形式 ω が, 写像 $g:M\to M$ の**相対積分不変式**であるとは,

$$\int_{gc}\omega=\int_c\omega$$

がすべての**閉じた** k-チェイン c に対して成り立つときをいう.

定理 ω を写像 g の相対積分不変式とする. このとき, $d\omega$ は g の絶対積分不変式である.

証明 c を $k+1$-チェインとする. このとき,

$$\int_c d\omega \overset{1}{=} \int_{\partial c}\omega \overset{2}{=} \int_{g\partial c}\omega \overset{3}{=} \int_{\partial gc}\omega \overset{4}{=} \int_{gc}d\omega.$$

($\overset{1}{=}$ と $\overset{4}{=}$ は Stokes の公式より, $\overset{2}{=}$ は相対不変式の定義より, $\overset{3}{=}$ は境界の定義より導かれる.) ▮

例 正準変換 $g:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ は次の 1-形式を相対不変式にもつ.

$$\omega^1=\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}=\sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

実際, $\mathbf{R}^{2n}$ の閉じたチェイン c はすべて或るチェイン σ の境界であるから,

$$\int_{gc}\omega^1 \overset{1}{=} \int_{g\partial\sigma}\omega^1 \overset{2}{=} \int_{\partial g\sigma}\omega^1 \overset{3}{=} \int_{g\sigma}d\omega^1 \overset{4}{=} \int_{\sigma}d\omega^1 \overset{5}{=} \int_{\partial\sigma}\omega^1 \overset{6}{=} \int_c\omega^1.$$

($\overset{1}{=}$, $\overset{6}{=}$ は σ の定義より, $\overset{2}{=}$ は ∂ の定義より, $\overset{3}{=}$, $\overset{5}{=}$ は Stokes の公式より, $\overset{4}{=}$ は g が正準変換であることと, $d\omega^1=d(\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q})=d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}=\omega^2$ より導かれる.)

問 $d\omega^k$ は写像 $g:M\to M$ の絶対積分不変式であるとする. これから ω^k が相対不変式であるといえるか.

[解] M に境界とはならない閉じた k-チェインが存在すれば, 否である.

C. エネルギーの保存法則

定理 関数 H は, H を Hamilton 関数とする Hamilton 相流の第1積分である.

証明 ベクトル η 方向の H の導関数は, ベクトル η における dH の値に等しい. $\eta=IdH$ とすると Hamilton 場の定義により, 次のようになる.

$$dH(\eta) = \omega^2(\eta, IdH) = \omega^2(\eta, \eta) = 0. \qquad \blacksquare$$

問　1-形式 dH は H を Hamilton 関数とする相流の積分不変式であることを示せ.

§39　ベクトル場の Lie 環

多様体上の1対のベクトル場には，Poisson 括弧と呼ばれる新しいベクトル場が対応する．Poisson 括弧を作る演算は多様体上の無限回微分可能なベクトル場の作る線形空間を Lie 環に変える.

A. Lie 環　Lie 環の例に，ベクトル積を演算にもつ，向きづけられた3次元線形 Euclid 空間がある．ベクトル積は双線形かつ歪対称で，次の Jacobi の恒等式を満たす.

$$[[A, B], C]+[[B, C], A]+[[C, A], B] = 0.$$

定義　**Lie 環**とは，Jacobi の恒等式を満たす双線形かつ歪対称な演算 $L\times L \to L$ をもつ線形空間 L をいう.

普通，演算を [,] で表わし，**交換子積**(単に交換子)という.

問　$n\times n$ 行列全体は，交換子を $[A, B]=AB-BA$ と定めれば，Lie 環になることを示せ.

B. ベクトル場と微分作用素　M を滑らかな多様体，$\boldsymbol{A}$ を M 上の滑らかなベクトル場とする．つまり，各点 $\boldsymbol{x}\in M$ に，接ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\in TM_{\boldsymbol{x}}$ が与えられている．このような各ベクトル場には，次の2つの対象が結びつく.

1. 微分同相の1-パラメーター群*)，または，**流れ** $A^t: M\to M$，その速度場は $\boldsymbol{A}$ である(図168)：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}).$$

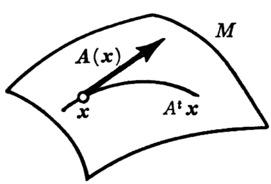


図168　ベクトル場によって与えられる微分同相の群

*)　常微分方程式論の，存在，一意性，微分可能性の各定理により，多様体 M がコンパクトであれば，群 A^t が定まる．一般の場合には，写像 A^t は $\boldsymbol{x}$ の近傍でだけ，それも小さい t に対してのみ定まる．以下の構成には，これで十分である.

2. 1階微分作用素 L_A 場 A 方向への微分を問題にする．関数 $\varphi: M\to\mathbf{R}$ に対する**場 A 方向の微分**とは，新しい関数 $L_A\varphi$ で点 $\boldsymbol{x}$ における値が次のものである．

$$(L_A\varphi)(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi(A^t\boldsymbol{x}).$$

問 作用素 L_A は線形であることを示せ：

$$L_A(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 L_A\varphi_1+\lambda_2 L_A\varphi_2 \qquad (\lambda_1, \lambda_2\in\mathbf{R}).$$

また，Leibniz の公式 $L_A(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1 L_A\varphi_2+\varphi_2 L_A\varphi_1$ を示せ．

例 $(x_1, \cdots, x_n)$ を M 上の局所座標とする．この座標系では，ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ は成分 $(A_1(\boldsymbol{x}), \cdots, A_n(\boldsymbol{x}))$ で表わされる．流れ A^t は，微分方程式系

$$\dot{x}_1 = A_1(\boldsymbol{x}), \quad \cdots, \quad \dot{x}_n = A_n(\boldsymbol{x})$$

で与えられ，したがって関数 φ の $\boldsymbol{A}$ 方向の微分は

$$L_A\varphi = A_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$$

である．こうして座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ では，作用素 L_A は

$$L_A = A_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

の形であるが，これは座標空間における1階線形微分作用素の一般形に外ならない．

問 ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と流れ A^t，微分作用素 L_A との対応は1対1であることを示せ．

C. 2つのベクトル場の Poisson 括弧 多様体 M 上に，2つのベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が与えられたとする．対応する流れ A^t, B^s は一般には可換ではない：$A^tB^s\neq B^sA^t$ (図169).

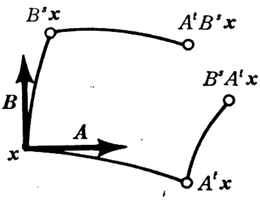


図169 非可換な流れ

問 例を挙げよ．

［解］ (x_1, x_2) 平面上の場 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{B}=x_1\boldsymbol{e}_2$．——

2つの流れ A^t, B^s の非可換性の度合を量るために，2点 $A^tB^s\boldsymbol{x}$ と $B^sA^t\boldsymbol{x}$ とを考えよう．この2点間の差を評価するために，多様体 M 上の滑らかな関数 φ の2点における値を比べよう．差

$$\Delta(t,s;\boldsymbol{x}) = \varphi(A^tB^s\boldsymbol{x}) - \varphi(B^sA^t\boldsymbol{x})$$

は明らかに微分可能な関数で，$s=0$ と $t=0$ に対して 0 となる．よって，$s=t=0$ で Δ を s,t の Taylor 級数に展開すると，0 でない最初の項は st を含むが，他の2次の項は消える．原点 O でこの主要な双線形項を計算しよう．

補題1 $s=t=0$ における Δ の混合微分は，$\boldsymbol{A}$ 方向と $\boldsymbol{B}$ 方向の微分の交換子積に等しい：

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s=t=0}\varphi(A^tB^s\boldsymbol{x}) - \varphi(B^sA^t\boldsymbol{x}) = (L_BL_A\varphi - L_AL_B\varphi)(\boldsymbol{x}).$$

証明 L_A の定義により

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\varphi(A^tB^s\boldsymbol{x}) = (L_A\varphi)(B^s\boldsymbol{x}),$$

関数 $L_A\varphi$ を ψ と書けば，L_B の定義により

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\psi(B^s\boldsymbol{x}) = (L_B\psi)(\boldsymbol{x}).$$

よって，

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s=t=0}\varphi(A^tB^s\boldsymbol{x}) = (L_BL_A\varphi)(\boldsymbol{x}). \qquad \blacksquare$$

さて，ここに現われた微分の交換子積 $L_BL_A - L_AL_B$ を考えよう．一見すると，これは2階の微分作用素である．

補題2 作用素 $L_BL_A - L_AL_B$ は1階の線形微分作用素である．

証明 $(A_1, \cdots, A_n)$, $(B_1, \cdots, B_n)$ を M の局所座標系 $(x_1, \cdots, x_n)$ における場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の成分とする．このとき

$$\begin{aligned} L_BL_A\varphi &= \sum_{i=1}^n B_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi \\ &= \sum_{i,j=1}^n B_i\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n B_iA_j\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}. \end{aligned}$$

$L_AL_B\varphi$ を引くと，φ の2階微分の項は消えて

$$(L_BL_A - L_AL_B)\varphi = \sum_{i,j=1}^n\left(B_i\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i\frac{\partial B_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}. \qquad \blacksquare$$

ところで，各1階線形微分作用素はベクトル場によって与えられるから，この作用素 $L_BL_A - L_AL_B$ もまた，或るベクトル場 $\boldsymbol{C}$ に対応する．

定義 多様体 M 上の2つのベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の **Poisson 括弧**または**交換子積**とは[*]，

$$L_C = L_B L_A - L_A L_B$$

となるベクトル場 $\boldsymbol{C}$ をいう．

2つのベクトル場の Poisson 括弧を次のように書く．

$$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}].$$

問 座標系 x_i で，場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が成分 (A_i), (B_i) によって与えられたとする．Poisson 括弧の成分を求めよ．

［解］ 補題2を証明するとき，すでに次式を示した．

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]_j = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i}.$$

問 $\boldsymbol{A}_1$ は点 O のまわりを角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ で回転する剛体の速度が作る線形ベクトル場[†]とし，$\boldsymbol{A}_2$ は角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ で回転するもののベクトル場とする．Poisson 括弧 $[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2]$ を求めよ．

D. Jacobi の恒等式

定理 多様体 M 上のベクトル場の作る線形空間は Poisson 括弧により，Lie 環となる．

証明 Poisson 括弧の線形性，歪対称性は明らかである．Jacobi の恒等式を証明しよう．Poisson 括弧の定義により

$$\begin{aligned} L_{[[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{C}]} &= L_C L_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]} - L_{[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]} L_C \\ &= L_C L_B L_A - L_C L_A L_B + L_A L_B L_C - L_B L_A L_C. \end{aligned}$$

和 $L_{[[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}],\boldsymbol{C}]} + L_{[[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}],\boldsymbol{A}]} + L_{[[\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}],\boldsymbol{B}]}$ には全部で12項現われる．各項はこの和の中に2度，符号を変えて現われる．▮

E. 流れが可換になるための条件 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ は多様体 M 上のベクトル場とする．

定理 流れ A^t と B^s とは，対応するベクトル場の Poisson 括弧が0に等しいとき，かつ，そのときに限り可換である．

証明 $A^t B^s \equiv B^s A^t$ であれば，補題1によって，$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]=0$ である．$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]=0$ であれば，補題1により，任意の関数 φ に対して任意の点 $\boldsymbol{x}$ において，

---

*) 多くの本は，逆の符号をとる．［このために，Hamilton 関数の Poisson 括弧の符号と合う（§40，系5）．］

†) §26，D 項の例より $\dot{\boldsymbol{q}}=[\omega_1, \boldsymbol{q}]$．この $\dot{\boldsymbol{q}}$ のことをいう．これは $\boldsymbol{q}$ について線形である．

$$\varphi(A^tB^s\boldsymbol{x})-\varphi(B^sA^t\boldsymbol{x})=o(s^2+t^2) \qquad (s\to 0,\ t\to 0)$$

である．これから十分小さい s と t に対して，$\varphi(A^tB^s\boldsymbol{x})=\varphi(B^sA^t\boldsymbol{x})$ が出ることを示そう．この関係式を局所座標に適用すれば（$\varphi=x_1, \cdots, \varphi=x_n$ として），$A^tB^s\equiv B^sA^t$ となる．

(t,s) 平面上で長方形 $0\le t\le t_0$, $0\le s\le s_0$（図170）を考えよう．$(0,0)$ から (t_0,s_0) へ至る，座標軸に平行な有限個の線分からなる道のおのおのに，流れ A^t と B^s の変換の積を対応させよう．線分 $t_1\le t\le t_2$ には $A^{t_2-t_1}$ を，線分 $s_1\le s\le s_2$ には $B^{s_2-s_1}$ を対応させる．変換は線分が $(0,0)$ から出る順に施すことにする．

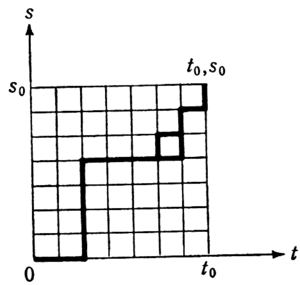


図170　流れの可換性の証明のために

こうして，たとえば辺（$0\le t\le t_0$, $s=0$）と（$t=t_0$, $0\le s\le s_0$）とには，積 $B^{s_0}A^{t_0}$ が対応し，辺（$t=0$, $0\le s\le s_0$）と（$s=s_0$, $0\le t\le t_0$）とには，積 $A^{t_0}B^{s_0}$ が対応する．

さらに，(t,s) 平面上のこのようなすべての道に，多様体 M 上の，点 $\boldsymbol{x}$ を出発し，流れ A^t, B^s の軌跡からなる道を対応させよう（図171）．(t,s) 平面上の道に変換 $A^{t_1}B^{s_1}\cdots A^{t_n}B^{s_n}$ が対応すれば，多様体 M 上では，対応する道は点 $A^{t_1}B^{s_1}\cdots A^{t_n}B^{s_n}\boldsymbol{x}$ で終る．

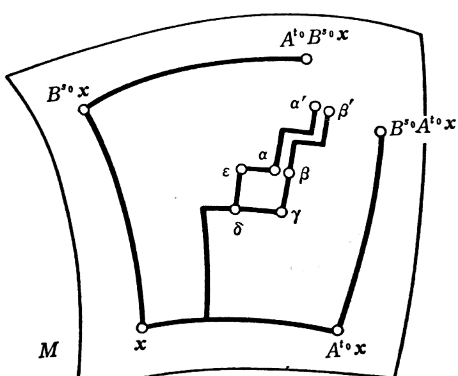


図171　曲4辺形 $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$

実はこれらの道がすべて，1点 $A^{t_0}B^{s_0}x=B^{s_0}A^{t_0}x$ で終ることを示すのが目標である．

2線分 $(0\leq t\leq t_0)$ と $(0\leq s\leq s_0)$ とを N 等分して，矩形全体を N^2 個の小矩形に分割する．道 $(0,0)\to(t_0,0)\to(t_0,s_0)$ から，道 $(0,0)\to(0,s_0)\to(t_0,s_0)$ へ移る手続きは，各小矩形の隣り合う1組の辺をもう1組の辺で置きかえるという N^2 個の段階を経て完了する（図172）．

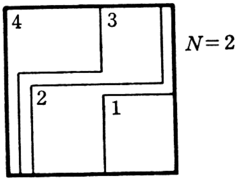


図172 1組の辺から，もう一方の辺へ移る手続き

多様体 M 上ではこの小矩形に一般には閉じない曲4辺形 $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$ が対応する（図171）．t,s の最大値に対応する頂点 α,β 間の距離*) を考えよう．上に見たように，$\rho(\alpha,\beta)<C_1N^{-3}$ である（ここで，定数 $C_1>0$ は N に無関係）．微分方程式の解が初期値について微分可能であるという定理を使えば，このことから多様体 M 上の道 $x\delta\gamma\beta\beta'$ と $x\delta\varepsilon\alpha\alpha'$ の終点 α',β' 間の距離の評価式を導くのは難しくはない．つまり，$\rho(\alpha',\beta')<C_2N^{-3}$ となる．定数 $C_2>0$ もまた N にはよらない．ところで，$B^{s_0}A^{t_0}x$ から $A^{t_0}B^{s_0}x$ へ移る手続きを，このような N^2 個の段階に分けた．よって，

$$\rho(A^{t_0}B^{s_0}x, B^{s_0}A^{t_0}x)\leq N^2C_2N^{-3},\qquad \forall N$$

となる．したがって，$A^{t_0}B^{s_0}x=B^{s_0}A^{t_0}x$ となる．∎

F. Lie 群の Lie 環 群 G が **Lie 群**であるとは，G が微分可能多様体であり，その群演算（積，逆元をとること）が微分可能な写像 $G\times G\to G$，$G\to G$ であるものをいう．Lie 群 G の単位元における接空間 TG_e は自然な Lie 環の構造をもつ．それは次のように定義される．

各接ベクトル $\boldsymbol{A}\in TG_e$ には，速度ベクトル $\boldsymbol{A}=d/dt|_{t=0}A^t$ をもつ1-パラメーター部分群 A^t が対応する．

2つの部分群 A^t, B^s の非可換性の度合は，積 $A^tB^sA^{-t}B^{-s}$ によって量られる．ところで，次のような部分群 C^r がただ1つ存在する．

$$\rho(A^tB^sA^{-t}B^{-s}, C^{st})=o(s^2+t^2)\qquad (s\to0,\ t\to0).$$

対応するベクトル $\boldsymbol{C}=d/dr|_{r=0}C^r$ を，ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ との Lie 交換子 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ という．

*) M 上の或る Riemann 計量による距離．

接空間 TG_e に，このように導入した交換子演算は，TG_e を Lie 環にする(つまり，演算が双線形，歪対称で，Jacobi の恒等式を満たす)ことが確かめられる．この Lie 環を **Lie 群 G の Lie 環**という．

問　3次元 Euclid 空間の回転群 $SO(3)$ の Lie 環で交換子演算を行え．——

ベクトル場の Poisson 括弧を，多様体 M 上のすべての微分同相が作る《無限次元 Lie 群》に対する Lie 交換子として定義できる[*]ことを補題1は示す．

一方，Lie 交換子を Lie 群 G 上のベクトル場に対する Poisson 括弧を使って定義することができる．

$g\in G$ とする．**右移動** R_g とは，写像 $R_g: G\to G$, $R_g h=hg$ をいう．点 e における R_g の微分は TG_e を TG_g へ写す．こうして，各ベクトル $\boldsymbol{A}\in TG_e$ に群上のベクトル場が対応する．この場は右移動 $(R_g)_*\boldsymbol{A}$ のすべてからなり，**右不変な場**という．明らかに，群上の右不変な場は単位元における値で一意的に定まる．

問　Lie 群 G 上の右不変な2つのベクトル場の Poisson 括弧は右不変な場であり，単位元における値はもとの場の単位元における値の Lie 交換子に等しいことを示せ．

§40　Hamilton 関数の Lie 環

シンプレクティック多様体上の Hamilton ベクトル場は，すべてのベクトル場が作る Lie 環の部分環をなす．Hamilton 関数も Lie 環を作る．この Lie 環の演算を，関数の Poisson 括弧という．Hamilton 相流の第1積分は，Hamilton 関数が作る Lie 環の部分環をなす．

A. 2つの関数の Poisson 括弧　(M^{2n}, ω^2) をシンプレクティック多様体とする．この多様体上に与えられた関数 $H: M^{2n}\to\mathbf{R}$ には，M^{2n} の正準変換からなる1-パラメーター群 $g^t{}_H: M^{2n}\to M^{2n}$，つまり，Hamilton 関数が H であるような相流が対応する[†]．

$F: M^{2n}\to\mathbf{R}$ を多様体上の別の関数とする．

定義　シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) 上の**関数 F と H の Poisson 括弧** (F, H) とは，Hamilton 関数 H をもつ相流に沿って，関数 F を微分したも

---

*) Poisson 括弧における符号の選び方はこの理由による．

†) §39, B 項の脚注を参照．

のをいう．つまり，

$$(F, H)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(g^t{}_H(x)).$$

こうして，2つの関数の Poisson 括弧は，また M 上の関数である．

系 1 関数 F と H の Poisson 括弧が恒等的に 0 に等しいとき：$(F, H) \equiv 0$, かつ，そのときに限り，F は H を Hamilton 関数とする相流の第1積分である．——

シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) 上の 1-形式とベクトル場との間の同型対応 I を使えば，Poisson 括弧の定義を少し違った形で与えることができる．この同型は次の関係式で定義される (§37).

$$\omega^2(\boldsymbol{\eta}, I\omega^1) = \omega^1(\boldsymbol{\eta}).$$

相流 $g^t{}_H$ の速度ベクトルが IdH である．これから，次の系が従う．

系 2 関数 F と H の Poisson 括弧は，H を Hamilton 関数にもつ相流の速度ベクトルに対する，1-形式 dF の値に等しい．すなわち，

$$(F, H) = dF(IdH). \qquad ——$$

前出の公式をもう一度使えば，次の系が得られる．

系 3 関数 F と H の Poisson 括弧は，F, H を Hamilton 関数にもつ2つの相流の速度ベクトルの《歪スカラー積》に等しい：

$$(F, H) = \omega^2(IdH, IdF). \qquad ——$$

今や，次のことは自明である．

系 4 関数 F と H の Poisson 括弧は，F と H について歪対称かつ双線形である：

$$(F, H) = -(H, F),$$
$$(H, \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = \lambda_1 (H, F_1) + \lambda_2 (H, F_2) \qquad (\lambda_i \in \mathbf{R}). \qquad ——$$

以上の議論はいかにも明白であるが，それでも自明でない結論を導く．それは次の E. Noether の定理の一般化を含む．

定理 シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) 上の Hamilton 関数 H が，Hamilton 関数 F の定める正準変換の 1-パラメーター群で不変であれば，F は H を Hamilton 関数にもつ系の第1積分である．

証明 実際，条件により H は流れ $g^t{}_F$ の第1積分である．それ故，(H, F)

$=0$ (系1). よって, $(F, H)=0$ (系4)となり, F は第1積分である(系1). ∎

問1 正準座標空間 $\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$, $\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})=[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}]=(I\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ において, 2つの関数 F, H の Poisson 括弧を計算せよ.

［解］ 系3によって, 次のようになる.

$$(F, H)=[IdH, IdF]=[\mathbf{grad}\, H, \mathbf{grad}\, F]=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

(I がシンプレクティックであること, 基底 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ では, I が $\begin{bmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{bmatrix}$ の形であることを使う.)

問2 基底関数 p_i, q_i の Poisson 括弧を計算せよ.

［解］ 基底関数のグラジエントは《シンプレクティック基底》をつくる. その歪スカラー積は次の通りである.

$$(p_i, p_j)=(q_i, q_j)=0,$$
$$(q_i, p_j)=-(p_i, q_j)=\delta_{ij}.$$

問3 写像 $A: \mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\to(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}))$ は, 任意の2関数の Poisson 括弧が変数 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ と変数 $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ とにおいて一致するとき, かつ, このときに限り正準である. これを示せ:

$$(F, H)_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}}-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{P}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{Q}}-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{Q}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{P}}=(F, H)_{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}}.$$

［解］ A を正準とする. このとき, シンプレクティック構造 $d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}$ と $d\boldsymbol{P}\wedge d\boldsymbol{Q}$ とは一致する. ところで, Poisson 括弧 (F, H) は, 座標に関しては異なるものの, シンプレクティック構造については, 不変な形で定義されている. よって,

$$(F, H)_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}}=(F, H)=(F, H)_{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}}.$$

逆に, Poisson 括弧 $(P_i, Q_i)_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}}$ が問2の標準的な形をしているとする. このとき, 明らかに, $d\boldsymbol{P}\wedge d\boldsymbol{Q}=d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}$, したがって, 写像 A は正準である.

問4 積の Poisson 括弧は Leibniz の公式に従って計算されることを示せ.

$$(F_1F_2, H)=F_1(F_2, H)+F_2(F_1, H).$$

［ヒント］ Poisson 括弧 (F_1F_2, H) は積 F_1F_2 を場 IdH の方向に微分したものである.

B. Jacobi の恒等式

定理 3つの関数 A, B, C の Poisson 括弧は, Jacobi の恒等式を満たす:

$$((A, B), C)+((B, C), A)+((C, A), B)=0.$$

系 Poisson の定理 F_1, F_2 は Hamilton 関数 H をもつ系の第1積分とする. このとき, Poisson 括弧 (F_1, F_2) もこの系の第1積分である.

系の証明 Jacobi の恒等式によって

$$((F_1, F_2), H) = (F_1, (F_2, H)) + ((F_1, H), F_2) = 0+0. \quad \blacksquare$$

このように，2つの第1積分を知れば簡単な計算によって，第3, 第4, … の第1積分が得られる．もちろん，得られる積分のすべてが，本質的に新しいわけではない．M^{2n} 上の独立な関数は $2n$ 個を超えないからである．時にはそれより前の積分の関数となるもの，定数，たとえば，0が得られる．新しい積分が得られることもある．

問 力学系の運動量，角運動量のベクトルの成分 $p_1, p_2, p_3, M_1, M_2, M_3$ の Poisson 括弧を求めよ．

［解］ $(M_1, M_2) = M_3$, $(M_1, p_1) = 0$, $(M_1, p_2) = p_3$, $(M_1, p_3) = -p_2$, 等．

これから次の定理が導かれる．

定理 或る力学系で角運動量の2成分 M_1 と M_2 が不変であれば，第3成分も不変である．——

Jacobi の恒等式の証明 次の和を考えよう．

$$((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B).$$

この和は《2階偏導関数の1次結合》である．A の2階微分を含む項

$$((A, B), C) + ((C, A), B) = (L_C L_B - L_B L_C) A$$

を計算しよう．L_ξ は ξ 方向の微分であり，$\boldsymbol{F}$ は Hamilton 関数 F をもつ Hamilton 場である．

ところで，§39, 補題2により，交換子 $L_C L_B - L_B L_C$ は**1階**の微分作用素である．ゆえに，この和は A の2階微分を含まない．B, C の2階微分についても同様である．したがって，和は0に等しい．■

系5 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ は Hamilton 関数 B, C をもつ Hamilton ベクトル場とする．このとき，ベクトル場の Poisson 括弧 $[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]$ は Hamilton ベクトル場であり，その Hamilton 関数は Hamilton 関数の Poisson 括弧 (B, C) に等しい．

証明 $(B, C) = D$ とおく．Jacobi の恒等式は次のように変形できる．

$$(A, D) = ((A, B), C) - ((A, C), B),$$

$$L_D = L_C L_B - L_B L_C, \qquad L_D = L_{[B,C]}.$$

これが求めるものである．■

C. Hamilton 場，Hamilton 関数，第1積分の各 Lie 環 Lie 環の線形部分空間が**部分環**であるとは，部分空間の任意の2元の交換子積が，この部分空

間に属するときをいう．Lie 環の部分環はそれ自身 Lie 環である．先の系はとくに次のことを含む．

系6 シンプレクティック多様体上の Hamilton ベクトル場は，すべてのベクトル場が作る Lie 環の部分環である．——

第1積分に関する Poisson の定理は次のように定式化し直せる．

系7 Hamilton 相流の第1積分全体は，すべての関数が作る Lie 環の部分環である．——

Hamilton 関数の Lie 環は，自然に Hamilton ベクトル場の Lie 環の上へ写すことができる．このためには各関数 H に Hamilton 関数 H をもつ Hamilton ベクトル場 $\boldsymbol{H}$ を対応させるとよい．

系8 関数の Lie 環から Hamilton ベクトル場の Lie 環の上への写像は，環の準同型である．その核は局所定数関数よりなる．M^{2n} が連結であれば，核は1次元であり定数よりなる．

証明 この写像は線形である．系5によって，この写像は関数の Poisson 括弧をベクトル場の Poisson 括弧へ移す．核は $IdH\equiv 0$ となる関数 H よりなる．I は同型であるから $dH\equiv 0$，ゆえに $H=\text{const}$. ∎

系9 Hamilton 関数 H_1, H_2 をもつ相流が可換であるためには，関数 H_1, H_2 の Poisson 括弧が，(局所的に)定数となることが必要かつ十分である．

証明 §39, E 項の定理により，$[\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2]=0$ が必要十分であり，この条件は系8により，$d(H_1, H_2)\equiv 0$ と同値である．∎

こうして，E. Noether の定理のもう1つの一般化が得られた．つまり，<u>考えている流れと可換な流れを知れば，もとの流れの第1積分が構成できる</u>．

D. 局所 Hamilton ベクトル場 (M^{2n}, ω^2) をシンプレクティック多様体とし，g^t: $M^{2n}\to M^{2n}$ をシンプレクティック構造を保つ微分同相の1-パラメーター群とする．g^t は Hamilton 相流であろうか．

例 M^{2n} が2次元トーラス T^2 であり，その点は座標の組 $(p, q) \bmod 1$ で与えられているとする．ω^2 を通常の面積要素 $dp\wedge dq$ とする．平行移動の族 $g^t(p, q)=(p+t, q)$ を考えよう(図173)．写像 g^t はシンプレクティック構造(つまり面積)を保つ．対応するベクトル場$(\dot{p}=1,\ \dot{q}=0)$を Hamilton 関数によって与えることができるだろうか．もしも $\dot{p}=-\partial H/\partial q$, $\dot{q}=\partial H/\partial p$ であると，$\partial H/\partial p=0$, $\partial H/\partial q=-1$ つまり $H=-q+C$ となる．ところで，q は T^2 上の局所座標でしかない．よって，$\partial H/\partial p=0$, $\partial H/\partial q=-1$

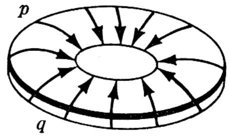


図173 トーラス上の局所 Hamilton 場

となる写像 $H: T^2 \to \mathbf{R}$ は存在しない.

ゆえに, g^t は Hamilton 相流ではない.

定義 シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) 上の**局所 Hamilton ベクトル場**とは, ベクトル場 $I\omega^1$ をいう. ここに, ω^1 は M^{2n} 上の閉じた 1-形式である.

閉じた 1-形式は, 局所的には関数の微分である: $\omega^1 = dH$. しかし, 関数 H を多様体 M^{2n} の上全体へ拡張しようとすると, 《多価の Hamilton 関数》となることがある. なぜなら, 単連結ではない多様体上の閉じた 1-形式は微分とは限らないからである(たとえば, T^2 上の形式 dq).

局所 Hamilton ベクトル場が与える相流を**局所 Hamilton 相流**という.

問 シンプレクティック多様体の微分同相の 1-パラメーター群は, 局所 Hamilton 相流であるとき, かつそのときに限り, シンプレクティック構造を保つことを示せ.

[ヒント] §38, A 項を見よ.

問 シンプレクティック空間 $\mathbf{R}^{2n}$ では正準な ($dp \wedge dq$ を保つ) 微分同相の 1-パラメーター群は, 常に Hamilton 相流であることを示せ.

[ヒント] $\mathbf{R}^{2n}$ の閉じた 1-形式はすべて関数の微分である.

問 局所 Hamilton ベクトル場は, すべての場が作る Lie 環の部分環をなすことを示せ. このとき, 2つの局所 Hamilton 場の Poisson 括弧は, 本来の Hamilton 場である. その Hamilton 関数は与えられたベクトル場 ξ, η から, 式 $H = \omega^2(\xi, \eta)$ によって一意的に*) 定まる. 以上のことを示せ.

こうして, Hamilton 場は局所 Hamilton 場の Lie 環の中でイデアルを作る.

§41 シンプレクティック幾何学

線形空間における Euclid 構造は対称な双線形形式によって与えられるが, シンプレクティック構造は歪対称形式によって与えられる. シンプレクティック空間の幾何学は, Euclid 幾何学と類似点は多いものの, 相違点も多くまた新鮮である.

A. シンプレクティックな線形空間 $\mathbf{R}^{2n}$ を偶数次元線形空間とする.

定義 $\mathbf{R}^{2n}$ の**線形シンプレクティック構造**とは, $\mathbf{R}^{2n}$ 上に与えられた双線形

*) 定数項を除かないで.

歪対称な非退化2-形式*)をいう．この形式を歪スカラー積といい，$[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$ と表わす．

シンプレクティック構造 [,] をもつ $\mathbf{R}^{2n}$ を，**線形シンプレクティック空間**という．

例　$(p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n)$ を $\mathbf{R}^{2n}$ の座標関数とし，ω^2 を次の2-形式とする．

$$\omega^2=p_1\wedge q_1+\cdots+p_n\wedge q_n.$$

この形式は非退化歪対称であるから，歪スカラー積として採れる：$[\xi,\eta]=\omega^2(\xi,\eta)$．こうして，座標空間 $\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\}$ にシンプレクティック構造が入る．この構造を**標準的**という．

標準的シンプレクティック構造では，2本のベクトル ξ,η の歪スカラー積は，平行4辺形 (ξ,η) を n 枚の座標平面 (p_i,q_i) へ射影したときの向きを考えた面積の和に等しい．

シンプレクティック空間の2本のベクトル ξ,η が**歪直交する**$(\xi\perp\eta)$とは，その歪スカラー積が0に等しいときをいう．

問　$\xi\perp\xi$，つまり，どのベクトルも自分自身と歪直交することを示せ．——

与えられたベクトル η に歪直交するベクトルの全体を，η の**歪直交補空間**という．

問　$\eta\neq0$ の歪直交補空間は η を含み，$2n-1$ 次元の超平面であることを示せ．

[ヒント]　もしも全ベクトルが η に歪直交すれば，形式 [,] は退化することになる．

B. シンプレクティック基底　Euclid 構造は基底を適当に選べば(正規直交でなければならぬ)，特殊な標準形をもつスカラー積で与えられる．全く同様に，シンプレクティック構造も基底を適当に選べば，上述の標準的な形をとる．

問　A 項の例で，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{p_i},\boldsymbol{e}_{q_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ の歪スカラー積を求めよ．

[解]　$p_1\wedge q_1+\cdots+p_n\wedge q_n$ の定義より，次の関係式が導かれる．

$$[\boldsymbol{e}_{p_i},\boldsymbol{e}_{p_j}]=[\boldsymbol{e}_{q_i},\boldsymbol{e}_{q_j}]=0,\qquad [\boldsymbol{e}_{p_i},\boldsymbol{e}_{q_j}]=\delta_{ij}. \tag{1}$$

さて，一般のシンプレクティック空間に戻ろう．

定義　**シンプレクティック基底**とは，歪スカラー積が(1)の形をとる $2n$ 個のベクトル $\boldsymbol{e}_{p_i},\boldsymbol{e}_{q_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ の組をいう．

いい換えると，各基底ベクトルは，それに共役な1つを除くすべての基底ベ

*)　$\mathbf{R}^{2n}$ の2-形式は，$([\xi,\eta]=0,\forall\eta)\Longrightarrow(\xi=0)$ のとき非退化である．

クトルと歪直交する．共役なベクトル同士の歪スカラー積は ±1 に等しい．

定理 各シンプレクティック空間に，シンプレクティック基底が存在する．基底の第1ベクトルとして，0でない任意のベクトル $\boldsymbol{e}$ を採ることができる．——

この定理はこれに対応する Euclid 幾何学の定理の完全な類似であり，殆ど同じようにして証明される．

ベクトル $\boldsymbol{e}$ は0でないから，これに歪直交しないベクトル $\boldsymbol{f}$ が存在する(形式 [,] は非退化である)．このベクトルの長さを選べば，$\boldsymbol{e}$ との歪スカラー積が1となるようにできる．よって，$n=1$ の場合，定理は証明された．

$n>1$ であれば，2本のベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ の歪直交補空間 D を考える(図174)．D は $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ の各歪直交補空間の交わりである．この2つの $2n-1$ 次元部分空間は一致しない．$\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{f}$ の歪直交補空間には属さないからである．よって，その交わり D は偶数次元 $2n-2$ である．

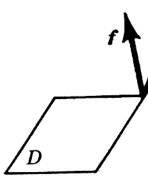


図174 歪直交補空間

D が $\mathbf{R}^{2n}$ のシンプレクティック部分空間であること，つまり，歪スカラー積 [,] が D 上非退化であることを示そう．実際，ベクトル $\boldsymbol{\xi} \in D$ が空間 D に歪直交すれば，$\boldsymbol{e}$ とも $\boldsymbol{f}$ とも歪直交し，このベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は $\mathbf{R}^{2n}$ と歪直交する．これは $\mathbf{R}^{2n}$ 上 [,] が非退化であることに矛盾する．故に，D^{2n-2} はシンプレクティックである．

さて，D^{2n-2} のシンプレクティック基底にベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ を付け加えると，$\mathbf{R}^{2n}$ のシンプレクティック基底を得る．定理の証明は，n に関する帰納法によって完成する．

系 同じ次元のシンプレクティック空間はすべて同型である．——

シンプレクティック基底を座標軸の単位ベクトルとしてとれば，座標系 p_i, q_i では 2-形式 [,] が標準形 $p_1 \wedge q_1 + \cdots + p_n \wedge q_n$ となる．このような座標系を**シンプレクティック**という．

C. シンプレクティック群　Euclid 構造には Euclid 構造を保つ線形変換からなる直交群が結びついている．シンプレクティック空間では同様の役割をシンプレクティック群が果たす．

定義　シンプレクティック空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の線形変換 $S: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ が，**シンプレクティック**であるとは，S が歪スカラー積を保つときをいう：

$$[S\boldsymbol{\xi}, S\boldsymbol{\eta}] = [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}], \qquad \forall \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^{2n}.$$

$\mathbf{R}^{2n}$ のシンプレクティック変換全体を**シンプレクティック群**といい，$Sp(n, \mathbf{R})$ と表わす．

2つのシンプレクティック変換の積がシンプレクティックであることは明らかである．シンプレクティック群という用語が使えるためには，シンプレクティック変換が正則であることを示すべきである．このとき，逆変換がまた，シンプレクティックであることは明らかである．

問　群 $Sp(1, \mathbf{R})$ は，行列式1の2次実行列が作る群に同型であり，ドーナツ(3次元)の内部に同相であることを示せ．

定理　標準的シンプレクティック空間 $\mathbf{R}^{2n} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ の線形変換 $S: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ は，正準であるとき，つまり次の2-形式 ω^2 を保つとき，かつこのときに限りシンプレクティックである：

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n.$$

証明　$\mathbf{R}^{2n}$ の接空間を $\mathbf{R}^{2n}$ と自然に同一視すると，2-形式 ω^2 は [,] へ移る．■

系　任意のシンプレクティック変換の行列式は1に等しい．

証明　正準変換が形式 ω^2 の外巾(べき)乗を保つことは既に知っている(§38, B 項)．ところで，外 n 乗は(定数倍を除いて) $\mathbf{R}^{2n}$ の体積要素である．よって，標準的シンプレクティック空間 $\mathbf{R}^{2n} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ のシンプレクティック変換 S は体積要素を保ち，したがって $\det S = 1$ である．

ところで，すべての線形シンプレクティック構造は，シンプレクティック座標系において標準形に書けるから，任意のシンプレクティック空間のシンプレクティック変換はその行列式が1に等しい．■

定理　線形変換 $S: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ は，或るシンプレクティック基底をシンプレクティック基底に移すとき，かつ，そのときに限りシンプレクティックである．

(このとき，任意のシンプレクティック基底がシンプレクティック基底に移る.)

証明 基底ベクトルの1次結合を任意に2つとる．その歪スカラー積は基底ベクトルの歪スカラー積で表わされる．変換が基底ベクトル間の歪スカラー積を変えなければ，任意の2つのベクトルの歪スカラー積をも変えない．▮

D. シンプレクティック空間の平面 Euclid空間ではすべての平面が平等である．つまり，どの平面も運動によって，他の任意の平面へ移すことができる．

この観点から，線形シンプレクティック空間を考えよう．

問 シンプレクティック空間の0でないベクトルは，シンプレクティック変換によって，他の任意の0でないベクトルへ移せる．これを示せ．

問 シンプレクティック空間 $\mathbf{R}^{2n}$, $n>1$ では，与えられた2次元平面から，シンプレクティック変換によって，すべての2次元平面が得られるとは限らない．このことを示せ．

[ヒント] (p_1, p_2) 平面と (p_1, q_1) 平面とを考えよ．

定義 シンプレクティック空間の k 次元平面が**零面である***) とは，自分自身に歪直交する，つまり，この平面の任意の2つのベクトルの歪スカラー積が0であるときをいう．

例 シンプレクティック座標系 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ において，座標平面 $(p_1, \cdots, p_n)$ は，零面である．なぜか．

問 零面でない任意の2次元平面は，シンプレクティック変換によって，零面でない別の任意の2次元平面へ移せる．これを示せ．——

シンプレクティック幾何学で計算するとき，シンプレクティック空間に，さらに何か或るEuclid構造を入れると便利なことがある．シンプレクティック座標系 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を固定して，次のスカラー積によってEuclid構造を入れよう．

$$\boldsymbol{x} = \sum p_i \boldsymbol{e}_{p_i} + q_i \boldsymbol{e}_{q_i} \quad \text{に対して,} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum p_i^2 + q_i^2.$$

シンプレクティック基底 $\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_q$ は，このEuclid構造では正規直交系である．歪スカラー積はすべての双線形形式同様，スカラー積によって，

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = (I\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \tag{2}$$

の形に表わされる．ここで，$I: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ は或る作用素である．歪スカラー積の歪対称性により，作用素 I は歪対称である．

問 シンプレクティック基底 $\boldsymbol{e}_{p_i}, \boldsymbol{e}_{q_i}$ で作用素 I の行列を計算せよ．

---

*) 零面は，また，**イソトロピック**ともいう．$k=n$ のときは **Lagrange 面**ともいう．

〔解〕 $\begin{bmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{bmatrix}$, E は n 次単位行列である. ——

このように，$n=1$ のとき（(p, q) 平面上で），I は $90°$ の回転であり，一般の場合には，n 枚の (p_i, q_i) 平面のおのおので，I は $90°$ の回転である.

問　作用素 I はシンプレクティックで，$I^2=-E_{2n}$ であることを示せ. ——

Euclid 構造も，作用素 I も，シンプレクティック空間と不変な形で結びついている訳ではないが，往々にして便利である.

(2) より直ちに，次の定理が導かれる.

定理　シンプレクティック空間の平面 π は，平面 $I\pi$ が π に直交するとき，かつ，そのときに限り，零面である. ——

I は正則であるから，平面 π と $I\pi$ の次元が一致することに注意しよう.

系　$\mathbf{R}^{2n}$ における零面の次元は n を越えない. ——

実際，$k>n$ ならば，$\mathbf{R}^{2n}$ の 2 つの k 次元平面 π と $I\pi$ とは直交できない.

座標シンプレクティック空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の n 次元零面をもう少し詳しく考えて見よう. このような平面の例として，$\boldsymbol{p}$-座標平面がある. $\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ の n 次元座標平面は全部で ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 枚ある.

問　${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 枚の n 次元座標平面のうち，零面であるものは 2^n 枚であることを示せ. つまり，$(1, \cdots, n)$ を 2 つに分けて，$(i_1, \cdots, i_k)$，$(j_1, \cdots, j_{n-k})$ とすると，これには，零面である座標平面 $p_{i_1}, \cdots, p_{i_k}, q_{j_1}, \cdots, q_{j_{n-k}}$ が対応する. ——

正準変換の母関数を調べるとき，次の定理が必要である.

定理　シンプレクティック座標空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の n 次元零面 π は，零面である 2^n 枚の座標平面の少なくとも 1 つに対して，横断的*)である.

証明　P を零面 $(p_1, \cdots, p_n)$ とする (図 175). 共通部分

$$\tau=\pi\cap P$$

を考えよう. τ の次元は k に等しいとする，$0\leq k\leq n$. n 次元空間 P のあらゆ

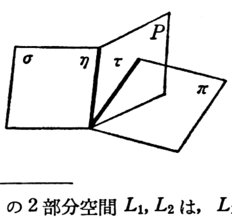


図 175　与えられた平面 π に横断的な座標平面 σ の作り方

---

*)　線形空間 L の 2 部分空間 L_1, L_2 は，$L_1+L_2=L$ のとき，互いに**横断的**であるという. $\mathbf{R}^{2n}$ の 2 つの n 次元平面は，O でのみ交わるとき，かつ，そのときに限り互いに横断的である.

る k 次元部分空間と同様，平面 τ は P 内の $n-k$ 次元座標平面の少なくとも1つに横断的である．この平面を，

$$\eta = (p_{i_1}, \cdots, p_{i_{n-k}}); \quad \tau+\eta = P, \quad \tau\cap\eta = 0$$

とする．零面である n 次元座標平面を，次のように作る．

$$\sigma = (p_{i_1}, \cdots, p_{i_{n-k}}, q_{j_1}, \cdots, q_{j_k}), \quad \eta = \sigma\cap P.$$

初めの平面 π がこの平面 σ と横断的であること，つまり，

$$\pi\cap\sigma = 0$$

を示そう．実際，

$$\left.\begin{array}{l}\tau\subset\pi,\ \ \pi\perp\pi \Longrightarrow \tau\perp\pi \\ \eta\subset\sigma,\ \ \sigma\perp\sigma \Longrightarrow \eta\perp\sigma\end{array}\right\} \Longrightarrow (\tau+\eta)\perp(\pi\cap\sigma) \Longrightarrow P\perp(\pi\cap\sigma).$$

一方，P は n 次元零面である．よって，P に歪直交するベクトルは，すべて P に属する(上の系を見よ)．それ故，$(\pi\cap\sigma)\subset P$．結局，

$$\pi\cap\sigma = (\pi\cap P)\cap(\sigma\cap P) = \tau\cap\eta = 0. \qquad \blacksquare$$

問 π_1, π_2 を，シンプレクティック空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の2枚の k 次元平面とする．シンプレクティック変換によって，常に π_1 を π_2 へ移すことができるか．互いに移り得ない平面のクラスは，幾つ存在するか．

［解］ $k\leq n$ ならば $[k/2]+1$，$k\geq n$ ならば $[(2n-k)/2]+1$．

E. シンプレクティック構造と複素構造 $I^2=-E$ であるから，空間 $\mathbf{R}^{2n}$ にはシンプレクティック構造 $[\ ,\ ]$，Euclid 構造 $(\ ,\ )$ と並んで，複素構造をも導入できる．このとき，$i=\sqrt{-1}$ を掛けることは，作用素 I を施すことと定義する．このとき，空間 $\mathbf{R}^{2n}$ は複素空間 $\mathbf{C}^n$ と同一視できる(たとえば，座標を $z_k=p_k+iq_k$ と与えて)．

$\mathbf{R}^{2n}$ の線形変換で Euclid 構造を保つものは**直交群** $O(2n)$ を作り，複素構造を保つものは複素線形群 $GL(n, \mathbf{C})$ を作る†)．

問 直交かつシンプレクティックな変換は複素変換であり，複素かつ直交である変換はシンプレクティック変換であり，シンプレクティックかつ複素である変換は直交変換であることを示せ．したがって，2群の共通部分は3群の共通部分に等しい：

$$\begin{aligned} O(2n)\cap Sp(n, \mathbf{R}) &= Sp(n, \mathbf{R})\cap GL(n, \mathbf{C}) \\ &= GL(n, \mathbf{C})\cap O(2n)^{\dagger)}. \end{aligned}$$

†) $GL(n, \mathbf{C})$ は n 次複素行列群を意味するが，ここは，複素構造 I を保つ $2n$ 次実行列の群である．実現の仕方が異なるだけで，群としては同じものである．

この共通部分を**ユニタリ群** $U(n)$ という. ——

ユニタリ変換は Hermite スカラー積 $(\xi, \eta)-i[\xi, \eta]$ を保つ. $\mathbf{R}^{2n}$ のスカラー積と歪スカラー積はその実部と虚部である.

§42　多自由度系のパラメーター共鳴

パラメーターが周期的に変化する振動系を調べたとき(§25参照), パラメーター共鳴が或る線形変換《周期間写像》の固有値の挙動に関係することを, 明らかにした. この関係とは, パラメーターが周期的に変化する系の平衡状態は周期間写像の固有値の絶対値がすべて1より小さければ安定であり, 少なくとも1つの固有値の絶対値が1より大きければ不安定である, ということである.

周期的な係数をもつ Hamilton 方程式系から得られる周期間写像はシンプレクティックである. §25で調べたが, 自由度1の系のパラメーター共鳴は平面のシンプレクティック変換の固有値の挙動を解析することに基づく.

本節では, 任意次元の相空間で, 線形シンプレクティック変換の固有値の挙動について同様な解析を行う. (M. G. Krein による)この解析の結果は, 自由度の大きい系でパラメーター共鳴が起る条件を調べる時に応用される.

A. シンプレクティック行列　シンプレクティック空間の線形変換 $S:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ を考えよう. $p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n$ をシンプレクティック座標系とする. この座標系では, 変換は行列 S で与えられる.

定理　変換がシンプレクティックであるためには, シンプレクティック座標 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ における行列 S が, 次の関係式を満たすことが必要十分である.

$$ {}^tSIS=I, \qquad \text{ここで,}\ I=\begin{bmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{bmatrix}. $$

${}^tS$ は S の転置行列である.

証明　シンプレクティックであるための条件($[S\xi, S\eta]=[\xi, \eta]$, $\forall \xi, \eta$)は, 作用素 I を使うとスカラー積によって次の形で表わされる.

$$ (IS\xi, S\eta)=(I\xi, \eta), \qquad \forall \xi, \eta, $$

書きかえて

$$ ({}^tSIS\xi, \eta)=(I\xi, \eta), \qquad \forall \xi, \eta. $$ ∎

B. シンプレクティック変換のスペクトルの対称性

定理　シンプレクティック変換の固有多項式

$$p(\lambda) = \det(S-\lambda E)$$

は再帰的*)，つまり，$p(\lambda)=\lambda^{2n}p(1/\lambda)$ である．

証明　$\det S=\det I=1$，$I^2=-E$，$\det {}^tA=\det A$ であることを使う．上の定理によって，$S=-I\,{}^tS^{-1}I$．よって，

$$p(\lambda) = \det(S-\lambda E) = \det(-I\,{}^tS^{-1}I-\lambda E) = \det(-{}^tS^{-1}+\lambda E)$$
$$= \det(-E+\lambda S) = \lambda^{2n}\det\left(S-\frac{1}{\lambda}E\right) = \lambda^{2n}p\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad \blacksquare$$

系　λ がシンプレクティック変換の固有値であれば，λ^{-1} もその固有値である．——

一方，固有多項式は実係数である．よって，λ が複素固有値ならば，$\bar{\lambda}$ も固有値であり λ には一致しない．

このことから，固有多項式のすべての根 λ は，実軸および単位円周に関して，対称に並ぶ(図176)．これらは，4つ組

$$\lambda,\quad \bar{\lambda},\quad \frac{1}{\lambda},\quad \frac{1}{\bar{\lambda}}\qquad (|\lambda|\neq 1,\ \mathrm{Im}\,\lambda\neq 0),$$

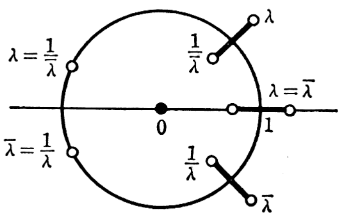


図176　シンプレクティック変換の固有値の分布

あるいは，実軸上の対

$$\lambda=\bar{\lambda},\qquad \frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\bar{\lambda}},$$

あるいは，単位円周上の対

$$\lambda=\frac{1}{\bar{\lambda}},\qquad \bar{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$$

の3種類に分れる．4つ組の各根(そして，対をなす各根)が同一の重複度をもつことは容易に分る．

---

*) 多項式 $a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$ が再帰的とは，係数が $a_0=a_m$，$a_1=a_{m-1}$，… であるときをいう．

C. 安　定　性

定義　変換 S が**安定**であるとは，次のときをいう．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ |\boldsymbol{x}| < \delta \Longrightarrow |S^N \boldsymbol{x}| < \varepsilon, \qquad \forall N > 0.$$

問　シンプレクティック変換 S の固有値が1つでも単位円周上になければ，S は不安定であることを示せ．

［ヒント］　上述の対称性によって固有値が1つでも単位円周上になければ，単位円の外：$|\lambda|>1$ に固有値がある．対応する不変部分空間では，S は《回転を伴う相似》である．

問　線形変換の固有値がすべて相異なり，かつ単位円周上にあれば，この変換は安定であることを示せ．

［ヒント］　固有基底に移れ．

定義　シンプレクティック変換 S が**強安定**であるとは，S に十分近い*)シンプレクティック変換が，すべて安定であるときをいう．

§25 において，$S:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ は固有値 $\lambda_{1,2}=e^{\pm i\alpha}$ が $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，安定であることを見た．

定理　シンプレクティック変換 S の $2n$ 個の固有値がすべて相異なり，かつ単位円周上にあれば，変換 S は強安定である．

証明　$2n$ 個の固有値 λ を，単位円周と実軸に関して対称で，互いに交わらない $2n$ 個の近傍の中へ入れる(図177)．固有多項式の $2n$ 個の根は S の行列要素に連続的に依存する．したがって，行列 S_1 が S に十分近ければ，$2n$ 個の根 λ の各近傍内に，行列 S_1 の固有値 λ_1 がただ1つだけある．さて，どれかの λ_1 が単位円周上になければ，たとえば円の外にあれば，p. 218 の B 項の定理によ

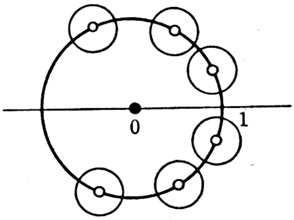


図177　シンプレクティック変換を微小変化させたときの，単純固有値の挙動

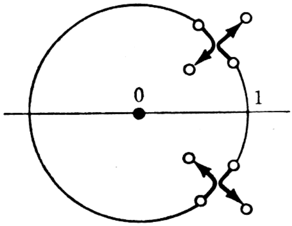


図178　シンプレクティック変換を微小変化させたときの，重複固有値の挙動

*)　1つ固定した基底で，行列 S_1, S として表わすとき，対応する行列要素の差がすべて，十分小さい ε よりも小さいとき，S_1 は S に《十分近い》という．

って，この近傍内にもう1つの点 λ_2, $|\lambda_2|<1$ が入るであろう．こうして，根全体の数が $2n$ を超えるが，これは不可能である．

ゆえに，S_1 の固有根はすべて単位円周上にあり，しかも相異なる．つまり，S_1 は安定である．▮

シンプレクティック変換の固有値 λ は他の固有値と衝突するときにのみ，単位円周を離れるということができる(図178)．このとき，複素共役な固有値も同時に衝突しており，円周上の2つの根の対からは1つの4つ組(または，実数 λ の対)が得られる．

§25から分るように，Hamilton 関数が周期的に変化するような線形正準系でパラメーター共鳴が発生する条件は，まさに対応する相空間のシンプレクティック変換が，安定ではなくなるということである．上の定理より，明らかにこれは単位円周上の固有値が衝突するときにしか起らない．実際には，M. G. Krein が注意したように，このような衝突のすべてが危険なのではない．

固有値 λ, $|\lambda|=1$ は，実は2つの類，**正**と**負**，に分れる．同符号の2根が衝突すると，根は《互いにすり抜け》，単位円周を離れることはできない．これに反して，異符号の2根が衝突すると，一般には，単位円周を離れる．

M. G. Krein [1] の理論は本書の程度を越える．ここでは基本的な結果を問題の形で定式化するにとどめる．

問 $\lambda, \bar{\lambda}$ はシンプレクティック変換 S の単純な(重複度1の)固有値で，$|\lambda|=1$ であるとする．$\lambda, \bar{\lambda}$ に対応する2次元不変平面 π_λ は零面でないことを示せ．

［ヒント］ ξ_1, ξ_2 を固有値 λ_1, λ_2 に対する S の複素固有ベクトルとする．このとき，$\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ ならば，ベクトル ξ_1 と ξ_2 とは歪直交する：$[\xi_1, \xi_2]=0$. ——

ξ を平面 π_λ, $\mathrm{Im}\,\lambda>0$, $|\lambda|=1$ の実ベクトルとする．固有値 λ が**正**であるとは $[S\xi, \xi]>0$ のときをいう．

問 この定義が適切であること，つまり，平面 π_λ 上のベクトル $\xi \neq 0$ のとり方にはよらないことを示せ．

［ヒント］ 平面 π_λ が，歪直交して平行でない2つのベクトルを含めば，π_λ は零面である．——

全く同様に，k-重固有値 λ, $|\lambda|=1$ が**定符号**であるとは，$\lambda, \bar{\lambda}$ に対応する $2k$ 次元不変部分空間上で，2次形式 $[S\xi, \xi]$ が定符号となるときをいう．

問 S が強安定であるためには，すべての固有値 λ が単位円周上にあって定符号であ

ることが，必要かつ十分である．

［ヒント］ 2次形式 $[S\xi, \xi]$ は，S に関して不変である．

§43 シンプレクティック・アトラス

本節では Darboux の定理を証明する．これによると，各シンプレクティック多様体には，そのシンプレクティック構造がもっとも簡単な形：$\omega^2=d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}$ に表わせるような局所座標 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ が存在する．

A. シンプレクティック座標　多様体の定義には，重なり合うチャートの間に条件が必要であった．1つのチャートから別のチャートへの写像 $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ に対する条件である．この写像は座標空間の領域を別の領域へ移す滑らかな写像である．

定義　多様体 M^{2n} のアトラスが**シンプレクティック**であるとは，座標空間 $\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ に，標準的シンプレクティック構造 $\omega^2=d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}$ が入っていて，1つのチャートから他のチャートへ移る写像 $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ が正準変換である（つまり，ω^2 を保つ）ときをいう*)．

問　シンプレクティック・アトラスは，M^{2n} 上にシンプレクティック構造を定めることを示せ．——

逆の命題も正しい．つまり，各シンプレクティック多様体はシンプレクティック・アトラスをもつ．これは次の定理から導かれる．

B. Darboux の定理

定理　ω^2 を空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の点 $\boldsymbol{x}$ の近傍で非退化な閉じた2次微分形式とする．このとき，ω^2 が標準的な形になるよう，点 $\boldsymbol{x}$ の或る近傍に，局所座標系 $(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)$ を選ぶことができる．つまり

$$\omega^2=\sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dq_i. \qquad \text{——}$$

標準的な相空間$(\mathbf{R}^{2n}, \omega^2=d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q})$では証明され，正準変換によって不変な局所的な性格の主張は，この定理によって，すべてのシンプレクティック多様体上へ拡張することができる．

C. 座標 p_1, q_1 を作ること　第1座標 p_1 として，定数でない線形関数をと

*) たとえば，複素解析多様体が同様に定義される．座標空間には，複素構造がなければならず，1つのチャートから他のチャートへ移る変換は複素解析的でなければならない．

ろう(点 $\boldsymbol{x}$ における微分が0でない任意の微分可能な関数をとってよい). 簡単のために, $p_1(\boldsymbol{x})=0$ と考える.

$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{I}dp_1$ によって関数 p_1 に対応する Hamilton 場を表わす(図179). $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})\neq 0$ であるから, 点 $\boldsymbol{x}$ を通りベクトル $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})$ を含まない超平面 N^{2n-1} を引くことができる(N^{2n-1} の代りに, $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})$ に横断的な任意の曲面をとってよい).

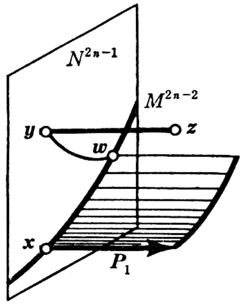


図179 シンプレクティック座標の構成

Hamilton 関数 p_1 をもつ Hamilton 相流 $P_1{}^t$ を考えよう. 流れ $P_1{}^t$ の作用で N から点 $\boldsymbol{z}=P_1{}^t\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{y}\in N)$ へ到達するのに必要な時間 t を $\boldsymbol{z}$ の関数と考える. 常微分方程式論の定理によると, この関数は点 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{2n}$ の近傍で定まり微分可能である. これを q_1 と表わす. N 上では $q_1=0$ であり, 関数 q_1 の場 $\boldsymbol{P}_1$ 方向への導関数は1に等しい. こうして, **関数 q_1, p_1 の Poisson 括弧は1に等しい**:

$$(q_1, p_1)\equiv 1.$$

D. n に関する帰納法によって, シンプレクティック座標を作ること　$n=1$ であれば構成は終った. $n>1$ とする. $\mathbf{R}^{2n-2}$ に対して Darboux の定理がすでに証明されたと仮定しよう.

方程式 $p_1=q_1=0$ で与えられる集合 M を考えよう. 微分 dp_1 と dq_1 とは点 $\boldsymbol{x}$ で1次独立である. これは $\omega^2(Idp_1, Idq_1)=(q_1, p_1)\equiv 1$ だからである. したがって, 陰関数の定理により, 集合 M は, 点 $\boldsymbol{x}$ の近傍で $2n-2$ 次元多様体である. これを M^{2n-2} と表わすことにする.

補題　$\mathbf{R}^{2n}$ のシンプレクティック構造 ω^2 は, M^{2n-2} 上の点 $\boldsymbol{x}$ の近傍に, シンプレクティック構造を与える.

証明　必要なことは, TM_x 上 ω^2 が退化しないことだけである. 線形シン

プレクティック空間 $T\mathbf{R}^{2n}{}_x$ を考えよう．Hamilton 関数 p_1, q_1 をもつ Hamilton 場のベクトル $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{x})$ は $T\mathbf{R}^{2n}{}_x$ に属する．$\boldsymbol{\xi}\in TM_x$ とする．p_1, q_1 の $\boldsymbol{\xi}$ 方向の微分は 0 に等しい．つまり，$dp_1(\boldsymbol{\xi})=\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{P}_1)=0$, $dq_1(\boldsymbol{\xi})=\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{Q}_1)=0$ である．それ故，TM_x は $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{x})$ の歪直交補空間である．§41, B 項によって，形式 ω^2 は TM_x 上非退化である．∎

帰納法の仮定によって，シンプレクティック多様体 $(M^{2n-2}, \omega^2|_M)$ 上には，点 $\boldsymbol{x}$ の近傍にシンプレクティック座標が存在する．それを p_i, q_i $(i=2, \cdots, n)$ と表わす．関数 $p_2, \cdots, q_n$ を，次の仕方で点 $\boldsymbol{x}$ の $\mathbf{R}^{2n}$ における近傍へ拡張しよう．点 $\boldsymbol{x}$ の $\mathbf{R}^{2n}$ における近傍の各点 $\boldsymbol{z}$ は，一意的に $\boldsymbol{z}=P_1{}^tQ_1{}^s\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}\in M^{2n-2}$ の形に表わすことができる．s, t は小さい数である．点 $\boldsymbol{z}$ における座標 $p_2, \cdots, q_n$ の値は点 $\boldsymbol{w}$ における値に等しいとおく (図 179).

このように作られた $2n$ 個の関数 $p_1, \cdots, p_n$, $q_1, \cdots, q_n$ は，$\mathbf{R}^{2n}$ の点 $\boldsymbol{x}$ の近傍で局所座標系となる．

E. 構成された座標がシンプレクティックであることの証明 $P_i{}^t$, $Q_i{}^s$ $(i=1, \cdots, n)$ で Hamilton 関数 p_i, q_i をもつ Hamilton 相流を，$\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{Q}_i$ で対応するベクトル場を表わす．関数 $p_1, \cdots, q_n$ の Poisson 括弧を計算しよう．すでに，C 項で見たように，$(q_1, p_1)\equiv 1$ である．したがって，流れ $P_1{}^t$ と $Q_1{}^s$ とは可換である：$P_1{}^tQ_1{}^s=Q_1{}^sP_1{}^t$.

関数 $p_2, \cdots, q_n$ の定義を思い返せば，そのどれもが，流れ $P_1{}^t$, $Q_1{}^s$ に関して不変であることが分る．よって，p_1, q_1 と $2n-2$ 個の関数 p_i, q_i $(i>1)$ との Poisson 括弧は 0 に等しい．こうして，写像 $P_1{}^tQ_1{}^s$ は $2n-2$ 個の流れ $P_i{}^t$, $Q_i{}^s$ $(i>1)$ のすべてと可換である．したがって，$2n-2$ 個のベクトル場 $\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{Q}_i$ $(i>1)$ のどれをも不変に保つ．また，流れ $P_1{}^t$, $Q_1{}^s$ は Hamilton 相流であるから，写像 $P_1{}^tQ_1{}^s$ はシンプレクティック構造 ω^2 を保つ．よって，点 $\boldsymbol{z}=P_1{}^tQ_1{}^s\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{2n}$ と $\boldsymbol{w}\in M^{2n-2}$ とにおいて，形式 ω^2 が $2n-2$ 個の場 $\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{Q}_i$ $(i>1)$ の任意の 2 つのベクトルに対してとる値は一致する．ところで，これらの値は対応する Hamilton 関数の Poisson 括弧の値に等しい．こうして，$\boldsymbol{z}=P_1{}^tQ_1{}^s\boldsymbol{w}$ であれば，$2n-2$ 個の座標 p_i, q_i $(i>1)$ の任意の 2 つの Poisson 括弧の値は，点 $\boldsymbol{z}$ と点 $\boldsymbol{w}$ とにおいて一致する．

関数 p_1, q_1 は $2n-2$ 個の流れ $P_i{}^t$, $Q_i{}^s$ $(i>1)$ のおのおのの第 1 積分である．

よって，$2n-2$ 個の場 $\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{Q}_i$ のおのおのがレベル多様体 $p_1=q_1=0$ に接する．ところで，この多様体が M^{2n-2} である．よって，$2n-2$ 個の場 $\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{Q}_i$ のおのおのが M^{2n-2} に接する．したがって，これらの場はシンプレクティック多様体 $(M^{2n-2}, \omega^2|_M)$ 上の Hamilton ベクトル場であり，対応する Hamilton 関数は $p_i|_M$, $q_i|_M$ $(i>1)$ に等しい．こうして，$2n-2$ 個の座標 p_i, q_i $(i>1)$ のうちの任意の 2 つの，全空間 $\mathbf{R}^{2n}$ における Poisson 括弧は，シンプレクティック空間 $(M^{2n-2}, \omega^2|_M)$ における Poisson 括弧と M^{2n-2} 上で一致する．

一方，帰納法の仮定によって，M^{2n-2} 上の座標 $(p_i|_M, q_i|_M, i>1)$ はシンプレクティックである．よって，空間 $\mathbf{R}^{2n}$ 全体で構成された座標の Poisson 括弧は標準の値をとる：

$$(p_i, p_j) \equiv (q_i, q_j) \equiv 0, \qquad (q_i, p_j) \equiv \delta_{ij}.$$

$\omega^2=\sum dp_i \wedge dq_i$ であれば，$\mathbf{R}^{2n}$ の座標 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の Poisson 括弧も同じ形である．ところで，双 1 次形式 ω^2 は基底ベクトルの組に対する値で決まる．したがって，座標関数の Poisson 括弧は ω^2 の形を一意的に定める．故に，

$$\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n. \qquad \blacksquare$$

第9章　正準形式

本章では主に座標を使って考察を進める．正準変換の母関数は Hamilton と Jacobi が開発した道具であり，力学の微分方程式を積分する方法のうち，もっとも強力なものである．この道具のほかに，本章は Hamilton 相流を《奇数次元空間》で取り扱う方法も含む．

本章は前の各章からは独立している．また第8章の一連の結果の別証明およびシンプレクティック多様体の理論が生まれた事情も述べる．

§44　Poincaré–Cartan の積分不変式

本節では奇数次元空間における1-形式の幾何学を考察する．

A. 流体力学的補題　$\boldsymbol{v}$ を向きづけられた3次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル場とし，$\boldsymbol{r}=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$ をその回転の場とする．$\boldsymbol{r}$ の積分曲線を**渦線**または**特性曲線**という．γ_1 を $\mathbf{R}^3$ の閉曲線とする(図180)．γ_1 の点を通る渦線は**渦管**を作る．γ_2 を同じ渦管を巻く別の曲線とすれば，$\gamma_1-\gamma_2=\partial\sigma$ である．ここで，σ は渦管の一部を表わす2-チェインである．このとき次のことが成り立つ．

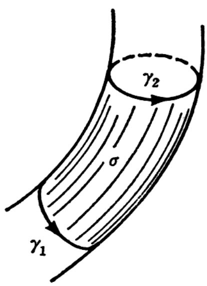


図180　渦　管

Stokes の補題　2曲線 γ_1, γ_2 に沿う場 $\boldsymbol{v}$ の循環は等しい:

$$\oint_{\gamma_1} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{l} = \oint_{\gamma_2} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{l}.$$

証明　Stokes の公式により，$\int_{\gamma_1}\boldsymbol{v}d\boldsymbol{l}-\int_{\gamma_2}\boldsymbol{v}d\boldsymbol{l}=\int\int_{\sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}d\boldsymbol{n}$．$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$ は渦管に接するから，積分は0である．∎

B. 高次元の Stokes の補題　Stokes の補題は($\mathbf{R}^3$ に代えて)任意の奇数次元の多様体 M^{2n+1} の場合へ一般化できる．この一般化を定式化するためにベクトル場から微分形式へ移ろう．

場 $\boldsymbol{v}$ の循環は 1-形式 $\omega^1 : \omega^1(\boldsymbol{\xi})=(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi})$ の積分である．場 $\boldsymbol{v}$ の回転 $\boldsymbol{r}$ には 2-形式 $\omega^2=d\omega^1$, $d\omega^1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ が対応する．この式から分るように，各点に次の性質をもつ方向(つまり，回転 $\boldsymbol{r}$ の方向(図 181))が存在する．つまり，$\boldsymbol{r}$ を含む《無限小平行 4 辺形》の辺に沿う $\boldsymbol{v}$ の積分が 0 に等しい：

$$d\omega^1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\eta})=0, \qquad \forall \boldsymbol{\eta}.$$

実際，$d\omega^1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\eta})=0$ である．

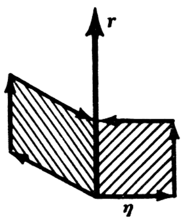


図 181　奇数次元空間で 2-形式に不変な形で対応する軸

注意　2-形式 $\omega^2=d\omega^1$ から回転の場 $\boldsymbol{r}$ へ移ることは，**不変な操作ではない**．$\mathbf{R}^3$ の Euclid 構造に依存する．

しかし，回転 $\boldsymbol{r}$ の**方向***) は不変な形で 2-形式 ω^2 と(したがって，1-形式 ω^1 と)結びついている．実際，簡単に分るように，$\boldsymbol{r} \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{r}$ の方向は条件：$\omega^2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\eta})=0$, $\forall \boldsymbol{\eta}$ によって一意的に定まる．

高次元における Stokes の補題の代数的基礎は，奇数次元空間のすべての回転に，軸が存在することである．

補題　ω^2 を奇数次元線形空間 $\mathbf{R}^{2n+1}$ の代数的外 2-形式とする．このとき，次のようなベクトル $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ が存在する．

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})=0, \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^{2n+1}.$$

証明　歪対称形式 ω^2 は，$2n+1$ 次歪対称行列 A によって与えられる：

$$\omega^2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})=(A\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}).$$

このような行列の行列式は 0 に等しい．なぜなら，

$${}^tA=-A,$$

*)　つまり，ベクトル $\boldsymbol{r}$ を含み，向きづけられてはいない $T\mathbf{R}^3{}_x$ の直線である．

$$\det A=\det {}^tA=\det(-A)=(-1)^{2n+1}\det A=-\det A$$

となるからである．こうして，A の行列式は 0 に等しい．故に，A は固有値が 0 である固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}\neq 0$ をもつ．■

すべての $\boldsymbol{\eta}$ に対して，$\omega^2(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=0$ となるベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を形式 ω^2 の**零ベクトル**という．明らかに，ω^2 の零ベクトル全体は線形部分空間を作る．形式が**非特異**であるとは，この部分空間の次元が可能な最小数(つまり，奇数次元空間 $\mathbf{R}^{2n+1}$ では 1，偶数次元空間では 0)であるときをいう．

問 座標 $p_1,\cdots,p_n$，$q_1,\cdots,q_n$ をもつ偶数次元空間 $\mathbf{R}^{2n}$ において，2-形式 $\omega^2=dp_1\wedge dq_1+\cdots+dp_n\wedge dq_n$ を考えよう．形式 ω^2 は非特異であることを示せ．

問 座標 $p_1,\cdots,p_n$，$q_1,\cdots,q_n$，t をもつ奇数次元空間 $\mathbf{R}^{2n+1}$ において，2-形式 $\omega^2=\sum_i dp_i\wedge dq_i-\omega^1\wedge dt$ を考えよう．ω^1 は $\mathbf{R}^{2n+1}$ の任意の 1-形式である．形式 ω^2 は非特異であることを示せ．——

ω^2 が奇数次元空間 $\mathbf{R}^{2n+1}$ の**非特異**形式であれば，形式 ω^2 のすべての零ベクトルは 1 直線上にある．この直線は形式 ω^2 に不変な形で結びついている．

さて，M^{2n+1} を奇数次元微分可能多様体とし，ω^1 を M 上の 1-形式とする．上の補題により，各点 $\boldsymbol{x}\in M$ に，次の性質をもつ方向(つまり，接空間 $TM_{\boldsymbol{x}}$ の直線 $\{c\boldsymbol{\xi}\}$)が存在する．《この方向を含む無限小平行 4 辺形》の辺に沿う ω^1 の積分は 0 に等しい：

$$d\omega^1(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=0,\qquad \forall\boldsymbol{\eta}\in TM_{\boldsymbol{x}}.$$

さらに，2-形式 $d\omega^1$ は非特異であるとする．このとき，方向 $\boldsymbol{\xi}$ は一意的に定まる．これを形式 ω^1 の《渦方向》という．

渦方向の場の積分曲線を形式 ω^1 の**渦線**(または**特性曲線**)という．

γ_1 を M 上の閉曲線とする．γ_1 の点から出る渦線は《渦管》を作る．このとき次の補題が成り立つ．

高次元の Stokes の補題 同一の渦管を巻く 2 曲線に沿う 1-形式 ω^1 の積分は一致する：$\gamma_1-\gamma_2=\partial\sigma$，($\sigma$ は渦管の一部)ならば，$\oint_{\gamma_1}\omega^1=\oint_{\gamma_2}\omega^1$ である．

証明 Stokes の公式により

$$\oint_{\gamma_1}\omega^1-\oint_{\gamma_2}\omega^1=\int_{\partial\sigma}\omega^1=\int_\sigma d\omega^1.$$

ところで，渦管に接する任意の 2 つのベクトルに対する $d\omega^1$ の値は 0 に等し

い．(実際，2 つのベクトルは渦方向を含むある 2 次元平面上にあるが，この平面上で $d\omega^1$ は 0 となる.)

故に，$\int_\sigma d\omega^1 = 0.$ ▮

C. Hamilton の正準方程式 Stokes の補題から，直ちに Hamilton 力学の基本的な主張がすべて導かれる．

M^{2n+1} として，座標 $p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n, t$ をもつ《拡大相空間 $\mathbf{R}^{2n+1}$》を考えよう．関数 $H=H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ が与えられたとする．このとき，1-形式

$$\omega^1 = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt \qquad (\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} = p_1dq_1 + \cdots + p_ndq_n)$$

を作ることができる*)．

ω^1 に Stokes の補題を適用しよう (図 182)．

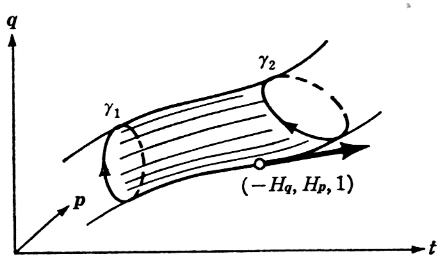


図 182 Hamilton 場と形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の渦線

定理 拡大相空間 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t$ における形式 $\omega^1 = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt$ の渦線は t 軸上へ 1 対 1 に射影される．すなわち，関数 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(t)$ で与えられる．これらの関数は H を Hamilton 関数とする正準微分方程式系を満たす：

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}. \tag{1}$$

いい換えれば，形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の渦線は拡大相空間における相流の軌跡，すなわち正準方程式 (1) の積分曲線である．

証明 形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の微分は

$$d\omega^1 = \sum_{i=1}^{n}\left(dp_i \wedge dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i \wedge dt\right)$$

に等しい．この表示から分るように，2-形式 $d\omega^1$ の行列は，座標 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t$ では

*) 形式 ω^1 は，天下り的ではあるが，§46 で見るように，この形式を考えるという発想は光学に由来する．

次の形である(確かめよ!).

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -E & H_p \\ E & 0 & H_q \\ -H_p & -H_q & 0 \end{bmatrix},$$

ここで,

$$E=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{n}, \qquad H_p=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad H_q=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}.$$

この行列の階数は $2n$ である(左上隅の $2n$ 次行列が, 非退化である). よって, 2-形式 $d\omega^1$ は非特異である. ベクトル $(-H_q, H_p, 1)$ が固有値 0 に対する行列 A の固有ベクトルであることは, すぐに確かめられる(確かめよ!). したがって, これが形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の渦線の方向を与える. ところが, ベクトル $(-H_q, H_p, 1)$ は, まさに(1)の相流の速度ベクトルである. こうして, (1)の積分曲線は形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の渦線である. ∎

D. Poincaré-Cartan の積分不変式の定理 さて, Stokes の補題を適用して, 次の基本的な定理が得られる.

定理 2閉曲線 γ_1, γ_2 が(1)の同じ相軌道管を巻くとする. このとき, 形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の γ_1, γ_2 に沿う積分は一致する:

$$\oint_{\gamma_1} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt=\oint_{\gamma_2} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt. \qquad \text{——}$$

形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ を **Poincaré-Cartan の積分不変式***) という.

証明 相軌道は形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の渦線であり, Stokes の補題によって, 同じ渦管を巻く閉曲線に沿う積分は一致する. ∎

とくに, 同時状態からなる曲線, つまり, 平面 $t=\text{const}$ 上にある2曲線を考えよう(図183). このような曲線上では $dt=0$, よって, $\oint \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt=\oint \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$ となる. 先の定理から, 次の重要な系が得られる.

系 1 相流は, 形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}=p_1dq_1+\cdots+p_ndq_n$ の閉曲線に沿う積分を保つ.

証明 実際, $g_{t_0}^{t_1}: \mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ を相空間 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ の変換で, 時間が t_0 より t_1 まで経過するとき, 相流によって実現されるものとする(つまり, $g_{t_0}^{t}(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0)$ は,

*) 変分法では $\int \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ を Hilbert の不変積分という.

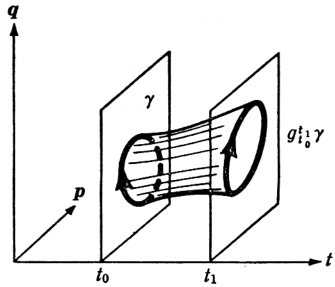


図 183 Poincaré の積分不変式

初期条件 $\boldsymbol{p}(t_0)=\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{q}(t_0)=\boldsymbol{q}_0$ をもつ正準方程式(1)の解である). γ を空間 $\mathbf{R}^{2n}$ $(t=t_0)\subset\mathbf{R}^{2n+1}$ の閉曲線とする. このとき, $g_{t_0}^{t_1}\gamma$ は空間 $\mathbf{R}^{2n}$ $(t=t_1)$ の閉曲線であり, $\mathbf{R}^{2n+1}$ では同じ相軌道管を巻く. γ および $g_{t_0}^{t_1}\gamma=\gamma'$ 上では $dt=0$ であるから, 上の定理により $\oint_\gamma \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}=\oint_{\gamma'}\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$ となる. ∎

形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$ を **Poincaré の相対積分不変式**という. これには簡単な幾何学的な意味がある. σ を向きづけられた2-チェイン $\gamma=\partial\sigma$ とする. このとき, Stokes の公式によって,

$$\oint_\gamma \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}=\iint_\sigma d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}$$

となる. こうして, 次の重要な系が得られた.

系 2 曲面を n 枚の座標平面 (p_i, q_i) へ射影すると, 相流はその向きづけられた面積の和を保つ:

$$\iint_\sigma d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}=\iint_{g_{t_0}^{t_1}\sigma} d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}. \qquad ——$$

いい換えると, 2-形式 $d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}$ は相流の絶対積分不変式である.

例 $n=1$ のときは ω^2 は面積である. よって, Liouville の定理: 相流は面積を保つ, が得られる.

E. 正準変換 g を相空間 $\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ の微分可能な変換とする.

定義 変換 g が**正準**であるとは, g が 2-形式 $\omega^2=\sum dp_i\wedge dq_i$ を保つときをいう.

今までの議論から分るように, これは次の 3 つの同値な形に書き表わせる.

1) $g^*\omega^2=\omega^2$ (g は 2-形式 $\sum_i dp_i\wedge dq_i$ を保つ);

2) $\iint_\sigma \omega^2=\iint_{g\sigma}\omega^2$, $\forall\sigma$ (g は任意の曲面を n 枚の座標平面へ射影し

たときの面積の和を保つ)；

3)　$\oint_{\gamma} pdq = \oint_{g\gamma} pdq$　(形式 pdq は g の相対積分不変式である).

問　相空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の単連結領域の変換に関する限り，定義 1), 2), 3) は同値である．一般には 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 1) である．このことを示せ．——

これらの系は次のように定式化し直すことができる.

定理　相流が与える相空間の変換はすべて正準である*)．——

$g:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ を正準変換とする．すなわち，g は 2-形式 ω^2 を保つ．このとき，g は ω^2 の外巾乗をも保つ：

$$g^*(\omega^2\wedge\omega^2) = \omega^2\wedge\omega^2, \qquad g^*(\omega^2)^k = (\omega^2)^k.$$

形式 $\sum_i dp_i\wedge dq_i$ の外巾乗は次の形式に比例する.

$$\omega^4 = \sum_{i<j} dp_i\wedge dp_j\wedge dq_i\wedge dq_j,$$

$$\omega^{2k} = \sum_{i_1<\cdots<i_k} dp_{i_1}\wedge\cdots\wedge dp_{i_k}\wedge dq_{i_1}\wedge\cdots\wedge dq_{i_k}.$$

こうして，次の定理が証明された.

定理　正準変換は積分不変式 $\omega^4, \cdots, \omega^{2n}$ を保つ．——

幾何学的には形式 ω^{2k} の積分は，座標平面 $(p_{i_1}, \cdots, p_{i_k}, q_{i_1}, \cdots, q_{i_k})$ へ射影したときの向きを考えた体積の和を意味する.

とくに，形式 ω^{2n} は体積要素に比例するから，次の系が得られる.

系　正準変換は相空間の体積要素を保つ．つまり，任意の領域 D に対して，

$$\operatorname{vol} gD = \operatorname{vol} D. \qquad \text{——}$$

とくに，相流に適用すれば次の系が得られる.

系　方程式(1)の相流は積分不変式として $\omega^2, \omega^4, \cdots, \omega^{2n}$ をもつ．——

最後の不変式は相空間の体積であるから，またしても Liouville の定理が証明された.

§45　Poincaré–Cartan の積分不変式の定理からの帰結

本節では，正準変換は Hamilton 方程式の形を変えないこと，Hamilton 方程式の1つの第1積分は系の変数の数を2つ下げること，Lagrange の自然系における運動は或

---

*) Landau-Lifshitz の優れた教科書 Landau-Lifshitz [1] にあるこの定理の証明は誤りである.

る Riemann 計量をもつ配位空間の測地線に沿うものであることを示す.

A. 正準方程式の変数変換 形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ とその渦線との関係が不変的であることから, 拡大相空間 $\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)\}$ の任意の $2n+1$ 個の座標によって運動方程式を書き下す方法が得られる.

$(x_1, \cdots, x_{2n+1})$ を拡大相空間(多様体 M^{2n+1} と考える. 図 184)の或るチャート上の座標関数とする. 座標 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ は M の別のチャートを与えると考えられる. 形式 $\omega^1=\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ は M 上の 1 次微分形式と考えられる. この形式には, 不変な(つまりチャートにはよらない)仕方で M 上の曲線, つまり渦線の族が対応する. チャート $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ 上では, これらの曲線は, $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ を Hamilton 関数とする相流

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{q}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{1}$$

の軌跡として表わされる.

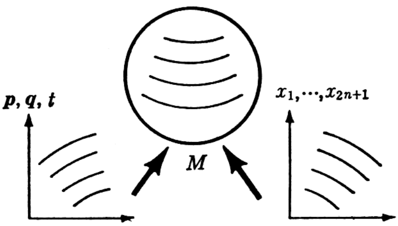


図 184 Hamilton 方程式の変数変換

座標 $(x_1, \cdots, x_{2n+1})$ では, 形式 ω^1 が次のように書かれるとする.

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt = X_1dx_1+\cdots+X_{2n+1}dx_{2n+1}.$$

定理 チャート (x_i) 上では, (1) の軌跡は形式 $\sum X_idx_i$ の渦線として表わされる.

証明 形式 $\sum X_idx_i$ と $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の渦線は, M 上の同一の形式の渦線を, 2つの異なるチャート上で表わしたものである. ところで, (1) の積分曲線は $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の渦線である. ゆえに, チャート (x_i) 上では, それは形式 $\sum X_idx_i$ の渦線である. ∎

系 $(P_1, \cdots, P_n ; Q_1, \cdots, Q_n ; T)$ を, 拡大相空間 $\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)\}$ 上の局所座標系とし, 関数 $K(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, T)$, $S(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, T)$ は,

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt = \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}-KdT+dS$$

を満たすとする(両辺は拡大相空間上の形式である).

このとき，(1)の相流の軌跡は，チャート $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, T)$ 上では，次の正準方程式の積分曲線として表わされる.

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{Q}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{Q}}{dT} = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{P}}. \tag{2}$$

証明　上の定理により，(1)の軌跡は形式 $\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}-KdT+dS$ の渦線として表わされる．ところが，dS は渦線には影響しない($ddS=0$ であるから)．よって，(1)の軌跡は，形式 $\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}-KdT$ の渦線として表わされる．§44, C 項によると，このような形式の渦線は正準方程式(2)の渦線である. ▮

とくに，$g: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ を相空間の正準変換とし，点 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ を点 $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ へ移すとする.

関数 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ は相空間の新しい座標と考えることができる.

定理　新座標 $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ においては，正準方程式(1)は，旧座標のときと同じ関数 $K(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, t) = H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ を Hamilton 関数とする正準形である*).

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{Q}}, \qquad \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{P}}. \tag{3}$$

証明　$\mathbf{R}^{2n}$ で1-形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}$ を考えよう．g が正準変換であるから任意の閉曲線 γ に対して

$$\oint_\gamma \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} = \oint_\gamma \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - \oint_\gamma \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} = 0$$

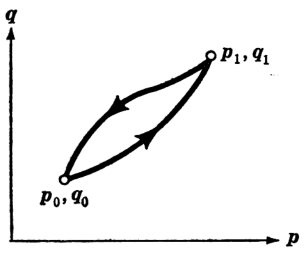


図185　形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}$ が閉じていること

---

*)　或る教科書は Hamilton 方程式の形を保つという性質を正準変換の定義とする．この定義は一般に採用されている上述のものとは同値ではない．たとえば，われわれの意味では正準でない変換 $P=2p$，$Q=q$ も運動方程式の正準な形を保つ．混乱は Landau-Lifshitz の優れた教科書[1]にも見られる．その§45では正準方程式を保つすべての変換が，われわれの意味で正準であるというのだから.

となる(図 185). よって(始点 $(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0)$ を固定すると), 積分

$$\int_{\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0}^{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{q}_1} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} = S$$

は積分路によらず, 終点 $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1)$ にのみ依存する. よって, $dS=\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}$ となる. したがって, 拡大相空間では

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt = \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}-Hdt+dS$$

となり, 上の定理が使える. このとき, (2)は(3)に変わる. ■

問　$g(t):\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ は, パラメーター t に依存する相空間の正準変換, $g(t)(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t))$ とする. 正準方程式(1)は, 変数 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},t$ では, 次の新しい Hamilton 関数に対して正準形である.

$$K(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},t) = H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)+\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad \text{ここで,}\ S(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{q}_1,t) = \int_{\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0}^{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{q}_1} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}.$$

B. エネルギー積分により, 変数の数を下げること　いま, Hamilton 関数 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ が時間に依存しないとする. このとき, 正準方程式(1)は第1積分 $H(\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{q}(t))=\text{const}$ をもつ. この積分を使えば, 問題を $2n-1$ 次元空間の或る正準方程式系の積分に帰着させることにより, 空間の次元 $2n+1$ を 2 下げることができる.

(或る領域で)方程式 $h=H(p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n)$ が p_1 について解けると仮定しよう:

$$p_1 = K(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},T;h),$$

ただし, $\boldsymbol{P}=(p_2,\cdots,p_n)$, $\boldsymbol{Q}=(q_2,\cdots,q_n)$, $T=-q_1$ である.

このとき次のようになる.

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt = \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}-KdT-d(Ht)+tdH.$$

さて, γ は正準方程式(1)の積分曲線で, $\mathbf{R}^{2n+1}$ の $2n$ 次元曲面 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=h$ 上にあるとする. このとき, γ は形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の渦線である(図 186). 拡大相空間 $\mathbf{R}^{2n+1}=\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)\}$ を相空間 $\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\}$ へ射影しよう. 曲面 $H=h$ は $\mathbf{R}^{2n}$ の $2n-1$ 次元部分多様体 $M^{2n-1}:H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=h$ の上へ射影され, 曲線 γ はこの部分多様体上の曲線 $\bar{\gamma}$ へ射影される. $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},T$ は M^{2n-1} の局所座標をなす.

問　曲線 $\bar{\gamma}$ は M^{2n-1} 上の形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}=\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}-KdT$ の渦線であることを示せ.

[ヒント]　$d(Ht)$ は渦線に影響せず, dH は M 上 0 である. ——

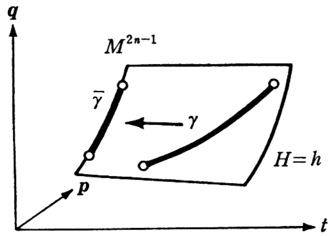


図 186 Hamilton 系の変数の数を下げること

ところで，形式 $\boldsymbol{PdQ-KdT}$ の渦線は(2)の形の Hamilton 方程式を満たす．こうして次の定理が証明された．

定理 曲面 $M^{2n-1}: H=h$ 上にある方程式(1)の相軌跡は，正準方程式

$$\frac{dp_i}{dq_1}=\frac{\partial K}{\partial q_i},\qquad \frac{dq_i}{dq_1}=-\frac{\partial K}{\partial p_i}\qquad (i=2,\cdots,n)$$

を満たす．ここで，関数 $K(p_2,\cdots,p_n,q_2,\cdots,q_n,T;h)$ は，方程式 $H(K,p_2,\cdots,p_n,-T,q_2,\cdots,q_n)=h$ から定まる．

C. 相空間における最小作用の原理 拡大相空間 $\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)\}$ で点 $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0,t_0)$ と $(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{q}_1,t_1)$ とを結ぶ正準方程式(1)の積分曲線 γ を考えよう．

定理 曲線の両端を n 次元部分空間 $(t=t_0,\ \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0)$ と $(t=t_1,\ \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_1)$ とにとどめたまま変動させるとき，γ は積分 $\int \boldsymbol{pdq}-Hdt$ の極値曲線である．

証明 曲線 γ は形式 $\boldsymbol{pdq}-Hdt$ の渦線である(図 187)．したがって，《渦方向を通る無限小平行4辺形》の辺に沿う $\boldsymbol{pdq}-Hdt$ の積分は 0 に等しい．

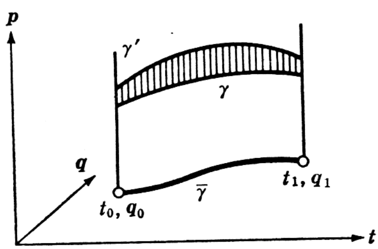


図 187 相空間における最小作用の原理

いい換えると，増分 $\int_{\gamma'}-\int_{\gamma}\boldsymbol{pdq}-Hdt$ は γ' と γ の隔たりに較べて，高次の無限小である．

この議論があまり厳密でないと思えるならば，次の計算に換えてよい．

$$\delta\int_{\gamma}(p\dot{q}-H)\,dt=\int_{\gamma}\left(\dot{q}\delta p+p\delta\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\delta p-\frac{\partial H}{\partial q}\delta q\right)dt$$
$$=p\delta q\Big|_0^1+\int_{\gamma}\left[\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\delta p-\left(\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial q}\right)\delta q\right]dt.$$

Hamilton 方程式の積分曲線は，拡大相空間の n 次元部分空間 $(t=t_0, \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0)$ と $(t=t_1, \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_1)$ とにその両端をおく曲線 γ' のクラスの中で積分 $\int \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ の一意的な極値曲線であることが分る. ∎

注意 Hamilton の形の最小作用の原理は上で考察した原理の特殊な場合である. 実際，極値曲線上では，次のようになるからである.

$$\int_{t_0,q_0}^{t_1,q_1}\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt=\int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}}-H)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}Ldt.$$

(なぜなら，Lagrange 関数 L と Hamilton 関数 H は互いに他の Legendre 変換である.)

さらに，$\bar{\gamma}$ は極値曲線 γ を $(\boldsymbol{q}, t)$ 平面上へ射影したものとする(図 188). $(\boldsymbol{q}, t)$ 平面上で，$\bar{\gamma}$ の端点 $(t_0, \boldsymbol{q}_0)$ と $(t_1, \boldsymbol{q}_1)$ を結び，$\bar{\gamma}$ に近い任意の曲線 $\bar{\gamma}'$ には，$\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ とおいて相空間 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ の曲線 γ' を対応させる. このとき，γ' に沿っても $\int_{\gamma'}\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt=\int_{\bar{\gamma}'}Ldt$ である. ところで，境界条件 $(t=t_0, \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0)$, $(t=t_1, \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_1)$ のもとで曲線 γ を任意に変動させるとき，いま証明した定理により，$\delta\int_{\gamma}\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt=0$ である. とくに，γ を γ' へ移す特別な形の変動に対してもこれは正しい. こうして，$\bar{\gamma}$ は $\int Ldt$ の極値である. これが示すべきことであった. ——

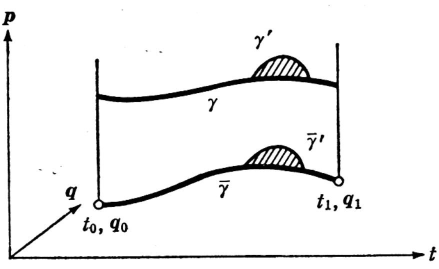


図 188　配位空間と相空間における各最小作用の原理に対する比較曲線

上に証明した定理では，γ と比較するものに，Hamilton の原理のときよりも遙かに広いクラスの曲線 γ' を許す. $\boldsymbol{p}$ と $\dot{\boldsymbol{q}}$ の関係には何の制限もない. それにもかかわらず，2 つの原理が同値であること，つまり，狭いクラス($\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$)の変動に対する極値性から，任意の変動に対する極値性が従うことは，驚くべきことのように見えるかも知れない. これは $\dot{\boldsymbol{q}}$ を固定すれば $\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$

のときに $p\dot{q}-H$ が極値をとることで説明される(§14の Legendre 変換の定義を見よ).

D. Maupertuis-Euler-Lagrange-Jacobi の形の最小作用の原理 さて, Hamilton 関数 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ が時間に依存しないとする. このとき, $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ は Hamilton 方程式(1)の第1積分である. 拡大相空間 $\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)\}$ の曲面 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=h$ を相空間 $\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\}$ へ射影しよう. $\mathbf{R}^{2n}$ の $2n-1$ 次元曲面 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=h$ が得られる. これは B 項ですでに考察し, M^{2n-1} と書いたものである.

曲面 M^{2n-1} 上から出発する正準方程式(1)の相軌道は, その全体が曲面 M^{2n-1} 上にある. それは, M^{2n-1} 上の(B 項の記号で)形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}=\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}-KdT$ の渦線である. C 項の定理によれば, M^{2n-1} 上の曲線(1)はこの形式に対する変分原理の極値である. こうして次の定理が示された.

定理 Hamilton 関数 $H=H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ が時間に依存しなければ, 曲面 M^{2n-1}: $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=h$ 上にある正準方程式(1)の相軌道は, 部分空間 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$ と $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_1$ とを結ぶ M^{2n-1} 上の曲線のクラスにおける, 次の積分の極値曲線である.

$$\int \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} \qquad \text{——}$$

さて, 曲面 $M^{2n-1}:H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=h$ 上にある極値曲線を $\boldsymbol{q}$-空間へ射影する. この曲線は点 $\boldsymbol{q}_0$ と $\boldsymbol{q}_1$ とを結ぶ.

さらに, γ は点 $\boldsymbol{q}_0$ と $\boldsymbol{q}_1$ とを結ぶ別の曲線とする(図189). この曲線 γ は曲面 M^{2n-1} 上の或る曲線 $\hat{\gamma}$ を射影したものである. つまり, γ 上にパラメーター τ; $a\leq\tau\leq b$, $\gamma(a)=\boldsymbol{q}_0$, $\gamma(b)=\boldsymbol{q}_1$ をとれば, このとき曲線 γ の各点で速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{q}}=d\gamma(\tau)/d\tau$ と, それに対応する運動量 $\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ とが定まる. パラメーター τ を, $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=h$ となるように選ぶと, 曲面 M^{2n-1} 上の曲線 $\hat{\gamma}:\boldsymbol{q}=$

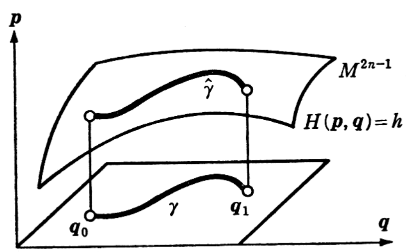


図189 Maupertuis の原理

$\gamma(\tau)$, $\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ が得られる．上の定理を M^{2n-1} 上の曲線 $\hat{\gamma}$ に適用すると，次の系が得られる．

系 2点 $\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1$ を結ぶ $\boldsymbol{q}$-平面上の曲線 $\boldsymbol{q}=\gamma(\tau)$ には，Hamilton 関数が一定値: $H(\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})=h$ をとるようにパラメーター τ を選ぶ．力学の方程式(1)の相軌道はこのような曲線のうち，次の《簡約作用》の積分の極値曲線である．

$$\int_\gamma p dq = \int_\gamma p\dot{q}d\tau = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tau)\,\dot{q}(\tau)\,d\tau. \qquad \text{——}$$

これが **Maupertuis(-Euler-Lagrange-Jacobi)の最小作用の原理**である*)．重要な注意を与える．曲線 γ のパラメーター区間 $a\leq\tau\leq b$ は比較曲線ごとに異なってよい．その代り，エネルギー(Hamilton 関数)は同一でなければならない．さらに注意すると，この原理は軌道の形を定めるものの，時間は定めない．時間を定めるためには，エネルギーが一定であることを使う必要がある．

系が滑らかな多様体上の慣性運動を表わす時は，この原理はとくに簡単な形をとる．

定理 滑らかな Riemann 多様体上に束縛された質点は，測地線(すなわち，弧長 $\int ds$ の極値曲線)に沿って運動する．

証明 実際，この場合には

$$H = L = T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = 2T = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2$$

となる．したがって，H が固定された値 h をとるためには，パラメーター τ を弧長に比例するように選ぶ必要がある．つまり，$d\tau=ds/\sqrt{2h}$．このとき，簡約作用の積分は次の積分に等しい．

$$\int_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}d\tau = \int_\gamma \sqrt{2h}\,ds = \sqrt{2h}\int_\gamma ds.$$

よって，極値曲線はこの多様体の測地線である．∎

ポテンシャル・エネルギーが存在する場合にも，力学の方程式の軌道は或る Riemann 計量による測地線となる．

ds^2 は配位空間上の Riemann 計量で，運動エネルギーを与えるものとする

---

*) 《ほとんどすべての教科書が，最良のものでさえ，この原理を理解不可能な形で述べている》(C. Jacobi, 力学講義, 1842–1843)．著者にも，習慣を破る決心がつかない．Maupertuis の原理の《教育的》な証明が Landau-Lifshitz の教科書 [1], §44 にある．

(したがって，$T=(ds/d\tau)^2/2$). h を定数とする．

定理　配位空間の領域 $U(\boldsymbol{q})<h$ に，次の Riemann 計量を与える．

$$d\rho=\sqrt{h-U(\boldsymbol{q})}\,ds.$$

このとき，運動エネルギー $T=(ds/d\tau)^2/2$ とポテンシャル・エネルギー $U(\boldsymbol{q})$ をもち，全エネルギーが h に等しい系の軌道は計量 $d\rho$ による測地線である．

証明　実際，この場合，$L=T-U$, $H=T+U$, $(\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}=2T=(ds/d\tau)^2=2(h-U)$ である．したがって，H が一定値 h を取り続けるためには，パラメーター τ を弧長に比例するようにとるべきである：$d\tau=ds/\sqrt{2(h-U)}$. このとき，簡約作用の積分は次の積分に等しい．

$$\int_\gamma \frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\dot{\boldsymbol{q}}d\tau=\int_\gamma\sqrt{2(h-U)}\,ds=\sqrt{2}\int_\gamma d\rho.$$

Maupertuis の原理によって，軌道は計量 $d\rho$ による測地線である．∎

注意1　計量 $d\rho$ は，点 $\boldsymbol{q}$ には依存するが，方向には無関係な《相似拡大》によって ds から得られる．よって，$d\rho$ による角は ds による角と一致する．領域 $U\leq h$ の境界上に，計量 $d\rho$ は特異点をもつ．境界に近づく程 ρ による長さは小さくなる．とくに境界$(U=h)$上にある任意の曲線の長さは 0 に等しい．

注意2　測地線 γ の始点と終点とが十分に近ければ，長さの極小値は**最小値**である．これが《**最小作用**の原理》という訳である．一般の場合に，極小値が必ずしも最小値でないことは，単位球面上の測地線を考えると分る(図 190)．各子午線弧は測地線であるが，π より短いものだけが最小となる．弧 $NS'M$ は子午線弧 NSM より短い．

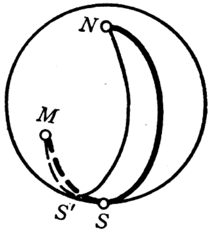


図 190　最小でない測地線

注意3　配位空間上で h が U の最大値より大きければ，計量 $d\rho$ は特異点をもたない．よって，Riemann 多様体上の測地線に関する位相的定理を力学の問題に適用できる．

たとえば，或る Riemann 計量をもつトーラス T^2 を考えよう．赤道方向に m 回，子午線方向に n 回まわる T^2 上の閉曲線全体の中に，長さ最小の曲線が存在する(図 191)．この曲線は閉じた測地線である(証明は Milnor [1] か長野 [1] を見よ)．

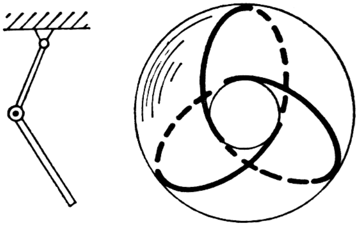


図 191　2 重振子の周期運動

一方，トーラス T^2 は平面 2 重振子の配位空間である．これから，次の定理が得られる．

定理　任意の整数 m, n に対して，1 つの振子が n 回振動する間に，もう一方の振子が m 回振動するような，2 重振子の周期運動が存在する．——

さらに，このような運動は十分大きい任意のエネルギー定数 h に対して存在する(h は最高の位置におけるポテンシャル・エネルギーよりも大きい必要がある)．

もう 1 つの例として，任意のポテンシャル場で，不動点に固定された剛体を考えよう．配位空間 $SO(3)$ は単連結ではない，つまり，1 点には縮まらない閉曲線が存在する．

以上の議論から，次の定理が得られる．

定理　ポテンシャル力場が何であれ，剛体の周期運動が少なくとも 1 つ存在する．さらに，エネルギー定数 h がいかに大きかろうと，このような周期運動が存在する．

§46 Huygens の原理

Hamilton 力学の基本概念(以下で議論する運動量 $\boldsymbol{p}$, Hamilton 関数 H, 形式 $\boldsymbol{pdq} - Hdt$, Hamilton–Jacobi の方程式)は，特殊な変分原理，すなわち Fermat の原理に支配される幾何光学の非常に簡単で自然な諸概念を，一般の変分原理(とくに Hamilton の停留作用の原理，$\delta\int Ldt=0$)へ焼き直す際に生まれたものである．

A. 波面 幾何光学の基本概念を簡単に眺めよう*). Fermat の極小原理によれば，光は点 q_0 から点 q_1 へ最小時間で伝わる．このとき，光の速さは点 q に依存してよいし(《非等質的媒質》)，光線の方向に依存してもよい(《非等方的媒質》，たとえば，水晶).

媒質の性質は各点 q の接空間に曲面《屈折率曲面》を与えることで記述できる．このためには，各点 q において各方向ごとに，光の伝播の速度ベクトルを引く(図192).

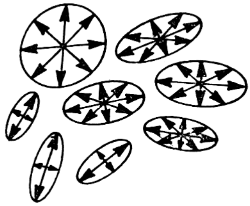


図192 非等質的，非等方的媒質

さて，$t>0$ とする．与えられた点 q_0 から，時間 t 以内に光が到達できる点 q の全体を考えよう．この集合の境界 $\Phi_{q_0}(t)$ を点 q_0 の時間 t 後の**波面**という．これは光が時間 t で到達でき，それ以前には到達できない点からなる．

異なる t の値に対応する波面の間には Huygens が発見した注目すべき関係がある(図193).

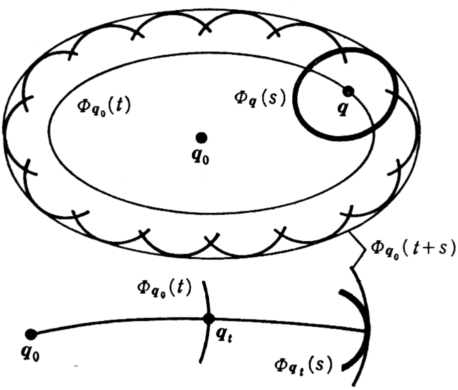


図193 波面の包絡面

---

*) ここでは厳密さを求めない．たとえば，行列式はすべて0でない等々と見なす．後出の定理は，本項の半ば発見的な議論にはよらずに証明できる．

Huygens の定理 点 q_0 の時間 t 後の波面 $\Phi_{q_0}(t)$ を考えよう．この波面の各点 q で，時間 s 後の波面 $\Phi_q(s)$ を作る．このとき，点 q_0 の時間 $t+s$ 後の波面 $\Phi_{q_0}(t+s)$ は，波面族 $\Phi_q(s)$，$q \in \Phi_{q_0}(t)$ の包絡面である．

証明 実際，$q_{t+s} \in \Phi_{q_0}(t+s)$ とする．このとき光が時間 $t+s$ で伝わるような点 q_0 から q_{t+s} への道が存在するが，これより早い道はない．光が時間 t で伝わるこの道の上の点 q_t を考えよう．点 q_0 から q_t へ向うより早い道はない．もしあれば道 q_0q_{t+s} は最短ではない．よって点 q_t は波面 $\Phi_{q_0}(t)$ 上にある．全く同様に，道 q_tq_{t+s} を光は時間 s で通過し，点 q_t から q_{t+s} へ向うより早い道は存在しない．よって，点 q_{t+s} は点 q_t の時間 s 後の波面 $\Phi_{q_t}(s)$ 上にある．波面 $\Phi_{q_t}(s)$ と $\Phi_{q_0}(t+s)$ とが点 q_{t+s} で接することを示そう．実際，もし交差すれば(図 194)，点 q_t から $\Phi_{q_0}(t+s)$ の或る点へは s より短い時間で到達し，したがって，点 q_0 から $t+s$ より短い時間で到達する．これは $\Phi_{q_0}(t+s)$ の定義に矛盾する．故に，波面 $\Phi_{q_t}(s)$ と $\Phi_{q_0}(t+s)$ とは点 q_{t+s} で接する．∎

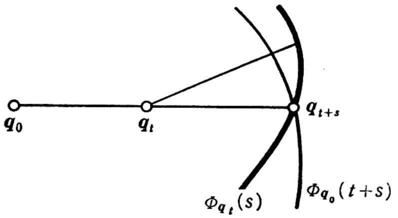


図194 Huygens の定理の証明

この定理を **Huygens の原理**という．もちろん，点 q_0 は曲線，曲面または一般に閉集合でおきかえることができ，3 次元空間 $\{q\}$ は任意の滑らかな多様体に，光の伝播は《局所的》に伝わるような任意の摂動の伝播でおきかえられる．

Huygens の原理により，伝播の過程には 2 つの表わし方がある．まず，光線つまり光が伝わる最短径路に注目できる．この時，伝播の局所的性質は速度ベクトル $\dot{q}$ で与えられる．光線の方向が分れば，速度ベクトルの大きさは媒質の性質(屈折率曲面)によって与えられる．

他方，波面にも注目できる．空間 $\{q\}$ に Riemann 計量が与えられたと仮定しよう．このとき**波面の運動速度**を語ることができる．たとえば，通常の Euclid 空間を満たす媒質の中で光の伝播を考えよう．このとき，波面の運動は次のように作られる波面に垂直なベクトル p によって特徴づけられる．

各点 $\boldsymbol{q}_0$ に対して，**$\boldsymbol{q}_0$ から $\boldsymbol{q}$ へ向う道の光学的長さ**，つまり $\boldsymbol{q}_0$ から $\boldsymbol{q}$ へ光が伝わる最短時間として関数 $S_{\boldsymbol{q}_0}(\boldsymbol{q})$ を定義しよう．

レベル集合 $\{\boldsymbol{q} : S_{\boldsymbol{q}_0}(\boldsymbol{q})=t\}$ は波面 $\Phi_{\boldsymbol{q}_0}(t)$ に外ならない(図195)．(上で触れた計量による)関数 S のグラジエントは波面に垂直で，波面の運動を特徴づける．このとき，グラジエントが大きい程，波面はゆっくり動く．よって Hamilton はベクトル

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}$$

を波面の**最緩法ベクトル**と名付けた．

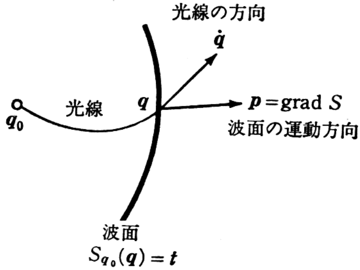


図195　光線の方向と波面の運動方向

光線の方向 $\dot{\boldsymbol{q}}$ と波面の運動方向 $\boldsymbol{p}$ は，非等方的な媒質では一致しない．しかし，これらの間には Huygens の原理より容易に導かれる簡単な関係がある．各点における媒質の性質は，光の速度ベクトルが作る曲面，すなわち，屈折率曲面により特徴づけられるのであった．

定義　点 $\boldsymbol{v}$ で屈折率曲面に接する超平面の方向を，方向 $\boldsymbol{v}$ に**共役である**という(図196)．

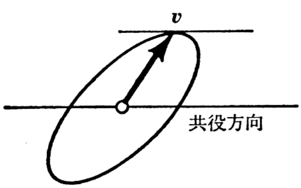


図196　共役超平面

定理　点 $\boldsymbol{q}_t$ における波面 $\Phi_{\boldsymbol{q}_0}(t)$ の方向は，光線の方向 $\dot{\boldsymbol{q}}$ に共役である．

証明　光線 $\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{q}_t$ 上の点 $\boldsymbol{q}_\tau$, $0\leq\tau\leq t$ を考えよう(図197)．極めて小さい ε をとる．このとき波面 $\Phi_{\boldsymbol{q}_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ は $\boldsymbol{q}_t$ の屈折率曲面を ε 倍に縮小したものと $O(\varepsilon^2)$

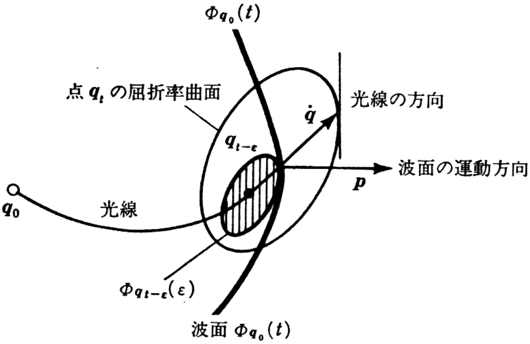


図197 光線の方向と波面の方向の共役性

程度の無限小しか異ならない．Huygens の原理により，この波面 $\Phi_{q_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ は波面 $\Phi_{q_0}(t)$ に点 q_t で接する．$\varepsilon\to 0$ の極限をとれば定理を得る．■

ベクトル $\boldsymbol{p}$ を定義するときに使った補助的な計量を変えると，波面の運動速度の概念，すなわち，ベクトル $\boldsymbol{p}$ は大きさも方向も変わろう．しかし，空間 $\{q\}=\mathbf{R}^3$ 上の微分形式 $\boldsymbol{pdq}=\boldsymbol{dS}$ は補助的な計量に依存しないように定義される．つまり，その値は考えている波面（または光線）にのみ依存する．光線の速度ベクトルに共役な超平面上では，この形式は 0 に等しく，速度ベクトルに対する値は 1 に等しい*)．

B. 光学と力学の類似点　さて，力学に戻ろう．ここでも運動の軌跡は変分原理の極値曲線であり，力学を高次元空間の幾何光学として構成できる．Hamilton は，まさに，このようにしたのである．この構成を詳しく述べることはせず，Hamilton を力学の基本概念に導いた光学の概念を列挙するにとどめる．

光　　学	力　　学
光学的媒質	拡大配位空間 $\{(\boldsymbol{q}, t)\}$
Fermat の原理	Hamilton の原理 $\delta\int L dt=0$
光線	軌跡 $\boldsymbol{q}(t)$

*) こうして，1点を通るあらゆる波面に対応するベクトル $\boldsymbol{p}$ は任意ではなく，1つの条件にしたがう．つまり，許される $\boldsymbol{p}$ の値は速度の屈折率曲面に共役な空間 $\{\boldsymbol{p}\}$ の超曲面：$\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}}=1$ を満たす．

屈折率曲面	Lagrange 関数 L
波面の最緩法ベクトル $\boldsymbol{p}$	運動量 $\boldsymbol{p}$
光線の速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ による $\boldsymbol{p}$ の表示	Legendre 変換
1-形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$	1-形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$

道の光学的長さ $S_{q_0}(\boldsymbol{q})$ と Huygens の原理がまだ残っている．その力学における類似物が**作用関数**と **Hamilton-Jacobi の方程式**である．これらの話題に移ろう．

C. 座標と時間の関数としての作用

定義 **作用関数** $S(\boldsymbol{q},t)$ とは，点 $(\boldsymbol{q}_0,t_0)$ と $(\boldsymbol{q},t)$ とを結ぶ極値曲線 γ に沿う次の積分をいう．

$$S_{\boldsymbol{q}_0,t_0}(\boldsymbol{q},t)=\int_\gamma Ldt.$$

この定義が適切であるためには，幾つか留意すべきことがある．つまり，点 $(\boldsymbol{q}_0,t_0)$ から出る極値曲線同士は，もはや交差せず，いわゆる《極値曲線の中心場》をなすことが必要である(図 198)．より厳密には，各組 $(\dot{\boldsymbol{q}}_0,t)$ に初期条件 $\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{q}_0$, $\dot{\boldsymbol{q}}(0)=\dot{\boldsymbol{q}}_0$ をもつ極値曲線の端点 $(\boldsymbol{q},t)$ を対応させる．写像 $(\dot{\boldsymbol{q}}_0,t)\to(\boldsymbol{q},t)$ が(考えている極値曲線 γ に対応する点 $(\dot{\boldsymbol{q}}_0,t)$ で，したがって，その近傍で)非退化であるとき，極値曲線 γ は**中心場に含まれる**という．

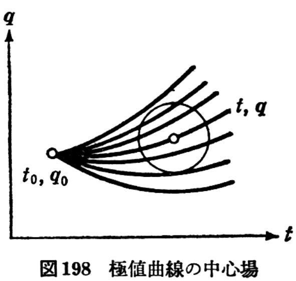


図 198 極値曲線の中心場

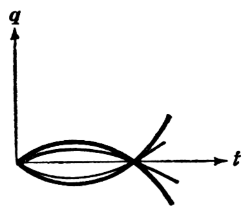


図 199 決して中心場に含まれない，焦点をもつ極値曲線

十分小さい $|t-t_0|$ に対しては，極値曲線 γ は中心場に含まれることが示せる*)．

---

*) **問** $t-t_0$ が大きいと極値曲線は必ずしも中心場に含まれないことを示せ．
［ヒント］ $\ddot{\boldsymbol{q}}=-\boldsymbol{q}$ (図 199)．

さて，この極値曲線の端点 $(\boldsymbol{q}, t)$ の十分小さい近傍を考えよう．この近傍の各点はこの中心場に含まれるただ１つの極値曲線によって $(\boldsymbol{q}_0, t_0)$ と結ばれる．この極値曲線は端点 $(\boldsymbol{q}, t)$ に滑らかに依存する．よって，上に触れた近傍の中では作用関数

$$S_{\boldsymbol{q}_0, t_0}(\boldsymbol{q}, t) = \int_\gamma L dt$$

の定義は適切である．

幾何光学では道の光学的長さの微分を考えた．ここで作用関数の微分を考えることは自然である．

定理 （始点を固定すると）作用関数の微分は

$$dS = \boldsymbol{p} d\boldsymbol{q} - H dt$$

に等しい．ここで，$\boldsymbol{p} = \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}}$ と $H = \boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - L$ は軌道 γ の端点の速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ によって定まる．

証明 $(\boldsymbol{q}, t)$ 空間の各極値曲線を $\boldsymbol{p} = \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{q}}$ とおいて拡大相空間 $\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)\}$ へ持ち上げる．つまり，極値曲線を相軌道におきかえる．このとき，拡大相空間の中に相軌道，つまり，形式 $\boldsymbol{p} d\boldsymbol{q} - H dt$ の渦線からなる $n+1$ 次元多様体が得られる．さて，端点 $(\boldsymbol{q}, t)$ に増分 $(\Delta \boldsymbol{q}, \Delta t)$ を与え，$(\boldsymbol{q}_0, t_0)$ を線分 $\boldsymbol{q} + \theta \Delta \boldsymbol{q}$, $t + \theta \Delta t$, $0 \leq \theta \leq 1$ 上の点と結ぶ極値曲線の族を考えよう（図 200）．相空間では形式 $\boldsymbol{p} d\boldsymbol{q} - H dt$ の渦線からなる曲 4 辺形 σ が得られる．σ の境界

$$\partial \sigma = \gamma_1 - \gamma_2 + \beta - \alpha$$

は，2 つの相軌道 γ_1, γ_2 と空間 $(\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0,\ t = t_0)$ にある曲線分 α と線分 $(\Delta \boldsymbol{q}, \Delta t)$ へ射影される曲線分 β とからなる．σ は形式 $\boldsymbol{p} d\boldsymbol{q} - H dt$ の渦線よりなるから，

$$0 = \iint_\sigma d(\boldsymbol{p} d\boldsymbol{q} - H dt)$$

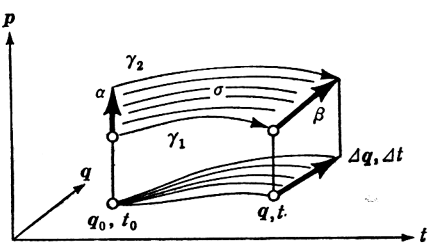


図 200 作用関数の微分の計算

$$= \int_{\partial\sigma} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt$$

$$= \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\beta} - \int_{\alpha} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt.$$

ところで，曲線分 α 上では $d\boldsymbol{q}=0$, $dt=0$. 相軌道 γ_1, γ_2 上では $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt=Ldt$ である(§45, C 項). よって，差 $\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ は作用関数の増分に等しいから，次の式が得られる.

$$\int_{\beta} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt = S(\boldsymbol{q}+\Delta\boldsymbol{q}, t+\Delta t) - S(\boldsymbol{q}, t).$$

ここで，$\Delta\boldsymbol{q}\to 0$, $\Delta t \to 0$ とすると，

$$\int_{\beta} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt = \boldsymbol{p}\Delta\boldsymbol{q} - H\Delta t + o(\Delta\boldsymbol{q}, \Delta t)$$

が得られる. ∎

このように，前に天下り的に導入した形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-Hdt$ は，光学-力学の類似性を辿るとき，道の光学的距離に対応して作用関数を考えることから自然に現われるものである.

D. Hamilton-Jacobi の方程式 《最緩法ベクトル $\boldsymbol{p}$》は任意ではあり得ず，Huygens の原理から導かれる1つの条件 $\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}}=1$ に従うのであった(p. 245). 同様の条件が，作用関数 S のグラジエントに課される.

定理 作用関数は次の微分方程式を満たす.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t\right) = 0. \tag{1}$$

この1階非線形偏微分方程式を **Hamilton-Jacobi の方程式**という.

証明 前の定理により，次のことに注意すれば十分である.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t), \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}. \quad ∎$$

力学系の軌跡《光線》と偏微分方程式《波面》の間の以上の関係は，次の2つの方向に利用できる.

第1は，力学の常微分方程式を積分する時に，方程式(1)の或る解が使えるということである. Hamilton の正準方程式を積分する Jacobi の方法がこれである. これは次節で述べる.

第2は，光線と波面という2つの観点の関係により，偏微分方程式(1)の積分が，Hamilton の常微分方程式系の積分に帰着することである．

これを幾分詳しく述べよう．Hamilton-Jacobi の方程式(1)に対して次の Cauchy 問題を考える．

$$S(\boldsymbol{q}, t_0) = S_0(\boldsymbol{q}), \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t\right) = 0. \tag{2}$$

この問題の解を構成するために，Hamilton の正準方程式を考える．

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \qquad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}.$$

初期条件

$$\boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}_0, \qquad \boldsymbol{p}(t_0) = \left.\frac{\partial S_0}{\partial \boldsymbol{q}}\right|_{\boldsymbol{q}_0}$$

を考える(図201)．この初期条件に対応する解は，$(\boldsymbol{q}, t)$ 空間において変分原理 $\delta\int L dt = 0$ の極値曲線 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$ によって表わされる．(ここで Lagrange 関数 $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ は，Hamilton 関数 $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t)$ の $\boldsymbol{p}$ に関する Legendre 変換である.)

点 $\boldsymbol{q}_0$ から出るこの極値曲線を問題(2)の**特性曲線**という．

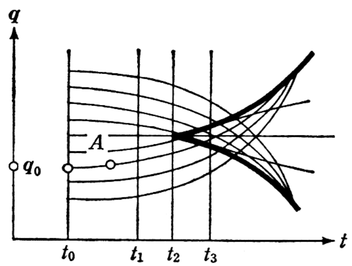


図 201　Hamilton-Jacobi の方程式に対する Cauchy 問題の解の特性曲線

t_1 が t_0 に十分近ければ，$\boldsymbol{q}_0$ に近い点から出る特性曲線は，$t_0 \le t \le t_1$, $|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_0| < R$ では互いに交わらない．そのうえ，$\boldsymbol{q}_0$ と t の値を，領域 $|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_0| < R$, $t_0 \le t \le t_1$ の点 A の座標としてとることができる(図201)．

さて，《初期条件 S_0 をもつ作用関数》$S(A)$ を作ろう：

$$S(A) = S_0(\boldsymbol{q}_0) + \int_{\boldsymbol{q}_0, t_0}^{A} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)\, dt, \tag{3}$$

(積分は A に到る特性曲線に沿う)．

定理　関数(3)は Cauchy 問題(2)の解である．

証明　実際，初期条件は明らかに満たされる．Hamilton-Jacobi の方程式が満たされることは，作用関数の微分に関する定理と同様に確かめられる(図202)．

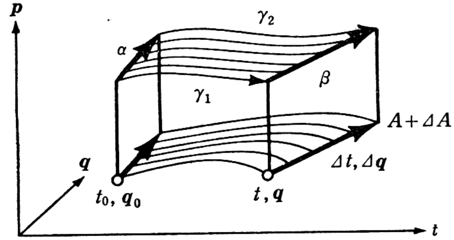


図 202　Hamilton–Jacobi の方程式の解としての作用関数

Stokes の補題により，

$$\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\beta} - \int_{\alpha} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt = 0.$$

ところで，α 上では $dt=0$，$\boldsymbol{p}=\partial S_0/\partial \boldsymbol{q}$ であるから

$$\int_{\alpha} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt = \int_{\alpha} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} = \int_{\alpha} dS_0 = S_0(\boldsymbol{q}_0 + \Delta\boldsymbol{q}) - S_0(\boldsymbol{q}_0).$$

さらに，γ_1, γ_2 は相軌道であるから

$$\int_{\gamma_{1,2}} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt = \int_{\gamma_{1,2}} Ldt.$$

故に，

$$\int_{\beta} \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt = \left[S_0(\boldsymbol{q}_0 + \Delta\boldsymbol{q}) + \int_{\gamma_2} Ldt\right] - \left[S_0(\boldsymbol{q}_0) + \int_{\gamma_1} Ldt\right]$$
$$= S(A+\Delta A) - S(A).$$

$\Delta t \to 0$ として，$\partial S/\partial t = -H$，$\partial S/\partial \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$ が得られる．▮

問　Cauchy 問題(2)の解の一意性を示せ．

［ヒント］　S を特性曲線に沿って微分せよ．

問　$H=p^2/2$，$S_0=q^2/2$ のとき，Cauchy 問題(2)を解け．

問　$t=t_3$ のとき，多価《関数》$S(q)$，$p(q)$ のグラフを図示せよ(図201)．

［解］　図203を見よ[†]．

S のグラフが自分と交わる点には，p のグラフでは **Maxwell の直線**が対応する．斜線部の面積は等しい．$S(\boldsymbol{q}, t)$ のグラフは点 $(\boldsymbol{q}_0, t_2)$ で**燕の尾**と呼ばれる特異点をもつ．

---

†)　$H=p^2/2$，$S_0(q)=-(3/4)q^{4/3}$ で確かめるとよい．

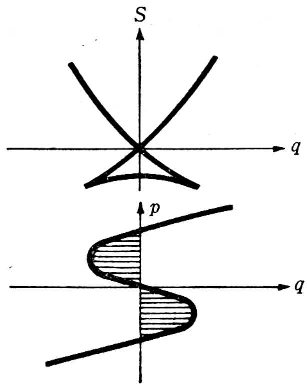


図 203 Hamilton-Jacobi の解の典型的な特異点

§47 Hamilton の正準方程式の積分，Hamilton-Jacobi の方法

本節では自由正準変換の母関数を定義する．

Hamilton-Jacobi の方法は次の発想による．座標に正準変換を施しても，運動方程式の正準形と Hamilton 関数は変わらない（§45, A 項）．

したがって，正準方程式が積分できる形に Hamilton 関数を移す正準変換が求められれば，元の正準方程式も積分できる．このような正準変換を作るという問題は，実は Hamilton-Jacobi の偏微分方程式の解を十分沢山求めることに帰着する．求める正準変換の母関数はこの方程式を満たさなければならない．

厄介なことに母関数という道具へ移ると，この道具は不変ではなく，本質的に相空間 $\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ の座標構造を使うことを注意しておく．なお，偏微分を使わねばならないが，その記号の中にすでに曖昧さがある*)．

A. 母関数 $2n$ 変数 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の $2n$ 個の関数 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ が正準変換 g: $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ を与えるとする．このとき，1-形式 $\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}$ は完全微分である（§45, A 項）：

---

*) (x, y) 平面上の $\partial u/\partial x$ は，座標 x の取り方だけでなく，座標 y の取り方にもよることを明確に理解すべきである．つまり，新しい座標 (x, z) では，$\partial u/\partial x$ の値はもはや同じではない．次のように書くべきであろう．

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=\mathrm{const}}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=\mathrm{const}}.$$

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}=dS(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}). \tag{1}$$

問 逆に，この形式が完全微分であれば，変換は正準であることを示せ. ——

さて，或る点 $(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0)$ の近傍で，独立座標として $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})$ がとれると仮定する．いい換えると，$(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0)$ で次の Jacobi 行列式が 0 でないと仮定しよう．

$$\det \frac{\partial(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q})}{\partial(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})} = \det \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \neq 0.$$

このような正準変換を**自由**であるという．このとき，関数 S をこの座標で局所的に表わすことができる：

$$S(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q}).$$

定義 関数 $S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q})$ を正準変換 g の**母関数**という．

S_1 は相空間 $\mathbf{R}^{2n}$ 上の関数ではないこと，つまり，点が $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}$ と表わされる或る 2 つの n 次元座標空間の直積 $\mathbf{R}^n{}_q \times \mathbf{R}^n{}_Q$ の領域上で与えられていることを強調しておく．

(1)から，S_1 の《偏微分》は次のようになる．

$$\frac{\partial S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p}, \qquad \frac{\partial S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{Q}} = -\boldsymbol{P}. \tag{2}$$

逆に，(2)によって，すべての関数 S_1 が或る正準変換 g を与えることも分る．

定理 $S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q})$ は，2 つの n 次元座標 Euclid 空間の直積の或る点 $(\boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{q}_0)$ の近傍で与えられた関数であるとする．このとき，

$$\det \left.\frac{\partial^2 S_1}{\partial \boldsymbol{Q} \partial \boldsymbol{q}}\right|_{\boldsymbol{Q}_0,\boldsymbol{q}_0} \neq 0$$

であれば，関数 S_1 は或る自由正準変換の母関数である．

証明 座標 $\boldsymbol{Q}$ に関する次の方程式を考えよう．

$$\frac{\partial S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{p}.$$

陰関数の定理により，この方程式は点 $(\boldsymbol{q}_0,\ \boldsymbol{p}_0 = \partial S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q}|_{\boldsymbol{Q}_0,\boldsymbol{q}_0})$ の近傍で解けて，関数 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ を定める(このとき，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0) = \boldsymbol{Q}_0$)．実際，このときに必要な行列式は $\det \partial^2 S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{Q} \partial \boldsymbol{q}|_{\boldsymbol{Q}_0,\boldsymbol{q}_0}$ であり，これは条件によって 0 でない．

さて，次の関数を考えよう．

$$\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{Q}} S_1(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q}).$$

そして，次のようにおく．

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{q}).$$

このとき，点 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ を点 $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}))$ へ移す局所変換 $g: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ は，S_1 を母関数とする正準変換である．なぜなら，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{P}$ の作り方によって，

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} = \frac{\partial S_1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} d\boldsymbol{q} + \frac{\partial S_1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{Q}} d\boldsymbol{Q}$$

であるから．また，$\det \partial \boldsymbol{Q}/\partial \boldsymbol{p} = \det(\partial^2 S_1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{Q}\partial \boldsymbol{q})^{-1} \neq 0$ であるから g は自由である．∎

変換 g は，一般に $2n$ 変数の関数 $2n$ 個によって与えられる．ところが上で見たように，正準変換は，$2n$ 変数の関数**ただ1つ**，すなわちその母関数により与えられる．正準変換が関係する計算のすべてに，母関数を使うことがどんな利点をもつかは容易に分ろう．変数の数 $2n$ が大きい程この利点も大きい．

B. 母関数に対する Hamilton-Jacobi の方程式　Hamilton 関数が変数 $\boldsymbol{Q}$ にのみ依存するような正準方程式は，容易に積分できることを注意しよう．実際，$H = K(\boldsymbol{Q})$ であれば，正準方程式は次の形である．

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{P}} = -\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{Q}}, \tag{3}$$

これから直ちに，解が得られる．

$$\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{Q}(0), \qquad \boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(0) - t\left.\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{Q}}\right|_{\boldsymbol{Q}_0}.$$

さて，Hamilton 関数 $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ を $K(\boldsymbol{Q})$ の形に移す正準変換を探そう．このためにはこのような変換の母関数 $S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})$ を探す．(2)から次の条件が得られる．

$$H\left(\frac{\partial S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t\right) = K(\boldsymbol{Q}). \tag{4}$$

ただし，微分した**後に**，$\boldsymbol{q}$ に $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ を代入する．$\boldsymbol{Q}$ を固定すると，方程式(4)は Hamilton-Jacobi の方程式の形である．

Jacobi の定理　もしも n 個のパラメーター Q_i に依存し*)，かつ，$\det \partial^2 S/\partial \boldsymbol{Q}\partial \boldsymbol{q} \neq 0$ であるような Hamilton-Jacobi 方程式(4)の解 S が求まれば，正準方程式

---

*) 方程式(4)の解の n-パラメーター族を方程式の**完全積分**という．

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \qquad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{5}$$

は求積法で解くことができる．このとき，条件 $\partial S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$ により定まる関数 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ は方程式(5)の n 個の第1積分である．

証明 母関数 $S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})$ をもつ正準変換を考えよう．(2)により $\boldsymbol{p} = \partial S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q}$，これから $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ が求まる．関数 $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ を新座標 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ で計算しよう．$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = H(\partial S(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q})$ となる．新座標で Hamilton 関数を求めるためには，(微分した後に) $\boldsymbol{q}$ に $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ を代入すべきである．しかし，(4)によると，この表示は $\boldsymbol{q}$ に全く依存しない．したがって，単に

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = K(\boldsymbol{Q})$$

となる．こうして，新座標では方程式(5)は(3)の形となる．これから直ちに Jacobi の定理が得られる．∎

Jacobi の定理は，常微分方程式系(5)を解くことを，偏微分方程式(4)を解くことに帰着させる．このように，簡単なものを複雑なものに帰着させることが，具体的な問題を解く効果的な方法を与えるとは驚くべきことのように見えるかも知れない．しかし，厳密解を求める方法のうち，これがもっとも強力なものであり，Jacobi が解いた多くの問題は，一般に他の方法では解けないのである．

C. 例　2つの固定中心による引力の問題を考えよう．この問題は，最近，人工衛星の運動を調べることに関係して関心が高まってきた．z 軸上の近接した2つの引力中心が，z 軸方向に少し引き伸ばされた楕円体の引力を近似することは明白である．残念ながら，地球は引き伸ばされていず，むしろ扁平である．その解決策は，z 軸上に座標 $\pm i\varepsilon$ をもつ2虚点に引力中心をおくことである．解に対する解析的な式は，もちろん複素領域でも正しい．このようにして，地球の重力場に対する近似が得られるが，このときの運動方程式は厳密解が求められ，また，Kepler の近似(地球は点である)よりも現実に近い．

ここでは簡単のために，同一の質量をもつ2つの固定中心による引力の平面問題だけを考えよう．Jacobi の方法は，適当な座標系いわゆる楕円座標系を使うことによって成功を収める．固定点 O_1, O_2 間の距離を $2c$ とし，動く質点までの距離を r_1, r_2 とする(図204)．楕円座標 ξ, η は点 O_1, O_2 までの距離の和お

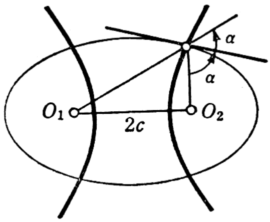


図 204 楕円座標系

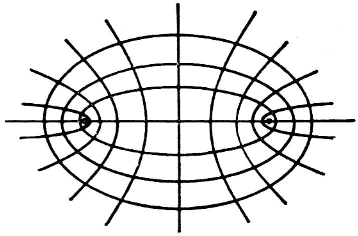


図 205 焦点を共有する楕円と双曲線

よび差として定義される: $\xi=r_1+r_2$, $\eta=r_1-r_2$.

問 楕円座標で Hamilton 関数を表わせ.

[解] 曲線 $\xi=\text{const}$ は O_1, O_2 に焦点をもつ楕円であり，曲線 $\eta=\text{const}$ は同一の焦点をもつ双曲線である (図 205). これらは互いに直交するから，$ds^2=a^2d\xi^2+b^2d\eta^2$ である. 係数 a, b を求めよう. 楕円に沿って運動すると，$dr_1=ds\cos\alpha$, $dr_2=-ds\cos\alpha$, $d\eta=2\cos\alpha ds$ である. 双曲線に沿って運動すると，$dr_1=ds\sin\alpha$, $dr_2=ds\sin\alpha$, $d\xi=2\sin\alpha ds$. ゆえに，$a=(2\sin\alpha)^{-1}$, $b=(2\cos\alpha)^{-1}$ である.

さらに，$\triangle O_1MO_2$ から

$$r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos 2\alpha=4c^2.$$

これより

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{4c^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2},\qquad \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{2r_1r_2}{2r_1r_2},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{4c^2-(r_1-r_2)^2}{4r_1r_2},\qquad \sin^2\alpha=\frac{(r_1+r_2)^2-4c^2}{4r_1r_2}.$$

ところで，$ds^2=\sum a_i^2dq_i^2$ であれば，$T=\sum a_i^2\dot{q}_i^2/2$, $p_i=a_i^2\dot{q}_i$, $H=\sum p_i^2/(2a_i^2)+U$ となる. ゆえに，

$$H=p_\xi^2\frac{(r_1+r_2)^2-4c^2}{2r_1r_2}+p_\eta^2\frac{4c^2-(r_1-r_2)^2}{2r_1r_2}-\frac{k}{r_1}-\frac{k}{r_2}.$$

ところで，$r_1+r_2=\xi$, $r_1-r_2=\eta$, $4r_1r_2=\xi^2-\eta^2$ である. 結局

$$H=2p_\xi^2\frac{\xi^2-4c^2}{\xi^2-\eta^2}+2p_\eta^2\frac{4c^2-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}-\frac{4k\xi}{\xi^2-\eta^2}.$$ ——

さて，Hamilton-Jacobi の方程式を解くことにしよう.

定義 方程式

$$\Phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_n},q_1,\cdots,q_n\right)=0$$

に変数 q_1 と導関数 $\partial S/\partial q_1$ とが，ひとまとめの形 $\varphi(\partial S/\partial q_1, q_1)$ でだけ入るとき，

変数 q_1 は分離するという.

このときには，次の形の解を求めるとよい.

$$S = S_1(q_1) + S'(q_2, \cdots, q_n).$$

元の方程式で $\varphi(\partial S/\partial q_1, q_1) = c_1$ とおけば，変数の数が少ない S' の方程式

$$\Phi_2\left(\frac{\partial S'}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, q_2, \cdots, q_n; c_1\right) = 0$$

が得られる. $S' = S'(q_2, \cdots, q_n; c_1, \boldsymbol{c})$ をパラメーター c_i に依存するこの方程式の解の族とする. S_1 が常微分方程式 $\varphi(dS_1/dq_1, q_1) = c_1$ を満たせば，関数 $S_1(q_1, c_1) + S'$ は元の方程式を満たす. 最後の方程式は簡単に解ける. dS_1/dq_1 を q_1 と c_1 とで表わして $dS_1/dq_1 = \psi(q_1, c_1)$，これから，$S_1 = \int^{q_1} \psi(q_1, c_1)\,dq_1$ となる.

さらに，(Φ_2 の)新しい方程式で1つの変数，たとえば q_2，が分離すると，この手続が繰り返せる. (都合がよければ) n 個の定数に依存する元の方程式の解

$$S_1(q_1; c_1) + S_2(q_2; c_1, c_2) + \cdots + S_n(q_n; c_1, \cdots, c_n)$$

が得られる. このようなとき，**変数が完全に分離する**という.

変数が完全に分離すれば，Hamilton-Jacobi の方程式 $\Phi_1(\partial S/\partial q, q) = 0$ の n 個の定数に依存する解が求積法により求まる. ところが，このときは対応する正準方程式は求積法によって解ける(Jacobi の定理).

以上を2つの固定中心の問題に適用しよう. Hamilton-Jacobi の方程式(4)は，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) = K(\xi^2 - \eta^2) + 4k\xi$$

となる. ここで変数を分離できる. たとえば次のようにおく

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 (\xi^2 - 4c^2) - 4k\xi - K\xi^2 = c_1,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 (4c^2 - \eta^2) + K\eta^2 = -c_1.$$

このとき，方程式(4)の完全積分は次の形で求まる.

$$S(\xi, \eta; c_1, c_2) = \int \sqrt{\frac{c_1 + c_2\xi^2 + 4k\xi}{\xi^2 - 4c^2}}\,d\xi + \int \sqrt{\frac{-c_1 - c_2\eta^2}{4c^2 - \eta^2}}\,d\eta.$$

Jacobi の定理は，こうして2つの固定中心の問題における運動を楕円積分を使って具体的に表わしている．この運動の詳しい定性的な研究は，C. V. L. Charlier の《天体力学》に見られる．

2つの固定中心による引力の問題は，1つの引力中心をもつ場において，別に一定引力を受ける運動の研究にも応用される．

つまり，固定中心からの Newton 引力と，方向，大きさが一定な或る1つの力《引力》の作用のもとで，質点の運動を問題とする．

この問題は，2つの固定中心による引力の問題の極限の場合と考えられる．極限へ移行するとき，第2の中心は引力の方向へ無限に遠ざかる．(そのとき，引力が一定であり続けるためには，質量は遠ざかる距離の2乗に比例して増大せねばならない.)

2つの固定中心による引力の問題の，極限の場合として得られる問題は，具体的に(楕円関数で)積分できる．極限移行を使えば，あるいは1つの中心をもつ場で一定の引力を受ける問題を，直接に変数分離すれば，これは確かめられる．

この問題で変数を分離する座標は，中心の1つを遠ざける極限移行によって，楕円座標から得られる．それは放物線座標と呼ばれ，次式で与えられる(引力の方向は x 軸に沿う)．

$$u=r-x, \qquad v=r+x.$$

一定の引力を受ける運動の軌道(その多くは極めて複雑である)の記述は，V. V. Beletskii の《宇宙物体の運動論概論》に見られる．

もう1つの例として，3軸楕円面上の測地線の問題を考えよう*)．ここでは Jacobi の楕円座標 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が有効である．これは次の方程式の3根である．

$$\frac{x_1{}^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2{}^2}{a_2+\lambda}+\frac{x_3{}^2}{a_3+\lambda}=1, \qquad \lambda_1>\lambda_2>\lambda_3.$$

ここで，x_1, x_2, x_3 は Descartes 座標である．変数が分離することの計算は引用せず(これは，たとえば Jacobi《力学講義》にある)，結果だけを述べる．つまり測地線の様子を記述しよう．

---

*) 楕円面上の測地線の問題とそれに近い楕円体撞球問題は，最近，レーザー機構に関係する一連の物理学の業績の中で，応用が見つかった．

曲面 $\lambda_1=\mathrm{const}$, $\lambda_2=\mathrm{const}$, $\lambda_3=\mathrm{const}$ は，焦点を共有する2次曲面である．その1つは楕円面であり，もう1つは1葉双曲面，残る1つは2葉双曲面である．楕円面は楕円の内部に退化するかも知れず，1葉双曲面は楕円の外部か双曲線の2つの分枝の間の平面部分に，また，2葉双曲面は双曲線の分枝の外側の平面部分か平面に退化するかも知れない．

考えている楕円面は主半軸が $a>b>c$ である，楕円面の族のうちの1つであるとする．3つの楕円 $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ のおのおのは閉測地線である．最大の楕円(主半軸は a, b)上の点を，ほぼこの楕円に沿って出発する測地線は(図206)，楕円面と上記の族の或る1葉双曲面 $\lambda=\mathrm{const}$*) との交わりである2閉曲線にかわるがわる接する．

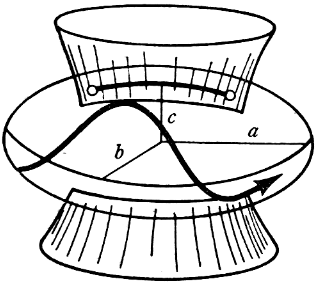


図206　3軸楕円面上の測地線

この測地線は閉じるか，または交線の間の円環領域を至るところ稠密に満たす．測地線の傾きが増すにつれて，双曲面はこの楕円面を4つの《臍点》†) で横切る双曲線の《内部領域》へと縮まっていく．極限の場合に《臍点》を通る測地線となる(図207)．

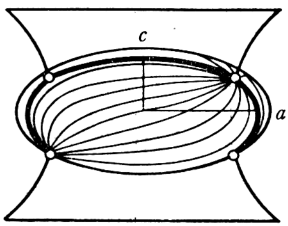


図207　臍点から出る測地線

*) これら焦点を共有する曲面の交線は楕円体の**曲率曲線**でもある．

†) 臍点，共焦点2次曲面については，Hilbert-Cohn-Vossen [1] を見よ．

臍点から出る測地線はすべて反対側の臍点に集まること，このような2つの臍点の間が同一の距離にあることは興味深い．しかし，これらの測地線のうち1本だけが閉じる．それは主半軸 a, c をもつ中間の大きさの楕円である．臍点を通る別の任意の測地線に沿っていずれの側に進もうと，次第にこの楕円に近づく．

最後に，最大の楕円をより《急角度》で横切る測地線は(図208)，この楕円面と2葉双曲面の交わりである2曲線*) にかわるがわる接する．一般に，この測地線は2曲線間の円環領域を至るところ稠密に満たす．

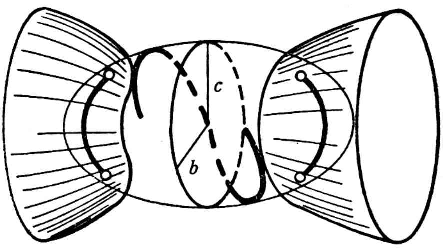


図208　2葉双曲面に接する楕円面の測地線

このような測地線のうち，主半軸 b, c をもつ最小の楕円が際立って見える．

《与えられた微分方程式を積分する際の主要な困難は，適切な変数を導入することにあるが，それを探すための法則は皆無である．したがって，われわれは道を逆に辿らねばならない．つまり，何か或る素晴しい変換を見つけ，それが成功裡に適用できる問題を探さねばならない》(Jacobi《力学講義》)．

球面座標，楕円座標，放物線座標で変数分離を許す問題の一覧表が Landau-Lifshitz [1]，§48 にある．

§48 母　関　数

本節では非自由正準変換に対して母関数という道具を作る．

A. 母関数 $S_2(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{q})$． $g: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, $g(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ を正準変換とする．正準変換の定義により，$\mathbf{R}^{2n}$ 上の1次微分形式

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q} = dS$$

*) これもまた曲率曲線である．

は或る関数 $S(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ の全微分である．$2n$ 個の独立座標として $\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q}$ がとれると正準変換は**自由**である．このとき，関数 S を $\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q}$ で表わしたもの $S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q})$ を**母関数**という．この関数1つを知れば，変換を与える $2n$ 個の関数すべてが次の関係式から求められる．

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q})}{\partial \boldsymbol{q}},\qquad \boldsymbol{P}=-\frac{\partial S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q})}{\partial \boldsymbol{Q}}. \tag{1}$$

しかし，すべての正準変換が自由であるという訳ではない．たとえば恒等変換では，$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{q}$ とは独立でない．したがって，恒等変換は母関数 $S_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q})$ によっては与えられない．

しかし，Legendre変換によって，別の形をした母関数へ移ることができる．たとえば，$\mathbf{R}^{2n}$ の独立な局所座標として $\boldsymbol{P},\boldsymbol{q}$ がとれるとする(つまり，行列式 $\det\partial(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})/\partial(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\det\partial\boldsymbol{P}/\partial\boldsymbol{p}$ が0でない)．このとき次のことが成り立つ．

$$\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q}=dS,\qquad \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}+\boldsymbol{Q}d\boldsymbol{P}=d(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}+S).$$

$\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}+S$ を $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})$ で表わしたものを，また**母関数**という：

$$S_2(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}+S(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}).$$

この関数に対しては次のことが分る．

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial S_2(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}},\qquad \boldsymbol{Q}=\frac{\partial S_2(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{P}}. \tag{2}$$

逆に，$S_2(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})$ は任意の関数で，行列式

$$\det\frac{\partial^2 S_2(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}\partial\boldsymbol{P}}\bigg|_{\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{q}_0}$$

が0でなければ，点 $(\boldsymbol{p}_0=\partial S_2(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})/\partial\boldsymbol{q}|_{\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{q}_0},\ \boldsymbol{q}_0)$ の近傍で方程式(2)の前半は $\boldsymbol{P}$ について解ける．こうして，関数 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ (ここで，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)=\boldsymbol{P}_0$) が得られる．続いて，方程式(2)の後半が関数 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ を定め，写像 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\to(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ は正準である(証明せよ！)．

問　恒等変換 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{q}$ に対する母関数 S_2 を求めよ．

［解］ $\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}$.

注意　式(2)には負符号が現われない．したがって，恒等変換の母関数 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}$ を覚えれば，(2)は容易に想い出せるという点でも，母関数 $S_2(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q})$ は便利である．

B. 2^n 個の母関数　残念ながら，変数 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{q}$ もまた常に局所座標として選べる訳ではない．しかし，いつでも n 個の新しい座標の**或る組**

$$\boldsymbol{P}_i=(P_{i_1},\cdots,P_{i_k}),\qquad \boldsymbol{Q}_j=(Q_{j_1},\cdots,Q_{j_{n-k}})$$

を選び，もとの変数 $\boldsymbol{q}$ と併せて，$2n$ 個の独立座標を得ることができる．

ここで，$(i_1,\cdots,i_k)$，$(j_1,\cdots,j_{n-k})$ は集合 $(1,\cdots,n)$ の共通元をもたない分割であり全部で 2^n 個ある．

定理　$g:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ は正準変換で，関数 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ で与えられるとする．このとき，各点 $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)$ の近傍で，関数の組 $(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{q})$ の 2^n 個のうち，少なくとも1つは $\mathbf{R}^{2n}$ の独立座標にとることができる．つまり，

$$\det\frac{\partial(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{q})}{\partial(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_j,\boldsymbol{q})}=\det\frac{\partial(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j)}{\partial(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_j)}\neq 0.$$

このような近傍では，正準変換 g は次の関数 S_3 から関係式(3)により再現できる．

$$S_3(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_i)+\int \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}d\boldsymbol{Q},$$

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial S_3}{\partial \boldsymbol{q}},\qquad \boldsymbol{Q}_i=\frac{\partial S_3}{\partial \boldsymbol{P}_i},\qquad \boldsymbol{P}_j=-\frac{\partial S_3}{\partial \boldsymbol{Q}_j}.\tag{3}$$

逆に，$S_3(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{q})$ は行列式 $\det\partial^2S_3/\partial\boldsymbol{R}\partial\boldsymbol{q}|_{\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{q}_0}$ $(\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j)$ が0でない任意の関数であれば，関係式(3)は点 $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)$ の近傍で正準変換を与える．

証明　この定理の証明は $k=n$ の場合に上で実行したものとほとんど同じである．確かめるべきことは，2^n 個の組 $(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j,\boldsymbol{q})$ のうち，1つはその行列式 $\det\partial(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j)/\partial(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_j)$ が0でないということだけである．

点 $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0)$ において，この変換 g の微分 dg を考える．$\mathbf{R}^{2n}$ の接空間を $\mathbf{R}^{2n}$ と同一視すれば，dg をシンプレクティック変換 $S:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ と思ってよい．

$\mathbf{R}^{2n}$ の $\boldsymbol{p}$-座標平面 P(つまり，$\boldsymbol{q}=0$)を考える(図209)．これは n 次元零平面であり，その像 SP も零平面である．平面 SP を座標平面 $\boldsymbol{\sigma}=\{(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{q}_j)\}$ へ，他の座標軸に平行に，すなわち，n 次元の座標零平面 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\{(\boldsymbol{p}_j,\boldsymbol{q}_i)\}$ の方向に射影する．$T:SP\to\sigma$ で射影作用素を表わす．

条件 $\det\partial(\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_j)/\partial(\boldsymbol{p}_i,\boldsymbol{p}_j)\neq 0$ により，$TS:P\to\sigma$ は退化しない．また作用素 S は退化しない．よって，TS が退化しないためには，$T:SP\to\sigma$ の退化しないことが必要十分である．いいかえると，零平面 SP は座標零平面 $\bar{\sigma}$ に横断的でなければならない．しかし§41で示したように，2^n 個の座標零平面のうち少なくとも1つは SP に横断的である．故に，2^n 個の行列式のうち1つは0でない．∎

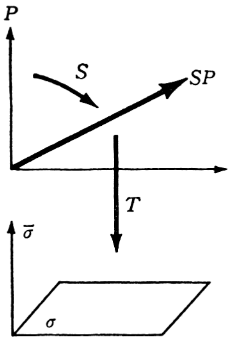


図 209　非退化性を確かめるために

問　上述の 2^n 種類の母関数の系が極小であること，すなわち，2^n 個の行列式のうち1つだけが0でない正準変換が存在することを示せ*)．

C. 無限小正準変換†)　さて，恒等変換に近い正準変換を考えよう．その母関数は恒等変換の母関数 $\boldsymbol{Pq}$ に近くとることができる．パラメーター ε について微分可能である正準変換 g_ε の族を考えよう．したがって母関数は次の形である．

$$\boldsymbol{Pq}+\varepsilon S(\boldsymbol{P},\boldsymbol{q};\varepsilon)\,;\qquad \boldsymbol{p}=\boldsymbol{P}+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}},\qquad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{q}+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{P}}. \tag{4}$$

無限小正準変換とは，族 g_ε の同値類をいう．2つの族 g_ε と h_ε とは，その差が2次以上のオーダーであるとき，つまり，$|g_\varepsilon-h_\varepsilon|=O(\varepsilon^2)$，$\varepsilon\to 0$ となるとき同値である．

定理　無限小正準変換は $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=S(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},0)$ を Hamilton 関数とする Hamilton の微分方程式を満たす．つまり，

$$\left.\frac{d\boldsymbol{P}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}},\qquad \left.\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}.$$

証明　式(4)で，$\varepsilon\to 0$ のとき $\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{p}$ となることから得られる．▮

系　相空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の変換が作る1-パラメーター群は，これらの変換が正準であるとき，かつこのときに限り，Hamilton の正準方程式を満たす．——

---

*)　母関数の種類の数はいろいろな教科書で4から 4^n までのばらつきがある．

†)　この項については Arnold-Avez [1]，付録32，§B を見るとよい．

この定理との関連で，Hamilton 関数 H を《無限小正準変換の母関数》という．母関数 S とは異なり，関数 H は相空間の点の関数であり，変換と不変な形で結びついていることに注意しよう．

関数 H には，簡単な幾何学的意味がある．x, y を $\mathbf{R}^{2n}$ の 2 点とし(図 210)，γ はこの 2 点を結ぶ曲線，$\partial\gamma=y-x$ とする．曲線 γ を変換により動かしたもの $g_\tau\gamma$; $0\leq\tau\leq\varepsilon$ を考えよう．曲面 $\sigma(\varepsilon)$ ができる．2-チェイン σ に沿って，形式 $\omega^2=\sum dp_i\wedge dq_i$ を積分する．σ の境界は $\partial\sigma=g_\varepsilon\gamma-\gamma+g_\tau x-g_\tau y$ である．

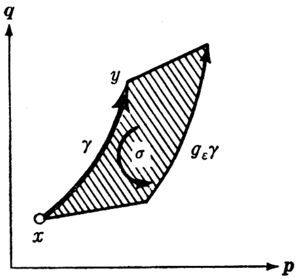


図 210　Hamilton 関数の幾何学的意味

問　次の極限が存在し，かつ，同値類 g_ε の代表元にはよらないことを示せ．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\sigma(\varepsilon)}\omega^2=H(x)-H(y).$$ ——

これより，次の既知の結果がもう一度得られる．

系　正準変換は，正準方程式の形および Hamilton 関数の値を変えない．

証明　実際，われわれは Hamilton 関数の増分を計算したが，それは $\mathbf{R}^{2n}$ の無限小正準変換とシンプレクティック構造，つまり形式 ω^2 のみを使ったからである．▮

第10章 摂動論入門

摂動論は，《非摂動》問題が厳密に解けるとき，この問題に近い《摂動》問題を近似的に解くための極めて有効な方法を集めたものである．そう長くない時間域における運動を問題とする限り，これらの方法は妥当である．長い，あるいは無限の時間域にわたる運動を研究するとき，摂動論の結論がどの程度信用できるか，という問題は殆ど研究されていない．

積分可能な《非摂動》問題の多くは，運動が条件周期的であることが分る．非摂動問題のみならず，とりわけ，摂動問題の運動を研究するとき，特別なシンプレクティック座標，すなわち，《作用-角》変数が有効である．最後に，単一振動系の摂動論に基礎を与える定理，および，このような系における作用変数の断熱不変性を証明する．

§49 積分可能な系

$2n$ 個の常微分方程式からなる系を積分するためには，$2n$ 個の第1積分を知る必要がある．微分方程式の正準系が与えられたときには，多くの場合，n 個だけの第1積分を知ればよいこと，このおのおのが系の変数を1つではなく2つ減らすことが分る．

A. 積分可能な系に関する Liouville の定理 関数 F は，H との Poisson 括弧が恒等的に0に等しいとき：

$$(F, H) \equiv 0,$$

かつこのときに限り，Hamilton 関数 H をもつ系の第1積分であった．

定義 シンプレクティック多様体上の2つの関数 F_1, F_2 が，**互いに対合的であるとは**，その Poisson 括弧が0に等しいときをいう．

Liouville は次のことを示した．自由度 n の系(つまり，$2n$ 次元相空間)では，独立な n 個の互いに対合的な第1積分が分れば，系は求積法で解ける．

この定理の厳密な定式化は次の通りである．

$2n$ 次元シンプレクティック多様体上に，互いに対合的な n 個の関数 F_i,

$$F_1, \cdots, F_n; \quad (F_i, F_j) \equiv 0, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

が与えられたとする．

関数 F_i のレベル集合を考えよう.

$$M_f=\{x:\ F_i(x)=f_i,\ i=1,\cdots,n\}.$$

M_f 上, n 個の関数 F_i は独立である(すなわち, n 個の1-形式 dF_i が M_f の各点で1次独立である)と仮定する. このとき,

1)　M_f は滑らかな多様体であり, $H=F_1$ を Hamilton 関数とする相流に関して, 不変である.

2)　多様体 M_f がコンパクトかつ連結であれば, M_f は n 次元トーラス T^n に微分同相である:

$$T^n=\{(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\ \mathrm{mod}\ 2\pi\}.$$

3)　H を Hamilton 関数とする相流は M_f 上に, 条件周期運動を定める. つまり, 角座標 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ では,

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}=\boldsymbol{\omega},\qquad \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}(f).$$

4)　H を Hamilton 関数とする正準方程式は求積法により解くことができる. ——

この定理を証明する前に, その系を注意しておく.

系1　自由度2の正準系では, Hamilton 関数 H に依存しない1つの第1積分 F が分れば, この系は求積法で解ける. 相空間の2次元連結コンパクト部分多様体 $H=h$, $F=f$ は, 不変トーラスであり, その上の運動は条件周期的である.

証明　実際, F と H とは互いに対合的である. なぜなら, F は Hamilton 関数 H をもつ系の第1積分であるからである. ▮

自由度3の系の例として, 軸上の1点に固定された Lagrange の重い対称なこまを考えよう(§30). この時は, すぐ3つの第1積分 H, M_z, M_3 が目につく. 積分 M_z と M_3 とが互いに対合的であることは容易に確かめられる. さらに, 相空間の多様体 $H=h$ はコンパクトである. よって, 何ら計算をすることなく, 直ちに次のことがいえる. 殆どの初期条件に対して*), こまの運動は条件周期的である. 相軌道は3次元トーラス $H=c_1$, $M_z=c_2$, $M_3=c_3$ を稠密に満たす. 対応する3つの振動数を, 固有回転振動数, 歳差振動数, 章動振動数という.

---

*)　除外点は, 積分の特異レベル集合を表わす. そこでは積分の独立性が破れる.

別の例が次の注意から得られる．正準方程式系が Hamilton-Jacobi の方法で積分できるならば，系は互いに対合的な n 個の第1積分をもつ．

実際，この方法は P_i が第1積分となるような正準変換 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \to (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ を求めることにある．ところで，明らかに，P_i, P_j は互いに対合的である．

とくに，以上のことは2つの固定中心による引力の問題に応用できる．もっと多くの例を挙げることは易しい．実際，上述の Liouville の定理は今日まで積分できたすべての力学の問題を含むからである．

B. Liouville の定理の証明にとりかかる．第1積分のレベル集合

$$M_f = \{x: F_i = f_i,\ i=1, \cdots, n\}$$

を考えよう．条件により，n 個の1-形式 dF_i は M_f の各点で1次独立である．したがって，陰関数の定理により，M_f は $2n$ 次元相空間の n 次元部分多様体である．

補題1 n 次元多様体 M_f 上に，互いに可換で，かつ各点で1次独立な n 個の接ベクトル場が存在する．

証明 相空間のシンプレクティック構造は，1-形式をベクトル場へ移す作用素 I を定める．この作用素 I は，1-形式 dF_i を Hamilton 関数 F_i をもつ系の相速度場 IdF_i へ移す．n 個の場 IdF_i は M_f に接し，互いに可換であり，かつ独立である，ことを示そう．

実際，dF_i が独立であり，同型 I が退化しないことから，IdF_i は M_f の各点で独立である．場 IdF_i は互いに可換である．なぜなら，その Hamilton 関数の Poisson 括弧は $(F_i, F_j) \equiv 0$ であるから．同じ理由で，関数 F_i の場 IdF_i 方向への微分は，すべての $i, j=1, \cdots, n$ に対して0に等しい．故に場 IdF_i は M_f に接する．∎

補題1で次のことも証明されたことに注意しよう．

1′) 多様体 M_f は，Hamilton 関数 F_i に対する相流 g_i^t $(g_i^t g_j^s = g_j^s g_i^t)$ のおのおのに関して不変である．

1″) 多様体 M_f は，零集合である（すなわち，2-形式 ω^2 は $TM_f|_x$ 上0である）．

実際，n 個のベクトル $IdF_i|_x$ は互いに歪直交し（$(F_i, F_j) \equiv 0$），多様体 M_f の点 x における接平面の基底をなすからである．

C. 群 $\mathbf{R}^n$ が推移的に作用する多様体 さて，次の位相幾何学的な命題を使う(証明は p. 271 で終る).

補題 2 M^n を連結なコンパクト n 次元微分可能多様体とし，M^n 上に互いに可換で，かつその各点で 1 次独立な n 個のベクトル場が与えられたとする．このとき，多様体 M^n は n 次元トーラスに微分同相である．

証明 与えられた n 個のベクトル場に対応する，M の微分同相がつくる 1-パラメーター群を g_i^t, $i=1, \cdots, n$ と表わす．ベクトル場が互いに可換であるから，群 g_i^t, g_j^s は可換である．よって，可換群 $\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{t}\}$ の作用 g を多様体 M 上に次のように定義することができる．

$$g^{\boldsymbol{t}}: M \longrightarrow M, \qquad g^{\boldsymbol{t}} = g_1^{t_1} \cdots g_n^{t_n} \qquad (\boldsymbol{t}=(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbf{R}^n).$$

明らかに，

$$g^{\boldsymbol{t}+\boldsymbol{s}} = g^{\boldsymbol{t}} g^{\boldsymbol{s}}, \qquad \forall \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in \mathbf{R}^n.$$

点 $\boldsymbol{x}_0 \in M$ を固定する．このとき次の写像が得られる．

$$g: \mathbf{R}^n \longrightarrow M, \qquad g(\boldsymbol{t}) = g^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{x}_0.$$

(点 $\boldsymbol{x}_0$ を時間 t_1 だけ第 1 の流れの軌道に沿って，時間 t_2 だけ第 2 の流れの軌道に沿って，…，動かす.)

問 1 点 $O \in \mathbf{R}^n$ の十分小さな近傍 V をとれば，写像 g は点 $\boldsymbol{x}_0$ を覆うチャートを与える(図 211)．つまり，各点 $\boldsymbol{x}_0 \in M$ で，近傍 U, $\boldsymbol{x}_0 \in U \subset M$ が存在して，g は V を U の上へ微分同相に写す，ことを示せ．

［ヒント］ 陰関数の定理を適用し，点 $\boldsymbol{x}_0$ において場が 1 次独立であることを使う．

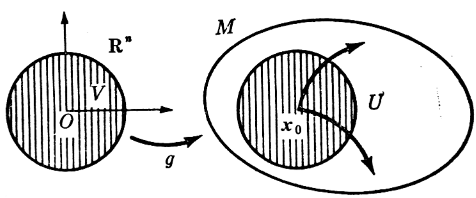


図 211 問 1 のために

問 2 $g: \mathbf{R}^n \to M$ は上への写像である，ことを示せ．

［ヒント］ 点 $\boldsymbol{x} \in M$ を $\boldsymbol{x}_0$ と曲線で結び(図 212)，上の問にいう近傍 U の有限個で曲線を覆え．各曲線弧における移動 $\boldsymbol{t}_i$ の和として $\boldsymbol{t}$ を定めよ．——

写像 $g: \mathbf{R}^n \to M^n$ は 1 対 1 ではありえない．M^n はコンパクトであるが，$\mathbf{R}^n$ はそうではないからである．点 $\boldsymbol{x}_0 \in M^n$ の原像を調べよう．

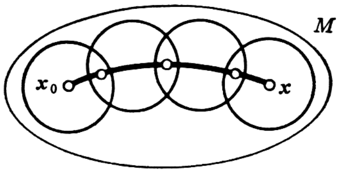


図 212 問2のために

定義 点 x_0 の**固定群**とは，$g^t x_0 = x_0$ となるような点 $t \in \mathbf{R}^n$ の集合 Γ をいう．

問 3 Γ は群 $\mathbf{R}^n$ の部分群であり，点 x_0 にはよらない，ことを示せ．

［解］ $g^t x_0 = x_0$, $g^s x_0 = x_0$ であれば，

$$g^{s+t} x_0 = g^s g^t x_0 = g^s x_0 = x_0, \qquad g^{-t} x_0 = g^{-t} g^t x_0 = x_0.$$

よって，Γ は $\mathbf{R}^n$ の部分群である．$x = g^r x_0$, $t \in \Gamma$ であると，$g^t x = g^{t+r} x_0 = g^r g^t x_0 = g^r x_0 = x$. ——

こうして，固定群 Γ は点 x_0 によらない群 $\mathbf{R}^n$ の部分群として定義される．とくに，点 $t=0$ は Γ に属する．

問 4 $\mathbf{R}^n$ の点 $t=0$ の十分小さい近傍には，点 $t=0$ 以外の固定群 Γ の点は存在しない，ことを示せ．

［ヒント］ 写像 $g: V \to U$ は微分同相である．

問 5 任意の点 $t \in \Gamma \subset \mathbf{R}^n$ の近傍 $t+V$(図 213)には，点 t 以外の固定群 Γ の点は存在しない，ことを示せ．

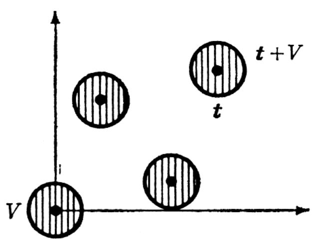


図 213 問5のために

こうして，固定群 Γ の点は $\mathbf{R}^n$ で**離散的**である．このような群を**離散部分群**という．

例 $e_1, \cdots, e_k$, $0 \leq k \leq n$ を，$\mathbf{R}^n$ の1次独立な k 本のベクトルとする．これらのベクトルの整係数1次結合全体(図 214)

$$m_1 e_1 + \cdots + m_k e_k, \qquad m_i \in \boldsymbol{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

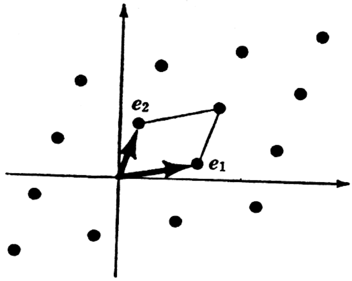


図 214 平面の離散部分群

は $\mathbf{R}^n$ の離散部分群をつくる．たとえば，平面上の整数点全体は平面の離散部分群である．

D. $\mathbf{R}^n$ の離散部分群 ここで次の代数的事実を使う．つまり，$\mathbf{R}^n$ の離散部分群はすべて上述のものに限る．正確には次の補題が証明できる．

補題 3 Γ を $\mathbf{R}^n$ の離散部分群とする．このとき，k 個 $(0\leq k\leq n)$ の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k \in \Gamma$ が存在して，Γ はこれらのベクトルの整係数 1 次結合全体に一致する．

証明 $\mathbf{R}^n$ に何か或る Euclid 構造を与えておく．常に，$0\in\Gamma$ である．$\Gamma=\{0\}$ ならば証明は終る．そうでなければ，$\boldsymbol{e}_0\in\Gamma$, $\boldsymbol{e}_0\neq 0$ となるベクトルが存在する(図 215)．直線 $\mathbf{R}\boldsymbol{e}_0$ を考えよう．この直線上に 0 にもっとも近い Γ の点 $\boldsymbol{e}_1$ が存在することを示そう．実際，中心 0，半径 $|\boldsymbol{e}_0|$ である球の中に，Γ の点は有限個しか存在しない(上で見たように，Γ の各点には Γ の他の点を含まない同じ大きさの近傍 V が存在する)．

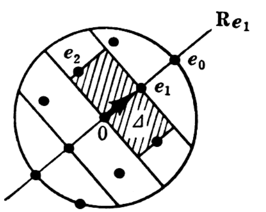


図 215 離散部分群に関する補題の証明のために

この球内の有限個の点のうち，直線 $\mathbf{R}\boldsymbol{e}_0$ 上にあって 0 にもっとも近い点 $\boldsymbol{e}_1$ は，この直線上で 0 にもっとも近い Γ の点である．

直線 $\mathbf{R}\boldsymbol{e}_0$ 上では $\boldsymbol{e}_1$ の整数倍 $(m\boldsymbol{e}_1,\ m\in\boldsymbol{Z})$ のみが Γ に属する．実際，点 $m\boldsymbol{e}_1$ はこの直線を長さ $|\boldsymbol{e}_1|$ の線分に分ける．もし，これらの線分 $(m\boldsymbol{e}_1, (m+1)\boldsymbol{e}_1)$

の1つの内部に点 $e \in \Gamma$ があれば，点 $e-me_1 \in \Gamma$ は e_1 よりも0に近い．

もし，Γ に $\mathbf{R}e_1$ 以外の点がなければ証明は終る．点 $e \in \Gamma$, $e \notin \mathbf{R}e_1$ が存在するものとする．直線 $\mathbf{R}e_1$ にもっとも近い点 $e_2 \in \Gamma$（直線 $\mathbf{R}e_1$ 上にはない）が存在することを示そう．e を直線 $\mathbf{R}e_1$ へ正射影する．射影した像は，どれか1つの線分 $\varDelta=\{\lambda e_1\}$, $m \leq \lambda < m+1$ に入る．$\varDelta$ を中心軸とし，$\varDelta$ から e までの距離を半径とする直円柱 C を考える．この円柱には群 Γ の（0でない）有限個の点がある．

中心軸上にはなくて，軸 $\mathbf{R}e_1$ にもっとも近い点を e_2 とする．

問6　軸 $\mathbf{R}e_1$ 上にない群 Γ の任意の点 e からこの軸までの距離は，点 e_2 から軸 $\mathbf{R}e_1$ までの距離より短くはない，ことを示せ．

［ヒント］ e を me_1 だけ移動すれば，この軸への射影像を，線分 $\varDelta$ へ移せる．——

e_1 と e_2 の整係数1次結合は，平面 $\mathbf{R}e_1+\mathbf{R}e_2$ 上，格子をつくる．

問7　平面 $\mathbf{R}e_1+\mathbf{R}e_2$ 上には，e_1 と e_2 の整係数1次結合以外の群 Γ の点は，存在しない，ことを示せ．

［ヒント］ 平面を平行4辺形 $\varDelta=\{\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2\}$, $m_i \leq \lambda_i < m_i+1$ に分割せよ（図216）．もしも，或る $e \in \varDelta \cap \Gamma$ が，$e \neq m_1e_1+m_2e_2$ ならば，点 $e-m_1e_1-m_2e_2$ は e_2 よりも軸 $\mathbf{R}e_1$ に近い．——

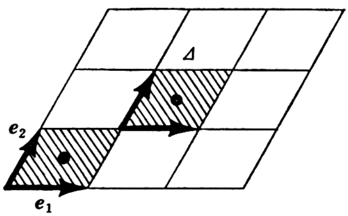


図216　問7のために

Γ に平面 $\mathbf{R}e_1+\mathbf{R}e_2$ 以外の点がなければ，証明は終る．この平面外に $e \in \Gamma$ があるとする．このとき，平面 $\mathbf{R}e_1+\mathbf{R}e_2$ にもっとも近い点 $e_3 \in \Gamma$ が存在する．点 $m_1e_1+m_2e_2+m_3e_3$ は3次元空間 $\mathbf{R}e_1+\mathbf{R}e_2+\mathbf{R}e_3$ 内の Γ を尽くす．これでも Γ が尽きなければ，この3次元空間にもっとも近い点をとろう….

問8　毎回，もっとも近い点が存在する，ことを示せ．

［ヒント］ 対応する《円柱》C 内の有限個の点のうち，もっとも近いものをとれ．——

得られるベクトル $e_1, e_2, e_3, \cdots$ は，すべて1次独立である．これらはすべて $\mathbf{R}^n$ に属するから，その数 k は n 以下である．

問 9　Γ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ の整係数 1 次結合で尽きる，ことを示せ．

［ヒント］　平面 $\mathbf{R}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\mathbf{R}\boldsymbol{e}_k$ を平行 4 辺形 Δ に分割し，どの Δ にも Γ の点がないことを示せ．また，$\boldsymbol{e}\in\Gamma$ が平面 $\mathbf{R}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\mathbf{R}\boldsymbol{e}_k$ 外にあれば手続きはまだ終らない．——

以上によって，補題 3 が証明された．▮

今や，**補題 2**: M_f はトーラス T^n に微分同相である，**の証明**は難しくない．

k 個の円周と $n-k$ 本の直線との直積:

$$T^k\times\mathbf{R}^{n-k}=\{(\varphi_1, \cdots, \varphi_k, y_1, \cdots; y_{n-k})\}, \qquad \boldsymbol{\varphi} \bmod 2\pi$$

と自然な写像 $p:\mathbf{R}^n\to T^k\times\mathbf{R}^{n-k}$ とを考える．ここで

$$p(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{\varphi} \bmod 2\pi, \boldsymbol{y}).$$

点 $\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_k\in\mathbf{R}^n$ ($\boldsymbol{f}_i$ の座標は $\varphi_i=2\pi$, $\varphi_j=0$, $\boldsymbol{y}=0$) はこの写像により 0 へ移る．

$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k\in\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ を固定群 Γ の生成元とする(補題 3 参照)．ベクトル $\boldsymbol{f}_i$ が $\boldsymbol{e}_i$ へ移るように線形空間 $\mathbf{R}^n=\{(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{y})\}$ を空間 $\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{t}\}$ の上へ写す．$A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ をこのような同型とする．

$\mathbf{R}^n=\{(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{y})\}$ は $T^k\times\mathbf{R}^{n-k}$ のチャートを与え，$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{t}\}$ は多様体 M_f のチャートである．

問 10　チャートの写像 $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ は，微分同相 $\tilde{A}:T^k\times\mathbf{R}^{n-k}\to M_f$ を与える，ことを示せ．

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}^n=\{(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{y})\} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{t}\} \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
T^k\times\mathbf{R}^{n-k} & \xrightarrow{\tilde{A}} & M_f
\end{array}$$

——

ところで，条件により M_f はコンパクトであるから $k=n$ であり，M_f は n 次元トーラスである．これで補題 2 が証明された．▮

補題 1 により，定理の最初の 2 つの主張が証明された．同時に，M_f 上に角座標 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \bmod 2\pi$ を構成した．

問 11　Hamilton 関数 H に対する相流の作用のもとでは，角座標 $\boldsymbol{\varphi}$ は一様である，ことを示せ．つまり，

$$\dot{\varphi}_i=\omega_i, \qquad \omega_i=\omega_i(\boldsymbol{f}), \qquad \boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\omega}t.$$

いい換えると，不変トーラス M_f 上の運動は，条件周期的である．

［ヒント］　$\boldsymbol{\varphi}=A^{-1}\boldsymbol{t}$. ——

定理の主張のうち最後のもの: 系が求積法で解けること，だけが残った．

§50　作用-角変数

ここでは Liouville の定理の条件のもとで次のようなシンプレクティック座標 $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi})$ が選べることを示す．すなわち，$\boldsymbol{\varphi}$ はトーラス M_f 上の角座標であり，第1積分 $\boldsymbol{F}$ はいずれも $\boldsymbol{I}$ にのみ依存する．

A. 作用-角変数の記述　§49ではもっぱら，積分のレベル集合であるコンパクト連結多様体 $M_f=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}\}$ を調べた．M_f は相流で不変な n 次元トーラスであった．また，M_f 上には Hamilton 関数 $H=F_1$ に対する相流が，M_f 上でとくに簡単な形

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{f}), \qquad \boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\omega}t$$

をとるように角座標 φ_i を選んだ．$2n$ 次元相空間の中で，n 次元多様体 M_f の近傍を考えよう．

問　多様体 M_f は n 次元トーラス T^n と n 次元球 D^n の直積に微分同相な近傍をもつ，ことを示せ．

［ヒント］　座標として，関数 F_i と上にいう角 φ_i とをとれ．dF_i の1次独立性により，関数 F_i と角 φ_i $(i=1, \cdots, n)$ が，多様体 M_f の近傍と直積 $T^n \times D^n$ との微分同相を与える．——

この座標 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi})$ では，Hamilton 関数 $H=F_1$ に対する相流は $2n$ 個の常微分方程式からなる極めて簡単な系の形に書き表わされる：

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{dt}=0, \qquad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{F}). \tag{1}$$

これは直ちに積分できて，$\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}(0)$，$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{F}(0))t$ である．

このように，もとの正準微分方程式系を具体的に積分するためには，変数 $\boldsymbol{\varphi}$ を具体的に見出せばよい．これは求積法だけで可能である．変数 $\boldsymbol{\varphi}$ のとり方を以下で述べる．

なお，変数 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi})$ は一般には，シンプレクティック座標ではない．しかし，$\boldsymbol{F}$ の或る関数，それを $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{F})$，$\boldsymbol{I}=(I_1, \cdots, I_n)$ と記す，が存在して，変数 $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi})$ がシンプレクティック座標となるのである．このとき，もとのシンプレクティック構造 ω^2 は次式によって表わされる．

$$\omega^2=\sum_i dI_i \wedge d\varphi_i.$$

変数 $\boldsymbol{I}$ を**作用変数**といい*)，角変数 $\boldsymbol{\varphi}$ と併せれば，多様体 M_f の近傍で正準座標系，**作用-角変数**をなす．

I_i は第1積分 F_j の関数だから，Hamilton 関数 $H=F_1$ に対する系の第1積分である．もちろん，変数 F_i を $\boldsymbol{I}$ で，とくに $H=F_1=H(\boldsymbol{I})$ を $\boldsymbol{I}$ で表わすことができる．作用-角変数では，考えている相流の微分方程式(1)は次の形になる．

$$\frac{d\boldsymbol{I}}{dt}=0,\qquad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}). \tag{2}$$

問　(2)における関数 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I})$ は任意でよいか．

［解］　変数 $(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})$ では，流れの方程式(2)は Hamilton 関数 $H(\boldsymbol{I})$ に対して正準形である．したがって，$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I})=\partial H/\partial \boldsymbol{I}$．よって，自由度が2以上であれば，関数 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I})$ は任意ではなく，対称性の条件 $\partial\omega_i/\partial I_j=\partial\omega_j/\partial I_i$ を満たす．——

作用-角変数は摂動論に対してとくに重要である．§52で断熱不変量の理論における応用を示す．

B. 自由度1の場合の作用-角変数の構成　自由度1の系は，相空間 (p,q) 上に Hamilton 関数 $H(p,q)$ で与えられる．

例1　調和振動子：$H=(p^2+q^2)/2$，より一般に，$H=(a^2p^2+b^2q^2)/2$．

例2　単振子：$H=p^2/2-\cos q$．——

いずれの場合にも，コンパクトな閉曲線 M_h $(H=h)$ が存在し，共に§49の定理の条件で $n=1$ の場合にあたる．

作用-角変数をつくるために，次の条件を満たす正準変換 $(p,q)\to(I,\varphi)$ を探すことにする．

$$1)\quad I=I(h),\qquad 2)\quad \oint_{M_h}d\varphi=2\pi. \tag{3}$$

問　もっとも簡単な調和振動子 $H=(p^2+q^2)/2$ のときに，作用-角変数を求めよ．

［解］　r,φ を極座標とすると，$dp\wedge dq=rdr\wedge d\varphi=d(r^2/2)\wedge d\varphi$．よって，$I=H=(p^2+q^2)/2$．——

一般の場合に正準変換 $(p,q)\to(I,\varphi)$ をつくるには，その母関数 $S(I,q)$ を探す：

$$p=\frac{\partial S(I,q)}{\partial q},\qquad \varphi=\frac{\partial S(I,q)}{\partial I};\qquad H\left(\frac{\partial S(I,q)}{\partial q},q\right)=h(I). \tag{4}$$

---

*)　$\boldsymbol{I}$ が作用の次元をもつことは容易に分る．

まず，関数 $h(I)$ が分っていて可逆であるとする．したがって，各曲線 M_h は I の値により定まる $(M_h=M_{h(I)})$．このとき，I の値を固定すると，(4) より

$$dS|_{I=\text{const}} = pdq.$$

この関係式は曲線 $M_{h(I)}$ 上に 1-形式 dS を定める．

曲線 $M_{h(I)}$ 上でこの 1-形式 dS を積分すると (点 q_0 の近傍で)，次の関数を得る．

$$S(I,q) = \int_{q_0}^{q} pdq.$$

この関数が点 (I, q_0) の近傍における変換 (4) の母関数である．(3) の第1条件 $I=I(h)$ は自動的に満たされる．第2条件を確かめるために，$S(I,q)$ の挙動を《大域的》に考えよう．

閉曲線 $M_{h(I)}$ を1周すると，pdq の積分には増分 ΔS が加わる：

$$\Delta S(I) = \oint_{M_{h(I)}} pdq.$$

これは曲線 $M_{h(I)}$ の囲む面積 A に等しい．よって，関数 S は曲線 $M_{h(I)}$ 上の《多価関数》である．つまり，A の整数倍を除いて定まる．この付加項は導関数 $\partial S(I,q)/\partial q$ には影響しないが，$\varphi=\partial S/\partial I$ は1価でなくなる．この導関数は $(d/dI)\Delta S(I)$ の整数倍を除いてのみ定まることが分る．より正確には式 (4) は曲線 $M_{h(I)}$ 上に 1-形式 $d\varphi$ を定め，この形式の曲線 $M_{h(I)}$ 上の積分は $(d/dI)\cdot\Delta S(I)$ に等しい．

第2条件 $\oint_{M_h} d\varphi=2\pi$ が満たされるためには，次のことが必要である．

$$\frac{d}{dI}\Delta S(I) = 2\pi, \qquad I = \frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{A}{2\pi}.$$

ここで，$A=\oint_{M_h} pdq$ は相曲線 $M_h: H=h$ が囲む面積である．

定義　Hamilton 関数 $H(p,q)$ をもつ1次元問題の**作用変数**とは，$I(h)=A(h)/2\pi$ をいう．

結局，次の結論に達する．$dA/dh\neq 0$ とする．このとき，$I(h)$ の逆関数 $h(I)$ が定まる．

定理

$$S(I,q) = \int_{q_0}^{q} pdq\Big|_{H=h(I)}$$

とおく．このとき，式(4)は条件(3)を満たす正準変換 $(p, q)\to(I, \varphi)$ を与える．——

こうして，1次元の場合の作用-角変数が構成された．

問 調和振動子に対して S と I を求めよ．

［解］ $H=(a^2p^2+b^2q^2)/2$ ならば(図217)，M_h は楕円であり，その囲む面積は $A(h)=\pi(\sqrt{2h}/a)(\sqrt{2h}/b)=2\pi h/ab=2\pi h/\omega$ である．故に，調和振動子に対しては，作用変数はエネルギーの振動数に対する比である．角変数 φ は，もちろん，振動の位相である．

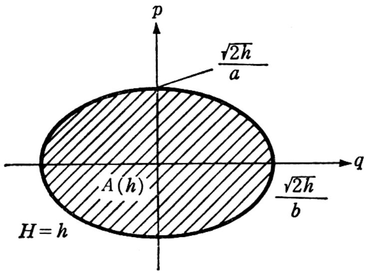


図217 調和振動子に対する作用変数

問 相平面 (p, q) 上の閉曲線 $H=h$ に沿う運動の周期 T は，この曲線が囲む面積を h で微分したものに等しい:

$$T=\frac{dA(h)}{dh}.$$

［解］ 作用-角変数では，運動方程式(2)より

$$\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial I}=\left(\frac{dI}{dh}\right)^{-1}=2\pi\left(\frac{dA}{dh}\right)^{-1},\qquad T=\frac{2\pi}{\dot{\varphi}}=\frac{dA}{dh}.$$

C. $\mathbf{R}^{2n}$ における作用-角変数の構成 さて，$\mathbf{R}^{2n}=\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\}$ における自由度 n の系を考えよう．この系が Hamilton 関数 $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ によって与えられ，互いに対合的な n 個の第1積分 $F_1=H,\ F_2, \cdots, F_n$ をもつとする．1次元の場合に $2\pi I=\oint pdq$ を導いた議論は繰り返さないで，直ちに n 個の作用変数 $\boldsymbol{I}$ を定義する．

$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ をトーラス M_f の1次元サイクルの基底とする(座標 φ_i のサイクル γ_j に沿う増分は，$i=j$ のとき 2π に，$i\neq j$ のとき0に等しい)．

$$I_i(\boldsymbol{f})=\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_i}\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} \tag{5}$$

とおこう．

問　この積分は基底サイクルを表わす曲線 γ_i の選び方にはよらない，ことを示せ(図218)．

［ヒント］§49では，多様体 M_f 上で2-形式 $\omega^2=\sum dp_i\wedge dq_i$ が0に等しいことを示した．よって，Stokesの公式により

$$\oint_{\gamma}-\oint_{\gamma'}pdq=\iint_{\sigma}dp\wedge dq=0$$

である．ここで $\partial\sigma=\gamma-\gamma'$ である．

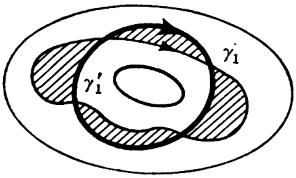


図218　作用変数は積分路の選び方によらない

定義　式(5)で与えられる n 個の量 $I_i(f)$ を**作用変数**という．

今，n 個の第1積分 F_i の値 f_i を与えたとき，n 個の量 I_i が独立である，つまり $\det\partial I/\partial f|_f\neq 0$，と仮定しよう．このとき，トーラス M_f の近傍で，変数 I,φ を座標にとることができる．

定理　変換 $(p,q)\to(I,\varphi)$ は正準である．すなわち，

$$\sum dp_i\wedge dq_i=\sum dI_i\wedge d\varphi_i. \qquad \text{——}$$

証明の概略を述べよう．M_f 上で1次微分形式 pdq を考える．多様体 M_f は零集合であるから(§49, 1″)，この形式は M_f 上で閉じている．つまり，その外微分 $\omega^2=dp\wedge dq$ は多様体 M_f 上で恒等的に0に等しい．よって

$$S(x)=\int_{x_0}^{x}pdq\Big|_{M_f}$$

は積分路を変形させても変わらない(Stokesの公式)(図219)．こうして，$S(x)$

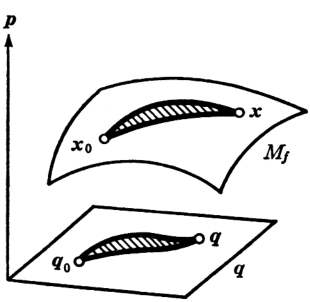


図219　pdq の M_f 上の積分は道によらない

は M_f 上の《多価関数》である．その周期は次のものに等しい．

$$\varDelta_i S = \oint_{\gamma_i} dS = 2\pi I_i.$$

$\boldsymbol{x}_0$ は M_f 上の点で，その近傍では n 変数 $\boldsymbol{q}$ が M_f 上の座標となるものとする．したがって，部分多様体 $M_f \subset \mathbf{R}^{2n}$ は n 個の方程式 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{q})$，$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{q}_0$ で与えられる．点 $\boldsymbol{q}_0$ の単連結な近傍では，1 価関数 S が定まる：

$$S(\boldsymbol{I},\boldsymbol{q}) = \int_{\boldsymbol{q}_0}^{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{I},\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{q}.$$

これを正準変換 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\to(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})$：

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}, \qquad \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{I}}$$

の母関数にとることができる．この式が実際に，点 $\boldsymbol{x}_0$ の近傍のみならず，M_f の近傍で《大域的》に正準変換を与えることは，困難なく確かめられる．このとき，座標 $\boldsymbol{\varphi}$ は次の周期をもって多価となる．

$$\varDelta_i \varphi_j = \varDelta_i \frac{\partial S}{\partial I_j} = \frac{\partial}{\partial I_j}\varDelta_i S = \frac{\partial}{\partial I_j} 2\pi I_i = 2\pi\delta_{ij}. \qquad \blacksquare$$

以上の構成が，《代数的》操作(逆関数を求めること)と《求積法》──既知関数の積分計算──しか含まないことに注意しよう．こうして，$2n$ 個の方程式からなる正準系は，互いに対合的な n 個の第 1 積分がわかれば，求積法で解くことができる．これで Liouville の定理の最後の主張が証明された(§49)．

注意 1 すでに 1 次元の場合でも，作用-角変数は条件(3)から一意的に定まるわけではない．すなわち，作用変数として $I'=I+\text{const}$，角変数として $\varphi'=\varphi+c(\boldsymbol{I})$ をとってよい．

注意 2 相空間が $\mathbf{R}^{2n}$ である系の作用-角変数を構成したが，任意のシンプレクティック多様体に対しても，作用-角変数を導入できる．ここでは簡単な例にとどめる(図 220)．

振子 $(H=p^2/2-\cos q)$ の相空間は，平面 $\{(p,q)\}$ ではなく，2π の整数倍だけ異なる角 q を同一視して，円柱面 $\mathbf{R}^1\times S^1$ と考えるのが自然である．臨界レベル曲線 $H=\pm 1$ は円柱を A, B, C の 3 つの部分に分ける．そのおのおのは直積 $\mathbf{R}^1\times S^1$ に微分同相である．各部分に作用-角変数が導入できる．

閉軌道は，有界部分 B では振子の振動を，非有界部分では回転を表わす．

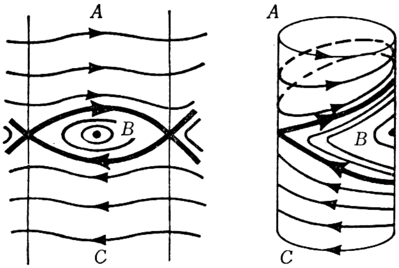


図 220　シンプレクティック多様体上の作用-角変数

注意 3　注意2の例同様，一般の場合にも，f_i の或る値に対して，方程式系 $F_i=f_i$ は独立ではなく，M_f も多様体とはならない．f のこのような臨界値には，分岐曲線が対応して，積分可能な問題の相空間を上の A, B, C と似た部分に分ける．このうちの或る部分では多様体 M_f は有界でないかも知れない(平面 $\{(p, q)\}$ 上の部分 A, C)．他の部分は n 次元不変トーラス M_f の層に分かれる．このようなトーラスの近傍では作用-角変数が導入できる．

§51　平　均　化

本節では条件周期運動を行う系の時間平均と空間平均とが一致することを示す．

A. 条件周期運動　前節までにしばしば，条件周期運動に出会った．Lissajous 図形，こまの歳差，章動，回転等….

定義　T^n を n 次元トーラス，$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \bmod 2\pi$ を角座標とする．このとき，**条件周期運動**とは，微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_n) = \text{const}$$

で与えられる T^n の微分同相の 1-パラメーター群をいう(図 221)．この微分方

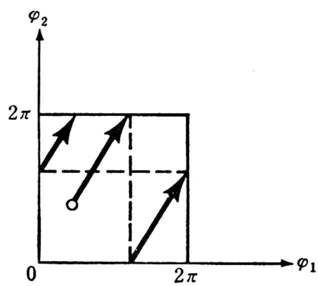


図 221　条件周期運動

程式は直ちに積分できて

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(0)+\boldsymbol{\omega}t$$

となる．このようにチャート $\{\boldsymbol{\varphi}\}$ 上では，軌跡は直線である．これをトーラス上の**巻線**という．

例　$n=2$ とする．$\omega_1/\omega_2=k_1/k_2$ (有理数)ならば，軌跡は閉じる．ω_1/ω_2 が無理数ならば，トーラス上の軌跡は至るところ稠密である(§16)．——

$\omega_1, \cdots, \omega_n$ を条件周期運動の**振動数**という．振動数が独立であるとは有理数体上1次独立であるときをいう．つまり，$\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{Z}^n$ *) で $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\omega})=0$ であれば $\boldsymbol{k}=0$ である．

B. 空間平均と時間平均　$f(\boldsymbol{\varphi})$ をトーラス T^n 上の可積分関数とする．

定義　トーラス T^n 上の関数 f の**空間平均**とは次の値をいう．

$$\bar{f}=(2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}f(\boldsymbol{\varphi})\,d\varphi_1\cdots d\varphi_n.$$

軌跡 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\omega}t$ 上で関数 $f(\boldsymbol{\varphi})$ の値を見よう．これは時間の関数 $f(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\omega}t)$ である．その平均を考える．

定義　トーラス T^n 上の関数 f の**時間平均**とは次の関数をいう．

$$f^*(\boldsymbol{\varphi}_0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\omega}t)\,dt$$

(極限が存在するところで定義される)．

平均化に関する定理　関数 f が連続(少なくとも Riemann 積分可能)であり，かつ振動数 ω_i が独立ならば，時間平均は至るところ存在し，空間平均と一致する．

問　振動数が独立でなければ，時間平均が至るところ空間平均と一致する，という訳にはいかない．これを示せ．

系1　振動数が独立ならば，各軌跡 $\{\boldsymbol{\varphi}(t)\}$ はトーラス T^n 上，至るところ稠密である．

証明　そうではないと仮定しよう．このとき，トーラスの或る点の近傍 D には，軌跡 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の点が存在しない．D の外では0であり，空間平均 $\bar{f}$ が1に等しい連続関数 f は容易に作れる．軌跡 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 上の時間平均 $f^*(\boldsymbol{\varphi}_0)$ は0に等

*)　$\boldsymbol{k}=(k_1, \cdots, k_n)$，$k_i$ は整数である．

しい．∎

系2　振動数が独立ならば，各軌跡はトーラス T^n 上に一様分布する．——これは軌跡が領域 D を通過する時間の割合が，D の測度に比例することを意味する．

より正確には，D を T^n 上の(Jordan の意味で)可測な集合とする．区間 $0\leq t\leq T$ において，軌跡 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ が領域 D 内にあるような時刻 t の全体の長さを $\tau_D(T)$ と表わせば，次の極限が存在する．

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\tau_D(T)}{T}=\frac{\mathrm{mes}\,D}{(2\pi)^n}.$$

証明　定理を集合 D の特性関数 f に適用しよう(領域 D は Jordan 可測であるから，f は Riemann 積分可能である)．このとき，$\int_0^T f(\boldsymbol{\varphi}(t))\,dt=\tau_D(T)$ であり，$\bar{f}=(2\pi)^{-n}\,\mathrm{mes}\,D$ である．系は定理より直ちに導かれる．∎

系　数 2^n の最高位の数が作る数列

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, …

において，数7の頻度は，数8の頻度の $(\log 8-\log 7)/(\log 9-\log 8)$ 倍である．——

平均化に関する定理は，明確な形ではないが，天体力学における Laplace, Lagrange, Gauss らの仕事の中にすでに現われている．この定理は，初期の《エルゴード定理》の1つである．厳密な証明は1909年に，P. Bohl, W. Sierpinski, H. Weyl が与えたに過ぎない．以下では H. Weyl の証明を再現する．

C. 平均化に関する定理の証明

補題1　指数関数 $f(\boldsymbol{\varphi})=e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varphi})}$, $\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{Z}^n$ に対して定理は正しい．

証明　$\boldsymbol{k}=0$ ならば，$\bar{f}=f=f^*=1$ となり定理は自明である．$\boldsymbol{k}\neq 0$ ならば，$\bar{f}=0$ である．一方，

$$\int_0^T e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\omega}t)}\,dt=e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varphi}_0)}\frac{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega})T}-1}{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega})}$$

であるから時間平均は次のようになる．

$$\lim_{T\to\infty}\frac{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varphi}_0)}}{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega})}\cdot\frac{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega})T}-1}{T}=0.$$ ∎

補題2　定理は3角多項式 f に対して正しい．

$$f=\sum_{|\boldsymbol{k}|<N} f_{\boldsymbol{k}}e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\varphi})}.$$

証明　時間平均も空間平均も，f について線形である．よって，補題1により両者は一致する．∎

補題3　f を実連続(少なくとも Riemann 積分可能な)関数とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，2つの3角多項式 P_1, P_2 が存在して $P_1<f<P_2$，かつ，

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}(P_2-P_1)\,d\varphi<\varepsilon.$$

証明　まず，f が連続であるとする．Weierstrass の定理により，f は3角多項式 P で近似できる：$|f-P|<\varepsilon/2$．多項式 $P_1=P-\varepsilon/2$，$P_2=P+\varepsilon/2$ が求めるものである．

f が不連続ではあるが，Riemann 積分可能であれば，2つの連続関数 f_1, f_2 が存在して $f_1<f<f_2$，かつ，

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int(f_2-f_1)\,d\varphi<\frac{\varepsilon}{3}$$

となる(図222は区間の特性関数に対応する)．f_1, f_2 を3角多項式 P_1, P_2 で次のように近似する：$P_1<f_1<f_2<P_2$，かつ，

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int(P_2-f_2)\,d\varphi<\frac{\varepsilon}{3},\qquad \frac{1}{(2\pi)^n}\int(f_1-P_1)\,d\varphi<\frac{\varepsilon}{3}.$$

これで求めるべきものが得られた．∎

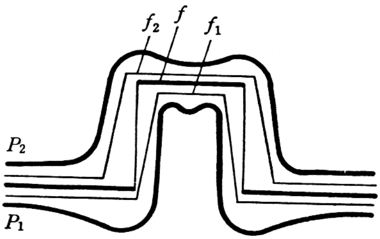


図222　3角多項式 P_1, P_2 による関数 f の近似

今や，**定理の証明**を終えるのは簡単である．$\varepsilon>0$ とする．補題3により，3角多項式 P_1, P_2 が存在して

$$P_1<f<P_2,\qquad \frac{1}{(2\pi)^n}\int(P_2-P_1)\,d\varphi<\varepsilon.$$

このとき，任意の T に対して，

$$\frac{1}{T}\int_0^T P_1(\varphi(t))\,dt < \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi(t))\,dt < \frac{1}{T}\int_0^T P_2(\varphi(t))\,dt.$$

補題2により，$T > T_0(\varepsilon)$ に対して，

$$\left|\bar{P}_i - \frac{1}{T}\int_0^T P_i(\varphi(t))\,dt\right| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2.$$

さらに，$\bar{P}_1 < \bar{f} < \bar{P}_2$，$\bar{P}_2 - \bar{P}_1 < \varepsilon$ である．よって，$\bar{P}_2 - \bar{f} < \varepsilon$，$\bar{f} - \bar{P}_1 < \varepsilon$ となる．したがって，$T > T_0(\varepsilon)$ のとき，

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi(t))\,dt - \bar{f}\right| < 2\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

問 運動エネルギー $T = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ とポテンシャル・エネルギー $U = (x^2/2) + y^2$ をもつ2次元振動子が振幅 $a_x = 1$，$a_y = 1$ の振動を行う．運動エネルギーの時間平均を求めよ．

問*) ω_k は互いに独立であり，$a_k > 0$ とする．

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\arg\sum_{k=1}^{3} a_k e^{i\omega_k t}$$

を計算せよ．

[解]†) $(\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \omega_3\alpha_3)/\pi$，ここで，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は a_k を辺とする3角形の内角である(図223)．

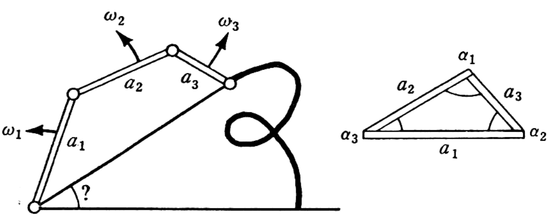


図223 近日点の平均運動の問題のために

D. 退化 これまでは振動数 $\boldsymbol{\omega}$ が独立である場合を考えてきた．整数ベクトル $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}^n$ は $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\omega}) = 0$ となるとき，**振動数の間の関係**という．

問 与えられた振動数 $\boldsymbol{\omega}$ の間の関係全体は，格子群 $\boldsymbol{Z}^n$ の部分群 Γ をなす，ことを示せ．

*) Lagrange は，惑星の近日点の平均運動が同様な問題に帰着することを示した．この問題の解は H. Weyl の仕事の中に見ることができる．地球軌道の離心率の変化は，この和の絶対値††)の変化と同じである．氷河期は，恐らく，この離心率の変化に関係する．

†) 詳しくは Arnold–Avez [1]，付録13を見よ．

††) $|\sum a_k e^{i\omega_k t}|$ をいう．この変化を Lagrange の運動という．Arnold [2] を見よ．

ところで，§49 で見たように，このような部分群は r 個$(1\leq r\leq n)$の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{k}_i$ の整係数 1 次結合全体からなる．このとき，振動数の間に，r **個の（独立な）関係がある**という*)．

問　振動数 $\boldsymbol{\omega}$ の間に r 個の独立な関係があれば，(T^n 上の) 軌道 $\{\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\omega}t\}$ の閉包は，$n-r$ 次元トーラスである．このとき，T^{n-r} 上の運動は $n-r$ 個の独立な振動数をもつ条件周期運動である．以上を示せ．——

作用-角変数 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}$ により方程式

$$\dot{\boldsymbol{I}}=0,\qquad \dot{\boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}),\qquad \text{ここで},\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I})=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{I}},$$

で与えられる積分可能な Hamilton 系に戻ろう．$2n$ 次元相空間の各 n 次元トーラス $\boldsymbol{I}=\mathrm{const}$ は不変であり，したがって，その上の運動は条件周期的である．

定義　系が**非退化**であるとは，次の行列式が 0 とならないときをいう．

$$\det\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\boldsymbol{I}}=\det\frac{\partial^2 H}{\partial\boldsymbol{I}^2}\neq 0.$$

問　系が非退化であれば，任意の点の任意の近傍に，n 個の振動数をもつ条件周期運動が存在する．また，n 以下の任意個数の振動数をもつものも存在する．以上を示せ．

［ヒント］ 変数 $\boldsymbol{I}$ にかえて，局所座標として振動数 $\boldsymbol{\omega}$ 自身がとれる．振動数の組の作る空間の中で，任意 r 個$(0\leq r\leq n)$の関係をもつ振動数 $\boldsymbol{\omega}$ の全体は，至るところ稠密である．

系　系が非退化であれば，作用-角変数 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}$ の構成にはつねに任意性がともなうものの**)，不変トーラス $\boldsymbol{I}=\mathrm{const}$ は，$\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}$ の選び方によらず一意的に定まる．——

実際，トーラス $\boldsymbol{I}=\mathrm{const}$ は独立な $\boldsymbol{\omega}$ に対応する相軌道の閉包として定義できるからである．

なお，$\boldsymbol{I}$ の殆どの値に対して，振動数 $\boldsymbol{\omega}$ は独立である．

問　非退化系では，振動数 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I})$ が独立でないような $\boldsymbol{I}$ の集合は，Lebesgue 測度が 0 に等しい，ことを示せ．

［ヒント］ まず，$\mathrm{mes}\{\boldsymbol{\omega}:\exists\boldsymbol{k}\neq 0,\ (\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{k})=0\}=0$ を示せ．——

これに反して，退化系では，作用-角変数が異なればトーラス $\boldsymbol{I}=\mathrm{const}$ も異

*)　数 r は 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{k}_i$ の選び方にはよらないことを示せ．

**)　たとえば，$\boldsymbol{I}'=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{\varphi}'=\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{I})$，また，$I_1,I_2$；$\varphi_1,\varphi_2\to I_1+I_2,\ I_2$；$\varphi_1,\ \varphi_2-\varphi_1$ のような変換はつねに許される．

なるような作用-角変数を構成できる．これは退化系の軌道の閉包が $k<n$ 次元のトーラスであり，これらが様々な仕方で絡みあって n 次元のトーラスができる，ということで説明される．

例 1　平面調和振動子 $\ddot{x}=-x$；$n=2,\ k=1$．Descartes 座標と極座標による変数分離は，異なる作用-角変数を与え，異なるトーラスを与える．

例 2　平面上の Kepler 運動 $(U=-1/r)$，$n=2,\ k=1$．ここでも，極座標と楕円座標とでは，変数分離は異なる $\boldsymbol{I}$ を導く．

§52　摂動の平均化

ここでは，自由度1の系における作用変数の断熱不変性を証明する．

A. 積分可能な系に近い系　今までに，かなり多くの積分可能系を見てきた(1次元の問題, 2体問題, 微小振動, 固定点をもつ剛体の Euler と Lagrange の運動等)．これらの系で相軌道の特性を調べた．相軌道は相空間の不変トーラスを至るところ稠密に満たす《トーラスの巻線》であった．各軌道はトーラス上に一様に分布する．

このような状況が，一般的な問題においても典型的である，と考えてはならない．実際，高次元系における軌道の性質は極めて多様であり，条件周期運動の性質には全然似ないことがある．とくに，自由度 n の系の軌道は，$2n$ 次元相空間の中で，n より高い次元の複雑な集合を稠密に満たすことがある．方程式 $H=h$ で与えられる $2n-1$ 次元多様体上で，軌道が至るところ稠密で，かつ，一様に分布することすらあり得る*)．H に独立な1価の第1積分が存在しないという意味でこれらの系に《積分不可能》という術語を使うことは正しい．

このような複雑な系の研究は完成にはまだ程遠い．これが《エルゴード理論》の問題である．

積分不可能な系を攻める1つの方法は，積分可能系に近い系を調べることである．たとえば，太陽を回る惑星の運動は固定中心を回る相互作用のない点の運動という積分可能な問題に近い．殆ど対称である重いこまの問題，平衡点の近くの非線形振動の問題(これに近い積分可能な問題は線形である)も挙げられ

*)　このクラスには，たとえば負曲率の多様体上の慣性運動がある．

る．これらの問題および類似の問題においては，次の方法が殊に実り多い．

B. 平均化の原理　$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}$ を作用-角変数として，Hamilton 関数 $H_0(\boldsymbol{I})$ に対する積分可能な《非摂動》系

$$\dot{\boldsymbol{I}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}); \quad \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}) = \frac{\partial H_0}{\partial \boldsymbol{I}}$$

を考えよう．これに近い《摂動》系として，$\varepsilon \ll 1$ に対する次の系を考える．

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{I}) + \varepsilon \boldsymbol{f}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}), \\ \dot{\boldsymbol{I}} &= \qquad\quad \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}). \end{aligned} \tag{1}$$

さしあたり，系の Hamilton 性を忘れて，k 次元トーラス $T^k = \{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_k) \bmod 2\pi\}$ と l 次元空間 $\mathbf{R}^l = \{\boldsymbol{I} = (I_1, \cdots, I_l)\}$ の領域 $G \subset \mathbf{R}^l$ との直積 $T^k \times G$ 上に与えられた任意の微分方程式系 (1) を考えよう．$\varepsilon = 0$ のとき，運動 (1) は条件周期的であり，k 個以下の振動数と k 次元不変トーラスをもつ．

系 (1) に対する平均化の原理は，まず方程式 (1) を平均化された系

$$\dot{\boldsymbol{J}} = \varepsilon \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{J}), \quad \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{J}) = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\varphi})\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_k \tag{2}$$

で置き換える ($\boldsymbol{J} \in G \subset \mathbf{R}^l$)．そして，次のことを主張する．

系 (2) は系 (1) を《十分に近似する》．

この原理は定理でも公理でも定義でもなく，物理的な命題である．つまり，曖昧な定式化であり，厳密にいえば，正しくない主張である．

このような主張は，しばしば，数学的な定理の豊富な源となる．

この平均化の原理は，すでに Gauss の研究の中に明確に見受けられる (互いに摂動しあう惑星を調べるとき，各惑星の質量をその軌道に沿って時間に比例して分布させ，惑星の引力をこの環の引力に置き換えることを提案した)．それにもかかわらず，一般の場合，系 (1) と系 (2) の解の関係は，今日まで十分には調べられていない．

系 (1) を系 (2) で置き換える際，右辺で項 $\varepsilon \tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \varepsilon \boldsymbol{g}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) - \varepsilon \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{I})$ を除いた．この項は残された項 $\varepsilon \bar{\boldsymbol{g}}$ 同様，ε のオーダーである．$\boldsymbol{g}$ における項 $\bar{\boldsymbol{g}}$ と $\tilde{\boldsymbol{g}}$ の役割の差を理解するために，簡単な例を考えよう．

問　$k = l = 1$ の場合，つまり，

$$\dot{\varphi} = \omega \neq 0, \quad \dot{I} = \varepsilon g(\varphi)$$

を考えよ．$0<t<1/\varepsilon$ のとき，次のことを示せ．

$$|I(t)-J(t)|<c\varepsilon, \qquad \text{ここで，}\ J(t)=I(0)+\varepsilon\bar{g}t.$$

［解］　$$I(t)-I(0)=\int_0^t \varepsilon g(\varphi_0+\omega t)\,dt=\int_0^t \varepsilon\bar{g}dt+\frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^{\omega t}\tilde{g}(\varphi)\,d\varphi$$

$$=\varepsilon\bar{g}t+\frac{\varepsilon}{\omega}h(\omega t),$$

ここで，$h(\varphi)=\int_0^\varphi \tilde{g}(\varphi)\,d\varphi$ は周期的であり，したがって，有界である．——

こうして，I の時間変化は 2 つの部分よりなる．$\tilde{g}$ に依存するオーダー ε の振動と速度 $\varepsilon\bar{g}$ の全体的な《発展》とである(図 224)．

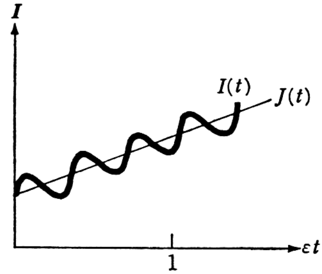


図 224　発展と振動

平均化の原理は，一般の場合にも，系(1)の運動が《発展》(2)と微小振動とに分けられることに基づく．一般的には，この分解は正当化できず，原理自体が正しくない．

それにもかかわらず，この原理を Hamilton 系

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{I}}(H_0(\boldsymbol{I})+\varepsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})),$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}}(H_0(\boldsymbol{I})+\varepsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi}))$$

に適用しよう．このとき，平均化された系(2)の右辺として，次式が得られる．

$$\bar{\boldsymbol{g}}=(2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varphi}}H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{\varphi})\,d\boldsymbol{\varphi}=0.$$

いい換えると，非退化 Hamilton 系では，発展は存在しない．

この厳密さを欠く結論の 1 つのいい換えが，いわゆる Laplace の定理である．

惑星の Kepler 楕円の長半軸は永年摂動をもたない．

平均化の原理の重要性を納得するには，以上述べたことで十分であろう．今，極めて特殊な場合，つまり，振動数が1個の場合に($k=1$)，この原理を定理として定式化しよう．この定理は平均化された方程式が，永い時間にわたって($0<t<1/\varepsilon$)，発展を正しく記述することを示す．

C. 振動数が1個である系の平均化 次の $l+1$ 個の微分方程式からなる系

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega(\boldsymbol{I})+\varepsilon f(\boldsymbol{I},\varphi),\\ \dot{\boldsymbol{I}} &= \qquad\quad \varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{I},\varphi),\end{aligned}\right\}\quad (\varphi \bmod 2\pi\in S^1,\ \ \boldsymbol{I}\in G\subset\mathbf{R}^l) \tag{1}$$

$$f(\boldsymbol{I},\varphi+2\pi)\equiv f(\boldsymbol{I},\varphi),\qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{I},\varphi+2\pi)\equiv\boldsymbol{g}(\boldsymbol{I},\varphi),$$

および，l 個の方程式からなる《平均化された系》

$$\dot{\boldsymbol{J}}=\varepsilon\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{J}),\qquad \text{ここで，}\ \bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{J})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{J},\varphi)\,d\varphi \tag{2}$$

を考えよう．初期条件 $\boldsymbol{I}(0)$，$\varphi(0)$ をもつ系(1)の解を $\boldsymbol{I}(t)$，$\varphi(t)$ と表わし，同じ初期条件 $\boldsymbol{J}(0)=\boldsymbol{I}(0)$ をもつ系(2)の解を $\boldsymbol{J}(t)$ と表わす(図225)．

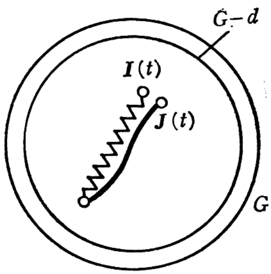


図225 平均化に関する定理

定理 次の1),2),3)を仮定する．

1) 関数 $\omega, f, \boldsymbol{g}$ は，$\boldsymbol{I}$ が有界領域 G を動くときに定義され，この領域で2階までの導関数が有界である：

$$\|\omega, f, \boldsymbol{g}\|_{C^2(G\times S^1)}<c_1;$$

2) 領域 G で

$$\omega(\boldsymbol{I})>c>0;$$

3) $0\leq t\leq 1/\varepsilon$ において，点 $\boldsymbol{J}(t)$ は半径 d の近傍と共に，領域 G に属する：

$$\boldsymbol{J}(t)\in G-d.$$

このとき，十分小さい ε に対して($0<\varepsilon<\varepsilon_0$)，

$$|\boldsymbol{I}(t)-\boldsymbol{J}(t)|<c_9\varepsilon\qquad(0\leq\forall t\leq 1/\varepsilon).$$

ここで，定数 $c_9>0$ は c_1, c, d には依存するが，ε には依存しない．——

この定理の応用を幾つか次に与える(《断熱不変量》)．この定理の証明の基本的な考え(変数変換により摂動を減少させること)の方が，定理自体より重要である．これは常微分方程式論の基本的な考えの1つであり，すでに教養課程で《定数変化法》として現われているものである．

D. 平均化の定理の証明 変数 $\boldsymbol{I}$ のかわりに，新しい変数 $\boldsymbol{P}$ を入れよう：

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{k}(\boldsymbol{I},\varphi). \tag{3}$$

ここで，φ について周期 2π である関数 $\boldsymbol{k}$ は，ベクトル $\boldsymbol{P}$ がより簡単な微分方程式を満たすように選ぶ．

$\boldsymbol{P}(t)$ の変化速度は(1)と(3)から，次のものに等しい．

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{P}}&=\dot{\boldsymbol{I}}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\boldsymbol{I}}\dot{\boldsymbol{I}}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\\&=\varepsilon\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{I},\varphi)+\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\varphi}\omega(\boldsymbol{I})\right]+\varepsilon^2\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\boldsymbol{I}}\boldsymbol{g}+\varepsilon^2\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\varphi}f.\end{aligned} \tag{4}$$

変換(3)が，次のように逆に解けると仮定しよう．

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}+\varepsilon\boldsymbol{h}(\boldsymbol{P},\varphi,\varepsilon) \tag{5}$$

(ここで，関数 $\boldsymbol{h}$ は φ について周期 2π である)．

このとき，(4), (5)より $\boldsymbol{P}(t)$ は次の微分方程式系に従う．

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\varepsilon\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P},\varphi)+\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\varphi}\omega(\boldsymbol{P})\right]+\boldsymbol{R}. \tag{6}$$

ここで，《剰余項》$\boldsymbol{R}$ は ε について2次の無限小である．つまり，

$$\|\omega\|_{C^2}<c_1,\quad \|f\|_{C^2}<c_1,\quad \|\boldsymbol{g}\|_{C^2}<c_1,\quad \|\boldsymbol{k}\|_{C^2}<c_3,\quad \|\boldsymbol{h}\|_{C^2}<c_4 \tag{7}$$

である限り，

$$|\boldsymbol{R}|<c_2\varepsilon^2,\qquad c_2(c_1,c_3,c_4)>0 \tag{8}$$

である．

さて，(6)において ε のかかる項が0となるように，変数変換(3)を選んでみよう．$\boldsymbol{k}$ に対する方程式が得られる：

$$\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\varphi}=-\frac{1}{\omega}\boldsymbol{g}.$$

一般には，このような方程式は φ の周期関数のクラスでは解けない．実際，左辺の(φ による)平均値は常に0に等しいが，右辺の平均値は一般には0に等

しくない.

よって, (6)において ε のかかる項が完全に消えるように $\boldsymbol{k}$ を選ぶことはできない. しかし $\boldsymbol{g}$ の《周期部分》全体

$$\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{P},\varphi)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P},\varphi)-\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{P})$$

は $\boldsymbol{k}$ を次のようにおけば消去することができる.

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{P},\varphi)=-\int_0^{\varphi}\frac{\tilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{P},\varphi)}{\omega(\boldsymbol{P})}d\varphi. \tag{9}$$

よって, 関数 $\boldsymbol{k}$ を式(9)によって定める. このとき, 定理の条件1)と2)により, 関数 $\boldsymbol{k}$ は評価式 $\|\boldsymbol{k}\|_{C^2}<c_3$ を満たす. ここで $c_3(c_1,c)>0$ である. 不等式(7)を示すためには, $\boldsymbol{h}$ の評価だけが残る. このためには, まず変換(3)が逆に解けることを示す必要がある.

正数 α を固定しておく.

補題 ε が十分小さければ, 写像(3)*)

$$\boldsymbol{I}\longrightarrow\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{k},\qquad \text{ここで,}\ |\boldsymbol{k}|_{C^2(G)}<c_3$$

の領域 $G-\alpha$ (α 近傍までが G に入る点からなる)への制限は微分同相である. 逆の微分同相(5)は領域 $G-2\alpha$ 上, 或る定数 $c_4(\alpha,c_3)>0$ に対して, 評価 $\|\boldsymbol{h}\|_{C^2}<c_4$ を満たす.

証明 必要な評価は直接陰関数の定理から導かれる. ただ, 領域 $G-\alpha$ において, 写像 $\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{I}+\varepsilon\boldsymbol{k}$ が1対1であることだけがやや難しい.

関数 $\boldsymbol{k}$ が領域 $G-\alpha$ で(或る定数 $L(\alpha,c_3)$ に対し) Lipschitz 条件を満たすことに注意する. $G-\alpha$ の2点 $\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2$ を考えよう. ε が十分に小さいと(つまり $L\varepsilon<1$), $\varepsilon\boldsymbol{k}(\boldsymbol{I}_1)$ と $\varepsilon\boldsymbol{k}(\boldsymbol{I}_2)$ の距離は, $|\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_2|$ より小さい. よって, $\boldsymbol{I}_1+\varepsilon\boldsymbol{k}(\boldsymbol{I}_1)\neq\boldsymbol{I}_2+\varepsilon\boldsymbol{k}(\boldsymbol{I}_2)$. 故に, 領域 $G-\alpha$ で写像(3)は1対1である. ∎

補題により ε が十分小さいと, (7)の評価はすべて正しい. したがって(8)の評価も正しい.

さて, $\boldsymbol{J}$ に対する微分方程式系

$$\dot{\boldsymbol{J}}=\varepsilon\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{J}) \tag{2}$$

と $\boldsymbol{P}$ に対する微分方程式系を比べよう. (9)により, 後者は次の形になる.

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\varepsilon\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{P})+\boldsymbol{R}. \tag{6$'$}$$

---

*) パラメーター φ の値は任意に固定する.

右辺の差は，オーダー $\lesssim\varepsilon^2$ ((8)を見よ)であるから，時間が $t\lesssim 1/\varepsilon$ である間は，解は距離 $|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{J}|\lesssim\varepsilon$ しか離れない(図226)．一方 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}|=\varepsilon|\boldsymbol{k}|\lesssim\varepsilon$ である．こうして，$t\lesssim 1/\varepsilon$ における差 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}|$ はオーダー $\lesssim\varepsilon$ である．▮

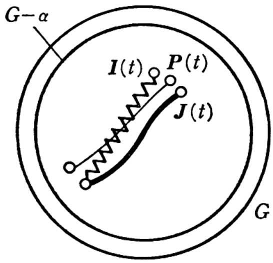


図226　平均化に関する定理の証明

厳密な評価を得るために次の量を導入する．

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{J}(t). \tag{10}$$

このとき，(6)′ と (2) より，

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\varepsilon(\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{P})-\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{J}))+\boldsymbol{R}=\varepsilon\frac{\partial\bar{\boldsymbol{g}}}{\partial\boldsymbol{P}}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{R}'.$$

ここで，開線分 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{J})$ が領域 $G-\alpha$ にあれば，$|\boldsymbol{R}'|<c_2\varepsilon^2+c_5\varepsilon|\boldsymbol{z}|$ である．この仮定のもとで次の式が得られる．

$$|\dot{\boldsymbol{z}}|\le c_6\varepsilon|\boldsymbol{z}|+c_2\varepsilon^2\quad(\text{ただし，}c_6=c_5+c_1), \tag{11}$$
$$|\boldsymbol{z}(0)|\le c_3\varepsilon.$$

補題　$|\dot{\boldsymbol{z}}|\le a|\boldsymbol{z}|+b$，$|\boldsymbol{z}(0)|<d$，$a, b, d, t>0$ であれば，$|\boldsymbol{z}(t)|\le(d+bt)e^{at}$.

証明　$|\boldsymbol{z}(t)|$ は方程式 $\dot{y}=ay+b$，$y(0)=d$ の解 $y(t)$ を超えない．この方程式を解けば，$y=Ce^{at}$，$\dot{C}e^{at}=b$，$\dot{C}=e^{-at}b$，$C(0)=d$，$C\le d+bt$. ▮

今や，線分 $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{J})$ が領域 $G-\alpha$ に入る(図226)という仮定のもとでは，(11)より

$$|\boldsymbol{z}(t)|\le(c_3\varepsilon+c_2\varepsilon^2t)e^{c_6\varepsilon t}$$

となる．これより，$0\le t\le 1/\varepsilon$ に対しては次のようになる．

$$|\boldsymbol{z}(t)|\le c_7\varepsilon,\qquad c_7=(c_3+c_2)e^{c_6}.$$

ここで，$\alpha=d/3$ で ε が十分に小さければ，線分 $(\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{J}(t))$ $(t\le 1/\varepsilon)$ は完全に領域 $G-\alpha$ の内にあることが分る．したがって，すべての $0\le t\le 1/\varepsilon$ に対して

$$|\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{J}(t)|<c_8\varepsilon.$$

一方，$|\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{I}(t)|<|\varepsilon\boldsymbol{k}|<c_3\varepsilon$ である．故にすべての t，$0\le t\le 1/\varepsilon$ に対して

$$|\boldsymbol{I}(t)-\boldsymbol{J}(t)|<c_9\varepsilon,\qquad c_9=c_8+c_3>0.$$ ▮

E. 断熱不変量　Hamilton 関数 $H(p,q;\lambda)$ がパラメーター λ に依存するような自由度1の Hamilton 系を考えよう．例として次の振子がある．

$$H = \frac{p^2}{2l^2} + lg\frac{q^2}{2}.$$

パラメーター λ として，長さ l または重力加速度 g をとることができる.

パラメーターが時間と共にゆっくり変化すると仮定しよう．パラメーターの変化する速さが0に近づく極限では，注目すべき漸近現象が現われる．つまり，一般には独立である2つの量が，互いに他方の関数となる.

たとえば，振子の長さが(その固有振動に比べて)ゆっくり変化すると仮定しよう．このとき振幅は振子の長さの関数となる．たとえば，振子の糸が非常にゆっくりと2倍の長さにまで延び，次に，また非常にゆっくりと元の長さにまで縮むと，この過程の終りには，振幅は最初のときと全く同じである.

さらに，振子のエネルギー H の振動数 ω に対する比は，パラメーターがゆっくり変化する限り，殆ど変化しない．エネルギーと振動数そのものは，大きく変化し得るのだが．パラメーターがゆっくり変化する限り殆ど変化しない量を，物理学者は断熱不変量と名付けた.

容易に分るように，振子のエネルギーの振動数に対する比が断熱不変量であるというのは，物理的な性格の主張である．すなわち，仮定を補わなければ正しくない．実際，振子の長さをどれほど緩やかに変化させようと，振動の位相を選んで長さを加減すれば，振子を揺り動かすことができる(パラメーター共鳴)．これに気付いて物理学者は断熱不変量を次のように定式化することを提案した．つまり，系のパラメーターを変化させる人は，系がどのような状況にあるかを見てはならないと(図227)．この定義に厳密な数学的意味を与えることは，非常に微妙であって，いまだに解決されていない問題である．幸いにも，パラメーターを変化させる人が系の内部事情に干渉できないということは，パラメーターの変化が滑らかである，つまり，2回連続微分可能であるという要

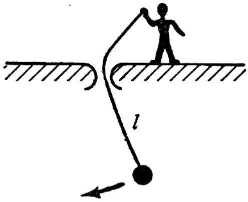


図227 振子の長さの断熱変化

請に代えてよい.

より正確には, λ の2回連続微分可能な関数 $H(p, q ; \lambda)$ を固定する. $\lambda=\varepsilon t$ とおいて, 緩やかに変化するパラメーター $\lambda=\varepsilon t$ をもつ系を考えよう:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad H = H(p, q ; \varepsilon t). \tag{$*$}$$

定義 $I(p, q ; \lambda)$ が系 $(*)$ の**断熱不変量**であるとは, 任意の κ に対して ε_0 が存在して, $\varepsilon<\varepsilon_0$, $0<t<1/\varepsilon$ のとき, 次式が成り立つことをいう.

$$|I(p(t), q(t) ; \varepsilon t) - I(p(0), q(0) ; 0)| < \kappa.$$

明らかに第1積分はすべて断熱不変量でもある.

1次元系 $(*)$ はすべて断熱不変量をもつ. 断熱不変量は, 対応する定数係数の問題の作用変数である, ことが分っている.

Hamilton 関数 $H(p, q ; \lambda)$ をもつ系の相軌道が閉じていると仮定しよう. 関数 $I(p, q ; \lambda)$ を次のように定義する. λ を固定すると, Hamilton 関数 $H(p, q ; \lambda)$ に対応して, 相空間図が定まる(図228). 点 (p, q) を通る閉じた相軌道を考えよう. 軌道は相平面上の或る領域を囲む. この面積を $2\pi I(p, q ; \lambda)$ と表わす. (λ を与えると)各相軌道上で, $I=\text{const}$ である. 明らかに I は作用変数に外ならない(§50を見よ).

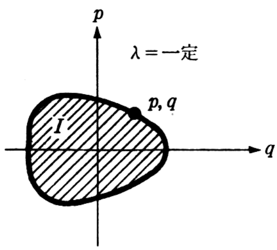


図228 1次元系の断熱不変量

定理 系 $(*)$ の振動数 $\omega(I, \lambda)$ が0にならなければ, $I(p, q ; \lambda)$ は断熱不変量である.

F. 作用の断熱不変性の証明 λ を固定すると, λ に依存する次の正準変換によって, 系 $(*)$ に作用-角変数 I, φ を導入することができる.

$$(p, q) \longrightarrow (I, \varphi) ; \qquad \dot{\varphi} = \omega(I, \lambda), \qquad \dot{I} = 0 ;$$

$$\omega(I, \lambda) = \frac{\partial H_0}{\partial I}, \qquad H_0 = H_0(I, \lambda).$$

この変換の(多価の)母関数を $S(I, q; \lambda)$ と表わす:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \qquad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}.$$

ここで $\lambda=\varepsilon t$ とおく．変数 p, q から変数 I, φ へは**時間に依存する**正準変換によるから，新しい変数 I, φ による運動方程式も Hamilton 形であるが，その Hamilton 関数 K は次の通りである(§45, A 項. p. 235).

$$K = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \lambda}.$$

問 $(\partial/\partial\lambda) S(I, q; \lambda)$ は相平面上1価であることを示せ.

［ヒント］ S の多価性は $2\pi I$ の整数倍が加わることによる. ——

このようにして，次の形で運動方程式が得られる.

$$\dot{\varphi} = \omega(I, \lambda) + \varepsilon f(I, \varphi; \lambda), \qquad f = -\frac{\partial^2 S}{\partial I \partial \lambda},$$

$$\dot{I} = \qquad \varepsilon g(I, \varphi; \lambda), \qquad g = \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \lambda},$$

$$\dot{\lambda} = \qquad \varepsilon.$$

$\omega \neq 0$ であるから平均化の定理(p. 287)が使える．平均化された系は次の形である.

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}, \qquad \dot{\Lambda} = \varepsilon.$$

ところで，$g = (\partial/\partial\varphi)(\partial S/\partial\lambda)$ であり，$\partial S/\partial\lambda$ は円周 $I=\text{const}$ 上1価の関数である．よって $\bar{g} = (2\pi)^{-1}\int g d\varphi = 0$，つまり，平均化された系においては，$J$ は全く変化しない: $J(t) = J(0)$.

平均化の定理により，すべての t, $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$ に対して

$$|I(t) - I(0)| < c\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

例 調和振動子に対しては(図217を見よ),

$$H = \frac{a^2}{2}p^2 + \frac{b^2}{2}q^2, \qquad I = \frac{1}{2\pi}\pi\frac{\sqrt{2h}}{a}\frac{\sqrt{2h}}{b} = \frac{h}{\omega}, \qquad \omega = ab,$$

すなわち，エネルギーと振動数の比は断熱不変量である.

問 振子の長さがゆっくりと2倍まで延びる($l = l_0(1+\varepsilon t)$, $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$)．振れの角の最大値 $q_{\max}$ はどう変化するか.

［解］ $I = (1/2) l^{3/2} g^{1/2} q^2_{\max}$，よって，

$$q_{\max}(t) = q_{\max}(0)\left(\frac{l(0)}{l(t)}\right)^{3/4}.　——$$

第2の例として，完全弾性をもつ2枚の壁の距離 l がゆっくり変化するとき，壁の間を動く質量1の小さい完全弾性剛体球の運動を考えよう(図229).

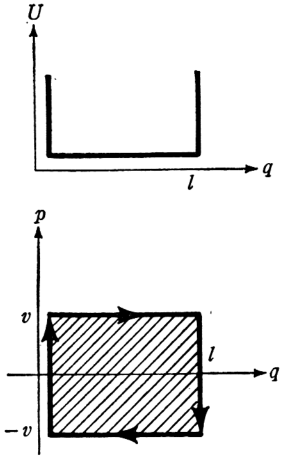


図229　ゆっくり動く壁の間の完全弾性小球の断熱不変量

点は《無限の深さをもつポテンシャルの直角の窪み》を動き，相軌道は面積 $2vl$ の長方形の辺であると考えてよい．ここで v は小球の速さである．このとき，断熱不変量は小球の速さと壁の間の距離の積 vl であることが分る*).

こうして，壁を半分のところまで近づけると小球の速さは2倍に増し，壁を遠ざければ速さは減少する．

---

*)　これは，上の定理から形式的に出る訳ではない．なぜなら，この定理は衝撃のない滑らかな系を扱うからである．この系で vl が断熱不変量であることは，教育的な易しい問題である．

付録1 Riemann 曲 率

円筒や円錐は1枚の紙を巻いて作ることができる．しかし紙を引き延ばしたり，皺(しわ)や裂け目を作らずには，球面を一部分でも作ることはできない．それはこれらの曲面の《内部の幾何学》が異なっており，球面のどんな部分も平面上に等距離的に写すことができないからである．

Riemann 計量の違いを表わす不変量に Riemann 曲率がある．平面の Riemann 曲率は0であり，半径 R の球面の曲率は R^{-2} である．Riemann 多様体 M が他の M' に等距離的に写されるならば，対応する点での Riemann 曲率は等しい．たとえば，円錐や円筒は局所的には平面と等距離的であるから，円錐や円筒の Riemann 曲率はどの点でも0である．したがって，円錐や円筒上のどんな領域も，球面上に等距離的に写されることはない．

Riemann 多様体の曲率は，その上の測地線の振舞に，すなわち，対応する力学系の運動に極めて本質的な影響を及ぼす．もし，多様体の Riemann 曲率が(球面や楕円面のように)正であれば，近くの測地線はほとんどの場合互いに振動しつつ，まつわり合っているが，(1葉双曲面のように)曲率が負であれば，測地線は別々の方向に速く分散してしまう．

この付録では Riemann 曲率の定義と，負曲率をもつ多様体上の測地線の性質を簡単に論じよう．Riemann 曲率について，もっと精しくは J. Milnor [1] を，負曲率をもつ多様体上の測地線については D. V. Anosov [1] を参照せよ†)．

A. 曲面上の平行移動 Riemann 多様体上の曲線に沿うベクトルの平行移動の構成を用いて，Riemann 曲率を定義しよう．

まず例として，2次元 Riemann 多様体，すなわち曲面 S が与えられ，曲線が曲面 S 上の測地線である場合を考えよう．

曲面 S の接ベクトル v の，S 上の測地線 γ に沿う平行移動を次のように定義する．ベクトル $\boldsymbol{v}$ の基点が γ に沿って運動するとき，ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と測地線 γ とのなす角と，$\boldsymbol{v}$ の長さが変わらないように連続的に変化する．

†) 測地流についての最近の話題については，D. Ornstein-B. Weiss [1]，M. Ratner [1]，B. Weiss [1] を参照．

測地線 γ の始点での曲面 S のすべての接ベクトルを，このように γ の終点へ移動させた結果として，始点での接平面から終点での接平面への写像が得られる．この写像は線形で等距離的である．

さて，幾つかの測地弧からなる折線に沿う曲面上のベクトルの平行移動を定義しよう(図230)．折線に沿ってベクトルを平行移動するには，最初の頂点から2番目の頂点まで最初の測地弧に沿って移動し，得られたベクトルを2番目の弧に沿って次の頂点まで，等々と，移動する．

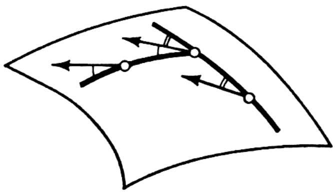


図230　測地折線に沿う平行移動

問　3つの角が直角である球面3角形の1頂点における球面の接ベクトルを，3角形の辺に沿って移動させ，元の頂点へ戻せ．

［解］　最初の頂点での球面の接平面をこのように平行移動させると，直角に向きを変える．——

最後に，曲面上の任意の滑らかな曲線 γ に沿うベクトルの平行移動は，曲線 γ を測地弧からなる折線によって近似し，極限移行を用いて定義する．

問　レニングラード(北緯 $\lambda=60°$)におかれ，北極に向いているベクトルを，北緯60°線に沿って東に向って移動しレニングラードまで戻せ．

［解］　ベクトルは角 $2\pi(1-\sin\lambda)$，すなわち，ほぼ50° 西の方へ向きを変える．このように，回転角はこの緯線で囲まれる面積に比例し，ベクトルが移動する際に北極を回る方向と同じ方向に回転する．

［ヒント］　地球に北方からこの緯線 γ に接するような円錐 C を作り，C 上の同じ円周 γ に沿ってベクトルを移動すればよい(図231)．円錐 C は平面上へ展開でき，曲面 C 上の平行移動は，平面上の通常の平行移動となる．

例　複素平面の上半平面 $y>0$ を考え，変数を $z=x+iy$ とし，計量を次式で与える．

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

この2次元 Riemann 多様体の測地線は，x 軸に直交する円周と直線であることが容易に示される．実係数の1次分数変換

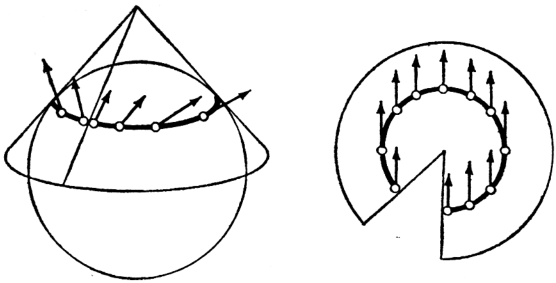


図231 球面上の平行移動

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

は，**Lobachevskii 平面**と呼ばれるこの多様体の等距離変換である[†].

問 点 $z=i$ から点 $z=t+i$ へ，水平線 $(dy=0)$ に沿って虚軸方向のベクトルを移動せよ(図232).

［解］ t だけの変位に対して，y 軸の方向から x 軸の方向へ t ラジアンだけ向きを変える.

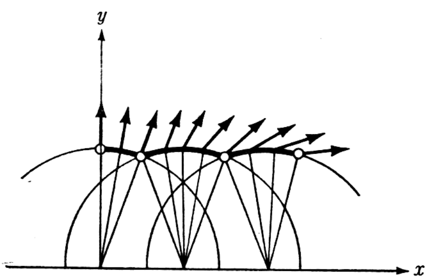


図232 Lobachevskii 平面上の平行移動

B. 曲率形式 いまや，2次元 Riemann 多様体(すなわち曲面)の各点で，Riemann 曲率を定義することができる．このため，考えている点の近傍でこの曲面の向き付けを選び，この曲面上の小さな領域 D の境界に沿って，ベクトルの平行移動を考えよう．この移動の結果，小さな角の回転が起こることが容易に分る．この角を $\varphi(D)$ と書こう(角を測る向きは，曲面の向き付けの選び方による).

†) この例については，Arnold-Avez [1] 付録20参照.

領域 D が2つの部分 D_1 と D_2 に分割されていれば，D の境界に沿う平行移動は，まず最初の部分 D_1 を，次に D_2 を回って得られる．したがって，

$$\varphi(D) = \varphi(D_1) + \varphi(D_2),$$

すなわち，角 φ は領域の関数として加法的である．境界を回る方向が変わると，角 φ の符号も変わる．それ故，$\varphi(D)$ を或る適当な2-形式の D 上の積分として表わすことは自然である．このような2-形式は実際に存在して，**曲率形式**と呼ばれる．これを Ω と書こう．こうして，曲率形式 Ω を関係式

$$\varphi(D) = \int_D \Omega \tag{1}$$

によって定義する．点 x での M の接ベクトルの対 ξ, η に対する曲率形式 Ω の値を次のように定義する．接空間 TM_x の原点の或る近傍と，M 上の点 x の或る近傍とを同一視しよう(たとえば，局所座標を使って)．そのとき，少なくとも ε が十分小さければ，ベクトル $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$ で張られた平行4辺形 P_ε を M 上に作ることができる．

このとき，ベクトルの対 ξ, η に対する曲率形式 Ω の値は，式

$$\Omega(\xi, \eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(P_\varepsilon)}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

によって定められる．いい換えれば，無限に小さい接ベクトルの対に対する曲率形式の値は，このベクトルで作られる無限に小さい平行4辺形に沿う移動による回転角に等しい．

問　平面，半径 R の球面，Lobachevskii 平面上の曲率形式を求めよ．

［解］　$\Omega=0$, $\Omega=R^{-2}dS$, $\Omega=-dS$. ここで，2-形式 dS は考えている向き付けられた曲面上の面積要素である．

問　式(2)で定義される関数は，実際に2次微分形式であり，上の構成に関与している任意性には依存せず，向き付けられた有限領域 D の境界に沿う移動によるベクトルの回転量が，この形式によって式(1)で表わされることを示せ．

問　3次元 Euclid 空間の任意の凸閉曲面で曲率形式を積分すると，4π になることを示せ．

C. 曲面の Riemann 曲率　さて，向き付けられた2次元 Riemann 多様体 M 上のすべての2次微分形式は ρdS の形に書けることに注意しよう．ここで，dS は向き付けられた面積要素であり，ρ は計量と向き付けによって一意的に

定まるスカラー関数である.

とくに，曲率形式は

$$\Omega = KdS$$

の形に書ける．ここで，$K:M\to\boldsymbol{R}$ は多様体 M 上の滑らかな関数で，dS は面積要素である.

点 x における関数 K の値を，点 x における**曲面の Riemann 曲率**と呼ぶ.

問 Euclid 平面，半径 R の球面，Lobachevskii 平面の Riemann 曲率を計算せよ.

［解］ $K=0$, $K=R^{-2}$, $K=-1$.

問 Riemann 曲率は多様体の向き付けにはよらず，その計量にだけ依存していることを示せ.

［ヒント］ 向き付けを変えると，2-形式 Ω と dS は同時に符号を変える.

問 通常の3次元 Euclid 空間の曲面に対して，各点での Riemann 曲率は主曲率半径の逆数の積になること(2つの曲率中心が曲面の異なる側にあれば，負符号がつく)を示せ. ——

各点での多様体の曲率の符号は，多様体の向き付けにはよらない．この符号は，向き付けを全く使わないで定めることができるのである.

つまり，**正**曲率の多様体上では，小さい領域の境界に沿う平行移動に際して，点が領域の境界上を回るのと同じ向きに，ベクトルは始点の回りを回転し，**負**曲率の多様体上では，ベクトルの回転方向は**逆**になる.

各点での曲率の値はこの点の近傍における計量だけで定まり，曲げることでは変わらないこと，つまり等距離的な曲面では対応する点での曲率は一致することに注意しよう．したがって Riemann 曲率は内在的曲率とも呼ばれている.

或る座標系で表わされた計量の成分を使って曲率を計算する式には，計量の2階微分が含まれていて，かなり複雑である．後出の G 項の問4(p. 304)を参照せよ.

D. 多次元の平行移動 3次元以上の Riemann 多様体上の平行移動の構成は，上に述べた2次元の場合よりかなり複雑である．3次元の場合でさえ，測地線との角を保つという条件だけでは，移動したベクトルの方向は定まらない．つまり，このベクトルは測地線の方向ベクトルの回りを，それとの角を一定に保ったまま回転できるのである.

測地線に沿う平行移動をうまく構成するには，測地線の接線と移動されたベクトルを含む2次元平面を選ぶ必要がある．この選択は(不幸なことにかなり複雑だが)次のように行われる．

測地線γの始点pでは必要な平面は存在する．これは，移動されるベクトルと測地線の方向ベクトルで張られる平面である．この平面に属する方向に，始点pから出て行くすべての測地線を考えよう．このような測地線の全体は，(始点pの近くで)元の測地線γを含む滑らかな曲面Sをなす(図233).

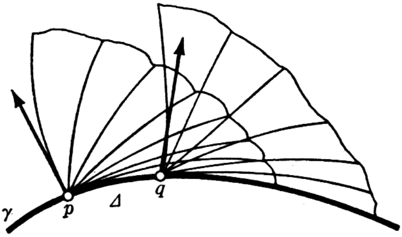


図233　空間での平行移動

測地線γ上に，始点pから短い距離Δだけ離れている新しい点qを考えよう．構成された曲面Sの点qでの接平面は，点qでの測地線の方向を含んでいる．この点qを始点とし，点qでの接平面を使って新しい曲面(新しい点qから出る測地線の束からなる)を構成しよう．この曲面も元の測地線γを含んでいる．測地線γに沿ってさらにΔだけ移動し，すべてのプロセスを始めから繰り返す．

測地線γのどの点にも有限回の歩みで到達する．測地線γの各点で上の操作をすると，γの方向ベクトルを含む接平面が得られる．この平面は，上の構成での歩みΔによっている．得られた接平面族は$\Delta \to 0$のとき確定した極限に近づく(ことが計算できる).

結局，測地線γに沿って，γの方向ベクトルを含む2次元接平面場が得られる．この場は多様体の計量自身によって内在的に定まっている．

今や，測地線に沿うベクトルの平行移動は，2次元の場合と同様に定義される．このベクトルは移動するとき上に述べた平面を離れず，その長さと測地線の方向との角を不変にせねばならない．任意の曲線に沿う平行移動は，2次元の場合のように，測地折線による近似を使って定義される．

問 Riemann 多様体の1点 p から他の点 q へ，指定された道に沿ってベクトルを平行移動させることは，点 p での接空間から点 q での接空間への線形な等距離写像である，ことを示せ．

問 計量

$$ds^2 = \frac{dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dy^2}{y^2}$$

を持つ Lobachevskii 空間の曲線

$$x_1 = t, \qquad x_2 = 0, \qquad y = 1 \qquad (0 \leq t \leq \tau)$$

に沿って，任意のベクトルを平行移動せよ．

［解］ x_1 軸と y 軸の方向ベクトルは，これらによって張られる平面の中を y 軸から x_1 軸の向きに，角 τ だけ回転し，x_2 軸の方向ベクトルは，まさに Euclid 計量の意味で平行移動する．

E. 曲率テンソル さて，2次元の場合でのように，Riemann 多様体の1点に始まりその点で終る小さい閉じた道に沿う平行移動を考えよう．

こうした道に沿う平行移動は，始点での接空間においてベクトルを回転させる．こうして得られる接空間からそれ自身への写像は，微小な回転(恒等変換に近い直交変換)である．

2次元の場合には，この回転は1つの数，つまり回転角 φ によって特徴づけられた．多次元の場合，数 φ の役割を歪対称作用素が果たす．

つまり，恒等変換に近い直交作用素 A は一意的に

$$A = e^{\Phi} = E + \Phi + \frac{\Phi^2}{2!} + \cdots$$

の形に書かれる．ただし，Φ は小さい歪対称作用素である．

問 A が平面の小さい角 φ の回転のとき，Φ を計算せよ．

［解］
$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

2次元の場合と違って，道の関数 Φ は一般には加法的でない(というのは，$n>2$ に対し n 次元空間の直交群は可換でないから)．それでも，2次元の場合に式(2)を使ったと同様に，《無限に小さい平行4辺形に沿って回る際の無限小回転》を表わす曲率形式を，Φ を使って構成することができる．——

そこで，ξ, η を TM_x の元，すなわち，点 x での Riemann 多様体 M の接ベクトルとせよ．M 上に小さい曲平行4辺形 P_ε を構成する．(TM_x のベクトル $\varepsilon\xi$ と $\varepsilon\eta$ から得られる TM_x 上の平行4辺形を，TM_x の0の近傍と M 上

の点 x の近傍との座標による同一視によって M に移せ.) 平行4辺形 P_ε の辺に沿う(辺 ξ からまわり始める)平行移動を考えよう.

移動の結果, 空間 TM_x の恒等変換に近い直交変換が得られる. これは, 恒等変換とオーダー ε^2 の量だけ違っており,

$$A_\varepsilon(\xi, \eta) = E+\varepsilon^2\Omega+o(\varepsilon^2)$$

の形をしている. ただし, Ω は ξ と η に依存する歪対称作用素である.

そこで, 点 x での接空間のベクトルの対 ξ, η の関数 Ω を, 式

$$\Omega(\xi, \eta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A_\varepsilon(\xi, \eta)-E}{\varepsilon^2}$$

によって, TM_x 上の歪対称作用素の空間に値をもつように定義することができる.

問　関数 Ω は(TM_x 上の歪対称作用素に値をもつ) 2次微分形式であり, TM_x と M との同一視に使った座標の取り方によらない, ことを示せ. ——

形式 Ω は Riemann 多様体の**曲率テンソル**と呼ばれる. こうして, 曲率テンソルは, 無限に小さい平行4辺形を巡る平行移動による接空間の無限小回転を記述するものである.

F. 断面曲率　Riemann 多様体 M の或る点 x での接空間の2次元平面 L を考えよう. 平面 L 内のあらゆる方向へ, 点 x から測地線を出そう. これらの測地線は点 x の近くで滑らかな曲面 S を形成する. 曲面 S は Riemann 多様体 M に埋め込まれており, S に Riemann 計量が誘導される.

Riemann 多様体 M の点 x での接空間 TM_x の2次元平面 L の方向への, M の断面曲率と呼ばれるのは, この曲面 S の点 x での Riemann 曲率のことである.

問　半径 R の3次元球面と Lobachevskii 空間のあらゆる方向への断面曲率を求めよ.
[解]　$R^{-2}, -1$. ——

一般には, Riemann 多様体の1点での異なる方向への断面曲率は異なる. それが方向にどのように依存するかは次に述べる式(3)によって記述される.

定理　Riemann 多様体の, 長さ1の直交するベクトルの対 ξ, η によって定まる方向への断面曲率は, 曲率テンソル Ω を使って式

$$K = \langle\Omega(\xi, \eta)\xi, \eta\rangle \tag{3}$$

で表わされる．ここで，角括弧は Riemann 計量のスカラー積である．——

証明は，曲率テンソルと断面曲率の定義を比較すれば得られる．これをきちんと行うことは詳しく述べない．あるいは，式(3) を曲率の定義としてもよい．

G. 共変微分 Riemann 多様体上の曲線に沿う平行移動は，特別な微分演算，すなわち，共変微分や Riemann 接続と呼ぶものと関連している．この微分は次のように定義される．

ξ を Riemann 多様体 M の点 x での接ベクトルとし，v を点 x の近傍で与えられたベクトル場とする．場 v のベクトル ξ の方向への共変微分は，速度 ξ で点 x から出ていく或る曲線 γ を使って定義される．

曲線 γ に沿って長くない時間 t だけ動くと，新しい点 $x(t)$ にいることになる．この点 $x(t)$ での場 v のベクトルをとり，曲線 γ を戻って始点 x まで平行移動する．始点 x での M の接空間に，t に依存するベクトルが得られる．$t=0$ のとき，これはベクトル $v(x)$ であるが，$t\neq 0$ に対しては，ξ 方向の或る曲線 γ に沿ってベクトル場 v が平行でない程度に応じて変化する．

得られたベクトルを，t に関して $t=0$ で微分してみよう．この微分は接空間 TM_x のベクトルとなる．これを**場 v の ξ に関する共変微分**と呼び，$\nabla_\xi v$ と書く．

ベクトル $\nabla_\xi v$ は，定義に現われる曲線のとり方によらず，ベクトル ξ と場 v のみに依存することは容易に確かめられる．

問1 共変微分の次の性質を証明せよ．

1) $\nabla_\xi v$ は ξ と v の双線形関数である．

2) $\nabla_\xi fv=(L_\xi f)v+f(x)\nabla_\xi v$．（ここで，$f$ は滑らかな関数で，$L_\xi f$ は関数 f のベクトル $\xi(\in TM_x)$ 方向への微分である．）

3) $L_\xi\langle v,w\rangle=\langle\nabla_\xi v,w(x)\rangle+\langle v(x),\nabla_\xi v\rangle$．

4) $\nabla_{v(x)}w-\nabla_{w(x)}v=[w,v](x)$．（ここで，$L_{[w,v]}=L_vL_w-L_wL_v$ である．）

問2 曲率テンソルは共変微分によって

$$\Omega(\xi_0,\eta_0)\zeta_0=-\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta+\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta+\nabla_{[\eta,\xi]}\zeta$$

と表わされることを示せ．ここで，ξ,η,ζ は任意のベクトル場，ξ_0,η_0,ζ_0 は考えている点でのこれらの値である．

問3 曲率テンソルは次の恒等式を満たすことを示せ．

$$\Omega(\xi,\eta)\zeta+\Omega(\eta,\zeta)\xi+\Omega(\zeta,\xi)\eta=0,$$

$$\langle \Omega(\xi,\eta)\alpha,\beta\rangle = \langle \Omega(\alpha,\beta)\xi,\eta\rangle.$$

問4　Riemann 計量が局所座標系 $x_1, \cdots, x_n$ で対称行列 g_{ij} によって与えられているとする．つまり，

$$ds^2 = \sum g_{ij}dx_i dx_j.$$

座標ベクトル場を $e_1, \cdots, e_n$ と表わそう(それ故，e_i 方向への微分は $\partial_i = \partial/\partial x_i$ である)．そのとき，共変微分は問1の式を使って計算すれば，

$$\nabla_{e_i}e_j = \sum_k \Gamma^k{}_{ji}e_k, \qquad \Gamma^k{}_{ij} = \sum_l \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})g^{lk}$$

によって表わすことができる．ここで，(g^{lk}) は (g_{kl}) の逆行列である．

問2で述べた接続による曲率テンソル Ω の表示を使えば，Ω に対しても具体的な式が得られる．数 $R_{ijkl} = \langle \Omega(e_i, e_j)e_k, e_l\rangle$ を曲率テンソル Ω の成分と呼んでいる．

H. Jacobi の方程式　Riemann 多様体の曲率は，その測地線の挙動に緊密に関わっている．とくに，或る点から或る方向へ出ている測地線 γ を考え，初期条件，すなわち，出発点と初速度を少し変えてみよう．新しい初期条件は新しい測地線を定める．この測地線は，初めのうち測地線 γ からあまり離れていない．このずれを調べるには，測地線 γ の近くで，測地線の微分方程式を線形化することが有効である．

こうして得られる2階の線形微分方程式(測地線の方程式に対する《変分方程式》)を **Jacobi の方程式**と呼び，共変微分と曲率テンソルによって書きくだしておくと便利である．

多様体 M の或る測地線 γ に沿い，一定の大きさの速度 $v(t) \in TM_{x(t)}$ で運動する点を $x(t)$ と表わそう．

初期条件がパラメーター α に滑らかに依存するならば，測地線もまた α に滑らかに依存する．パラメーター値 α に対応する運動を考えよう．対応する測地線上の，時刻 t における点の位置を $x(t,\alpha) \in M$ と書こう．測地線 γ はパラメーター値0に対応しており，$x(t,0) = x(t)$ であると考えよう．

測地線の変分ベクトル場というのは，関数 $x(t,\alpha)$ のパラメーター α に関する $\alpha=0$ での微分のことであり，点 $x(t)$ でのこのベクトル場の値は

$$\left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} x(t,\alpha) = \xi(t) \in TM_{x(t)}$$

に等しい．

変分方程式を書きくだすために，さらに測地線 $x(t)$ 上で与えられたベクトル場 $\zeta(t)$ の t **に関する共変微分**を定義しよう．定義は次のようにする．ベクトル $\zeta(t+h)$ をとり，これを点 $x(t+h)$ から点 $x(t)$ へ測地線に沿って平行移動し，得られた接空間 $TM_{x(t)}$ のベクトルを h に関して $h=0$ で微分する．この結果，接空間 $TM_{x(t)}$ のベクトルが得られ，これを場 $\zeta(t)$ の t に関する共変微分といい，$D\zeta/Dt$ と書く．

定理 測地線 γ の変分ベクトル場 ξ は，2階の線形微分方程式

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2}=-\Omega(v,\xi)v \tag{4}$$

を満たす．ここで，Ω は曲率テンソル，$v=v(t)$ は測地線 γ に沿う運動の速度ベクトルである．

逆に，微分方程式(4)の解はすべて測地線 γ の変分場である．——

方程式(4)を Jacobi の方程式という．

問 上に定式化された定理を証明せよ．

問 M を曲面とし，$y(t)$ をベクトル $\xi(t)$ の，考えている測地線に垂直な成分とし，ベクトル $v(t)$ の長さを1とする．y は微分方程式

$$\ddot{y}=-Ky \tag{5}$$

を満たすことを示せ．ここで，$K=K(t)$ は点 $x(t)$ での曲面の Riemann 曲率である．

問 方程式(5)を使って，球面($K=+R^2$)と，Lobachevskii 平面($K=-1$)の上で，与えられた測地線に近い測地線の挙動を比較せよ．

I. Jacobi の方程式の研究 変分方程式の研究では，時間を計る基点や，運動の初速度の大きさを変更することからなる自明な変分は，除外しておいた方がよい．このため，変分ベクトル ξ を，速度ベクトル v に平行な成分と垂直な成分に分解しよう．そのとき($\Omega(v,v)=0$ と，作用素 $\Omega(v,\xi)$ の歪対称性とから)，垂直成分に関しては再び Jacobi の方程式を得るが，平行成分については，方程式 $D^2\xi/Dt^2=0$ を得ることになる．

ここで，垂直成分に対する Jacobi の方程式が《Newton 方程式》

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2}=-\operatorname{grad} U$$

の形に書き直せることに注意する．ここで，ベクトル ξ の2次形式 U は曲率テンソルによって表わされ，(v,ξ) 方向への断面曲率 K に比例している．つまり，

$$U(\xi)=\frac{1}{2}\langle\Omega(v,\xi)v,\xi\rangle=\frac{1}{2}K\langle\xi,\xi\rangle\langle v,v\rangle.$$

このように，弧長をパラメーターとする測地線の変分ベクトルの垂直成分の挙動は，ポテンシャル・エネルギーが，速度ベクトルと変分ベクトルの作る平面への断面曲率と，変分ベクトルの垂直成分の長さの2乗との積の半分であるような，(非自励的な)線形振動子の方程式によって記述される．

とくに，測地線の速度ベクトルを含むすべての方向への断面曲率が**負**である場合を考えよう(図234).

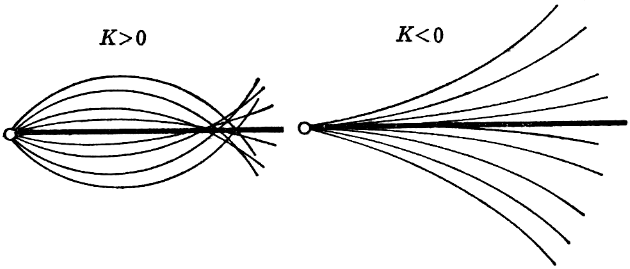


図234 正曲率と負曲率の多様体上の測地線

そのとき，与えられた測地線から，それに近い測地線への垂直方向のずれは，(時間に依存する)負定値のポテンシャル・エネルギーをもつ振動子の方程式で記述される．したがって，近い測地線のずれの垂直成分は，山頂近くの小球が頂上からなだれ落ちるように振舞う．頂上での小球の平衡状態は不安定である．つまり，与えられた測地線に近い測地線は，指数関数的に遠ざかっていく．

Newton 方程式を定めるポテンシャル・エネルギーが時間に依存しないなら，これまでの結論は完全に厳密なものとなる．さらに，この際 v を含むいろいろな方向への断面曲率が，区間

$$-a^2\leq K\leq -b^2,\qquad ここで\quad 0<b<a$$

に閉じ込められていると仮定しよう．そのとき，垂直のずれに対する Jacobi の方程式の解は，指数 $\pm\lambda_i$ の指数関数の1次結合となる．ただし正数 λ_i は a と b の間にある．

したがって，Jacobi の方程式の解はそれぞれ，$t\to+\infty$ または $t\to-\infty$ に際して，$e^{b|t|}$ より遅くなく増大する．この際，大部分の解はもっと速く $e^{a|t|}$ の速さで増大する．

非自励的な場合，負定値のポテンシャル・エネルギーをもつとき平衡状態が不安定であることは直観的には十分明らかである．このことは適当な自励系と

の比較によって証明できる．このような比較で次のことが確かめられる．

負曲率をもつ多様体上の，測地線に垂直な方向のずれに対する Jacobi の方程式のすべての解は，測地線に沿う運動に際して，通過した行程の指数関数（その指数は断面曲率の最小の絶対値の平方根に等しい）よりも遅くなく増大する．

実際には大部分の解はもっと速く増大するのだが，大部分の解の増大の指数が，絶対値最大の負曲率の方向によって定まることを，今は主張することができない．

要約すれば，負曲率をもつ多様体上の測地線の挙動は指数不安定性によって特徴づけられる，ということができる．この不安定性を定量的に評価するために，平均行程としての**特性行程** s を，すなわち，s だけ経過すると初期条件での小さなずれが e 倍になるような行程 s を，導入するのが有効である．

より正確には，弧長をパラメーターとする測地線からの垂直方向のずれに対する Jacobi の方程式の解の増大を特徴づける指数 λ の逆数として，特性行程 s を定義することができる．つまり，

$$\lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \max_{|t|<T} \max_{|\xi(0)|=1} \log|\xi(t)|, \qquad s = \frac{1}{\lambda}$$

である．一般には，指数 λ と行程 s はもとの測地線に依存している．

考えている多様体のあらゆる断面曲率 K が，$K \leqq -b^2$ であれば，特性行程は b^{-1} を越えない．

このように，多様体の曲率が負でその絶対値が大きいほど，測地線の不安定性がずれを e 倍に増大させる特性行程 s は小さくなる．ずれが指数関数的に増大するという特性を考えれば，負曲率の多様体上の測地線の進み方は実際上予測できない．

たとえば，曲率 K が負で $K \leqq -4\,\mathrm{m}^{-2}$（m はメートル）と仮定しよう．すると，特性行程は 0.5 m を越えない．つまり，5 m の測地線分で，ずれはほぼ $e^{10} \sim 10^4$ 倍に増大する．したがって，初期条件での 0.1 mm のずれが，測地線分の端では 1 m にもなってくる．

J．負曲率のコンパクト多様体上の測地流　M はコンパクト Riemann 多様体で，各点での断面曲率がすべて負であるとする（このような多様体は存在する）．多様体 M に沿う質量 1 の質点の，外力の作用のない慣性運動を考えよ

う．この系の Lagrange 関数は運動エネルギーであり，全エネルギーに等しく，運動方程式の第1積分である．

多様体 M の次元が n ならば，エネルギーのレベル多様体は $2n-1$ 次元である．これは多様体 M の接バンドルの部分多様体である．エネルギーの一定値を 1/2 にしておこう(これは初速度1に対応している)．そのとき，点の速度は常に1のままであり，考えているレベル多様体は，各点での M の接空間の単位球面からなるバンドルの全空間 T_1M である．つまり，

$$T_1M \subset TM.$$

このように，多様体 T_1M の点は，多様体 M の点においた長さ1のベクトルを表わしている．Maupertuis-Jacobi の原理に従えば，T_1M に初期条件を制限された質点の運動は，次のように記述される．つまり，質点は与えられたベクトルで定まる測地線上を速さ1で運動する．

エネルギーの保存法則によれば，多様体 T_1M は考えている系の相空間の不変多様体である．

したがって，考えている相流は $2n-1$ 次元多様体 T_1M の微分同相の1-パラメーター群を定める．この群は M 上の**測地流**と呼ばれている．測地流は次のように記述できる．時間 t 後への変換は，点 x におかれた長さ1のベクトル $\xi\in T_1M$ を，点 x から ξ 方向に出ていく測地線上の，点 x から t だけ離れた点におかれた長さ1の速度ベクトルへ写すものである．T_1M には自然に体積要素が定義され，Liouville の定理によって測地流はこれを保つことに注意しよう．

もちろん，ここまでは多様体 M の曲率が負であることは使っていない．しかしながら，測地流の軌道の研究にとりかかれば，多様体 M の曲率が負であることが，この軌道の挙動に強い影響を及ぼすことが分る(これは，M 上の測地線の指数不安定性と関連している)．

負曲率の多様体上の測地流の性質を幾つか挙げよう(詳しくは D. V. Anosov [1] 参照)．

1. 殆どすべての相軌道は，エネルギーのレベル多様体上至るところ稠密である(例外の至るところ稠密ではない軌道は，測度0の集合を作る)．

2. 一様分布．殆どすべての軌道が相空間 T_1M の任意の領域で過ごす時間

は，その領域の体積に比例する．

3. 相流 g^t は混合性をもつ．つまり，A, B を2つの領域とすると，

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{mes}[(g^t A)\cap B] = \operatorname{mes} A \operatorname{mes} B$$

となる(ここで，mes は全空間の測度を1とする正規化された体積を表わす)．

相空間における軌道のこれらの性質から多様体自身の上の測地線についても類似の定理が得られる．物理学者はこれらの性質を《統計性》あるいは《確率性》と呼ぶ．つまり，大きな t に対して軌道は漸近的には点があたかも出たら目(確率的)にあるように振舞う．たとえば，混合性とは A を出た後で長時間 t の後に B に存在する確率が B の体積に比例することである，等々である．

かくて，負曲率の多様体上の測地線の指数不安定性は，対応する測地流の統計性を導く．

K. 指数不安定性の他の応用 負曲率の多様体上の測地線の指数不安定性は J. Hadamard によって研究され始め(定曲率の場合はすでに Lobachevskii によって)，以来多くの人々，とりわけ E. Hopf によって研究されてきた．この分野での60年代の意外な発見というのは，系の指数不安定性が系自身の摂動に関して驚くほど安定であることであった．

たとえば，負曲率をもつコンパクトな曲面 S 上で測地流を与えるベクトル場を考えよう．上で述べたように，この相流の相曲線は極めて複雑な構造をもつ．殆どの相曲線は，3次元であるエネルギーのレベル多様体 T_1S を至るところ稠密に満たしている．この相流には無限個の閉軌道があり，閉軌道の点が作る集合も多様体 T_1S 上至るところ稠密である．

ここで，測地流を与えているベクトル場に近いベクトル場を考えよう．相曲線の状態が極めて複雑なのにも係わらず，相曲線が至るところ稠密であったり閉軌道が無限個あったりするその状況の全体は，近くのベクトル場に移っても殆ど変わらない．すなわち，恒等変換に近い同相写像が存在して，非摂動流の相曲線を摂動流の相曲線に写す．

このような複雑な構造をもつ相流は，たとえば平面上の極限閉軌道や安定な渦状点と同じように，《粗っぽさ》†)，または《構造安定性》という性質をもっ

†) A. Andronov–L. Pontryagin [1] の用語.

ている．平面上の渦心点やトーラスの巻き線は，このような《粗っぽさ》をもたないことに注意しよう．つまり，これらの場合の相空間図の位相型は，ベクトル場を少し変えると変わってしまう．

その運動が複雑でそれぞれ指数不安定であるような，《粗っぽい》系が存在しうるということは，最近の常微分方程式論での基本的な発見の1つである．(負曲率の多様体上の測地流が《粗っぽい》という仮説は，1961年にS. Smale†)によって述べられ，その証明はD. V. Anosovによって与えられ1967年に発表された．これらの相流の統計性についての基本的な結果が，Ya. G. SinaiとD. V. Anosovによって，これも60年代に得られた.)

以前には，《一般の形》の微分方程式系では，最も単純な安定極限状態，つまり平衡点と閉軌道だけが起こりうると予想されていた．もし系の構造がもっと複雑ならば(たとえば保存的ならば)，その方程式の小さな変更によって(たとえば小さい非保存的な摂動を考えれば)，複雑な運動は単純な運動に分散すると予想されていた．今やそうではなくて，ベクトル場の作る関数空間の中で，もっと複雑な挙動をする相曲線をもつベクトル場が或る領域を形成することも知られている．

これから得られる結論は，決定論的な対象の，《確率論的》な挙動が現われる広範な現象に及んでいる．

つまり，或る(非保存的な)系の相空間には，その上で相曲線が指数不安定性を示すような，不変な吸引多様体(または集合)が存在するといったことが想像される．今では，このような性質をもつ系が例外的ではないこと，つまり，系の小さい摂動では上に述べたような性質は破れないことが知られている．このような系の運動を観測している人は，そこに何を見るだろうか．

相曲線が吸引集合に近づいていくと，何らかの極限状態が確立するように感じられるだろう．吸引集合の近くでのその後の運動は混沌を引き起こし，極限状態の《相》の変化を予測することは困難で，《統計性》とか《乱流》のように感じられるだろう．

残念ながら，これまでのところ，上に述べた性格をもつ物理的な例の，この

---

†) 彼の立場はS. Smale [1] に詳しい．

視点からの説得力ある解析は行われていない．始めに自然に考えられる例は，いわゆる Navier-Stokes の方程式†)によって記述される粘性流体の流体力学的不安定性である．

この問題の相空間(これは流域上発散0のベクトル場のなす空間である)は無限次元だが，問題の無限次元性は，高次のハーモニクス(小さい渦)はその次数が高いほど，粘性によって速く消されるという理由から，恐らく重大な障害ではないだろう．結局，この無限次元空間の相曲線は，多分，極限状態の属する或る有限次元多様体(または集合)に近づいていくだろう．

粘性が大きければ，相空間には安定な吸引平衡点《安定な定常流》が存在する．粘性が小さくなれば安定性は失われる．つまり，この際に相空間に，たとえば安定な極限閉軌道《周期的に変化する流れ》や，新しい型の安定な平衡点《2次的な定常流》が発生するかも知れない*)．それで，粘性が減少するに従って，ますます多くのハーモニクスが働き出し，極限状態はますます高次元になるかも知れない．

粘性が小さいと，指数不安定な軌道をもつ極限状態が現われてくるというのは，極めてもっともらしく思われる．残念なことに，これまでのところは，現存する計算機の能力の限界故に，これに見合う計算はなされていない．しかし計算はしなくても，次の一般的な結論をくだすことはできる．つまり，乱流型の現象の発生には，解の非存在や非一意性は必要でなく，自由度有限の決定論的な系にさえも現われるような指数不安定性で十分なのである．

指数不安定性のもう1つの適用例として，Ya. G. Sinai によって報告された，剛体小球の系に対する L. Boltzmann の《エルゴード仮説》の証明が挙げられる．この仮説とは，完全弾性反射壁をもつ箱の中の完全弾性をもつ同一の小球からなる系の運動に対応する相流が，エネルギー・レベルの連結集合の上でエルゴード的であることである．(エルゴード的であるとは，殆どすべての相曲線が，レベル集合の各可測部分集合上で，その測度に比例する時間を過ごすことである．)

---

†) この方程式に関する最近の話題については，J. E. Marsden [1] およびその文献表の論文を参照．

*) 安定性の喪失について，もっと詳細には V. I. Arnold [12] を見よ．

Boltzmann の仮説は時間平均を空間平均でおきかえることを認めるもので，長い間，統計力学の基礎には必須のものと思われてきた．実際に，(粒子の数が無限に増える)統計的な極限移行に対して，(時間が無限になるときの極限を問題としている) Boltzmann の仮説は必要ではない．しかしながら，Boltzmann の仮説は力学系の確率論的な性質の解析(いわゆるエルゴード理論)のすべてを生み，その証明はこの理論の発展の尺度の役割を果たしている．

Boltzmann の問題における軌道の指数不安定性は，小球が互いに衝突する結果生ずることであって，次のように説明することができる．

簡単にするために，平面上2粒子だけからなる系を考え，壁で反射する箱を平坦トーラス $\{(x, y) \bmod 1\}$ でおきかえよう．すると，(運動量の保存法則を使えば)粒子の一方が固定されていると考えることができるし，他方の粒子も点と考えることができる．

こうして得られた点の運動についてのモデルを中央に円形の壁をもつトーラス撞球という (図 235)．ただし，点は壁で《入射角は反射角に等しい》という規則で反射するとしている．

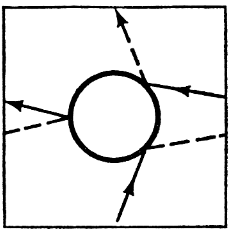


図 235 円形の壁で散乱するトーラス撞球

この系を調べるためさらに，外から平面凸曲線で囲まれた撞球(たとえば，楕円の内部での点の運動)という類似の問題を考えよう．このような撞球での運動は楕円面上の測地流の極限の場合と考えることができる．この極限移行は楕円体の短軸の長さを0にしていくようにとる．その結果，楕円面上の測地線は，楕円内での撞球の軌跡に移行する．このとき，楕円に表裏があると考え，反射の際に測地線が楕円の片側から他の側へ移ると考える方が良いであろう．

さて，もとのトーラス撞球に戻ろう．この運動もまた，滑らかな曲面上の測地流の極限の場合と考えることができる．この曲面は穴をあけたトーラスを表裏のある曲面と思い，それに幾分厚みを加え，鋭い縁を少し滑らかにすれば得

られる．こうして得られる曲面は，8字形のパンの位相をもつ曲面(球面に2つのハンドルをつけたもの)である．

楕円を膨らませて楕円面にすると正曲率の曲面が得られるように，穴をあけたトーラスを膨らませると負曲率の曲面が得られる．(双方の場合とも，曲率は縁の近くに集中しているが，曲率の符号を変えないように膨らませることができる．)

かくして，このトーラス撞球における運動は，負曲率の曲面上の測地線に沿う運動の極限の場合と考えることができる．

今や(考えている単純な場合の) Boltzmann の仮説の証明には，負曲率の曲面上の測地流の確率論的な性質の解析が，上述の極限の場合にも有効であることを確かめればよい．

証明を詳細に実行すると，これが極めて複雑であることが分る．それで，2粒子系に関する部分だけしか公表されていない (Ya. G. Sinai [1])†)．

---

†) 久保 [1] に，Sinai のこの論文の不完全さを補った日本語による解説がある．また，久保 [2] は，より広いクラスのポテンシャルに対して同様の問題を扱っている．

付録2　Lie 群上の左不変計量による測地線と理想流体の流体力学

剛体の Euler 運動は，3次元 Euclid 空間の回転群上に左不変 Riemann 計量を与えたときの測地線に沿った運動として記述することができる．Euler の理論のかなりの部分はこの不変性にだけ関わっており，それ故他の群の場合にも移し変えられる．

このように一般化された Euler 理論に含まれる例には，高次元空間での剛体の運動や，また特に興味あるものとして，理想流体(非圧縮，非粘性流体)の流体力学がある．後者の場合，群は流域の微分同相で体積要素を保つものの作る群である．この例での最小作用の原理は，流体の運動が運動エネルギーで与えられる計量による測地線によって記述されることを意味している(なんなら，この原理を理想流体の数学的定義としてもよい)．この計量が(右)不変であることは見易い．

もちろん，有限次元 Lie 群で得られた結果を無限次元の場合に拡張するのは慎重にしなければならない．たとえば，3次元流体力学では，これまでのところ運動方程式の解の存在と一意性定理は得られていない．

それでも，有限次元 Lie 群上の測地線の性質を，無限次元の場合に形式的に引き移すとどんな結論が得られるか，を考えることは興味あることである．これらの結論は，解に合理的解釈を与えるとき常に満足していなければならない，アプリオリな命題(恒等式，不等式など)の性格を帯びたものになる．こうして得られた結論に，無限次元の解析に訴えない直接の厳密な基礎づけが得られている場合もある．

たとえば，剛体の運動の Euler 方程式には，流体力学における理想流体の運動の Euler 方程式という類似がある．慣性楕円体の長軸と短軸の回りの回転の安定性に関する Euler の定理には，流体力学において，速度のプロフィルが変曲点をもたないような流れの安定性に関する Rayleigh の定理を僅かに一般化したものが対応している．

Euler の公式から，片側不変な計量をもつ群の Riemann 曲率を表わす式が

容易に得られる．流体力学の場合に応用すれば，体積要素を不変にする微分同相の作る群の曲率が求められる．

面白いことに，十分によい断面に対しては曲率は有限になり，多くの場合に負になるのである．

曲率が負であると，測地線の指数不安定性が起こる(付録1参照)．今の場合，測地線とは理想流体の流れである．したがって，微分同相群の曲率の計算から，理想流体の流れの不安定性に関する何らかの情報を得ることができる．

具体的には，曲率は特性行程(それだけ行くと初期条件のずれが e 倍になる行程)を定める．曲率が負であると，流れの予測は実際上不可能である．つまり，特性行程のほんの数倍の行程で，理論上のものとの状態のずれが 100 倍にも増大する．

この付録では，片側不変な計量をもつ群上の測地線に関する計算結果を手短に述べる．証明や詳細については次に挙げる文献を見よ．V. I. Arnold [5], [6], [9], [13], L. A. Dikii [1], D. G. Ebin-J. Marsden [1], O. A. Ladyzhenskaya [1], A. S. Mishchenko [1], A. M. Obukhov [1], L. D. Fadeev [1], J. Marsden [1].

A. 記号．随伴表現と共役随伴表現 G を実 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環，つまり，群 G の単位元での接空間であって交換子演算 [,] をもつものとする．

Lie 群はそれ自身の上に，左，右移動によって作用している．つまり，群 G の各元 g に対し，群 G の微分同相

$$L_g : G \longrightarrow G, \qquad L_g h = gh; \qquad R_g : G \longrightarrow G, \qquad R_g h = hg$$

が定義される．G の各元 h に対して，接空間に誘導される写像を

$$L_{g*} : TG_h \longrightarrow TG_{gh}; \qquad R_{g*} : TG_h \longrightarrow TG_{hg}$$

と表わす．

微分同相 $R_{g^{-1}}L_g$ は群の内部自己同型であって，群の単位元を動かさない．これの単位元での微分は，Lie 環 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像である．この写像を

$$\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{Ad}_g = (R_{g^{-1}}L_g)_{*e}$$

と表わし，群 G の**随伴**(adjoint)**表現**と呼ぶ．

容易に示すことができるが，Ad_g は Lie 環の準同型である．つまり

$$\mathrm{Ad}_g[\xi, \eta] = [\mathrm{Ad}_g\xi, \mathrm{Ad}_g\eta], \qquad \xi, \eta \in \mathfrak{g}$$

である．また，$\mathrm{Ad}_{gh}=\mathrm{Ad}_g\mathrm{Ad}_h$ も明らかである．

さらに，Ad を群 G から，環 $\mathfrak{g}$ 上の線形作用素の空間への写像，つまり $\mathrm{Ad}(g)=\mathrm{Ad}_g$ と考えよう．

写像 Ad は微分可能である．群 G の単位元での Ad の微分を考えよう．これは $\mathfrak{g}$ から，$\mathfrak{g}$ 上の線形作用素の空間への線形写像である．この写像を ad と表わし，$\xi\in\mathfrak{g}$ に働かせた像を ad_ξ と表わす．こうして，ad_ξ は Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己準同型であり，

$$\mathrm{ad}=\mathrm{Ad}_{*e}:\mathfrak{g}\longrightarrow \mathrm{End}\,\mathfrak{g},\qquad \mathrm{ad}_\xi=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}_{e^{t\xi}}$$

である．ここで，$e^{t\xi}$ は接ベクトル ξ をもつ 1-パラメーター群である．以上の公式から，Lie 環の言葉だけでの ad の表示

$$\mathrm{ad}_\xi\eta=[\xi,\eta]$$

が容易に得られる．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の共役線形空間 $\mathfrak{g}^*$ を考えよう．これは $\mathfrak{g}$ 上の実線形関数の空間である．いい換えると，$\mathfrak{g}^*$ は群 G の単位元での余接空間 $\mathfrak{g}^*=T^*G_e$ である．

或る点 g での G の余接空間の元 ξ の，同じ点 g での接空間の元 η での値を丸括弧で表わそう：

$$(\xi,\eta)\in\mathbf{R},\qquad \xi\in T^*G_g,\quad \eta\in TG_g.$$

左，右移動は余接空間に L_{g*}, R_{g*} に共役な作用素を引き起こす．これらを

$$L_g{}^*:T^*G_{gh}\longrightarrow T^*G_h,\qquad R_g{}^*:T^*G_{hg}\longrightarrow T^*G_h,\qquad h\in G$$

と表わそう．これらの作用素は，等式

$$(L_g{}^*\xi,\eta)=(\xi,L_{g*}\eta),\qquad (R_g{}^*\xi,\eta)=(\xi,R_{g*}\eta)$$

で定義される．作用素 Ad_g の共役作用素は $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}^*$ に写す．これは

$$\mathrm{Ad}_g{}^*:\mathfrak{g}^*\longrightarrow\mathfrak{g}^*$$

と表わされ，等式

$$(\mathrm{Ad}_g{}^*\xi,\eta)=(\xi,\mathrm{Ad}_g\eta)$$

で定義される．

g が Lie 群 G を動くとき，作用素 $\mathrm{Ad}_g{}^*$ は G の表現をなす．つまり次式を満足する．

$$\mathrm{Ad}_{gh}{}^*=\mathrm{Ad}_h{}^*\mathrm{Ad}_g{}^*.$$

この表現は**群の共役随伴**[†]**表現**と呼ばれ，群上の(左)不変計量に関連するあらゆる問題において重要な役割を果たす．

作用素 $\mathrm{Ad}_g{}^*$ の g に関する微分を G の単位元で考えよう．この微分は Lie 環 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}^*$ 上の線形作用素の空間への線形写像である．この線形写像を ad^* と書き，$\mathfrak{g}$ の元 ξ に働かせた像を $\mathrm{ad}_\xi{}^*$ と書く．こうして，$\mathrm{ad}_\xi{}^*$ は $\mathfrak{g}^*$ 上の線形作用素

$$\mathrm{ad}_\xi{}^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

である．作用素 $\mathrm{ad}_\xi{}^*$ が ad_ξ と共役であること

$$(\mathrm{ad}_\xi{}^*\eta, \zeta) = (\eta, \mathrm{ad}_\xi\zeta), \qquad \eta \in \mathfrak{g}^*, \ \zeta \in \mathfrak{g}$$

は容易に示される．ad^* の作用を中括弧で表わすこと

$$\mathrm{ad}_\xi{}^*\eta = \{\xi, \eta\}, \qquad \xi \in \mathfrak{g}, \ \eta \in \mathfrak{g}^*$$

は便利なことがある．こうして，中括弧は $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$ から $\mathfrak{g}^*$ への双線形写像で，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の交換子と次の関係式で結びついている．

$$(\{\xi, \eta\}, \zeta) = (\eta, [\xi, \zeta]).$$

$\mathfrak{g}^*$ での，群 G の共役随伴表現の軌道を考えよう．このような各軌道上には自然なシンプレクティック構造がある．(これは Kirillov 形式と呼ばれ，A. A. Kirillov が巾零 Lie 群の表現を研究する際初めて使ったものである.) このように，共役随伴表現の軌道は常に偶数次元である．種々の Lie 群とそのすべての軌道を考えれば，シンプレクティック多様体の一連の例が得られることも注意しておこう．

共役随伴表現の軌道上のシンプレクティック構造は次のようにして定義される．x を $\mathfrak{g}^*$ の点とし，ξ を点 x の軌道に x で接するベクトルとする．$\mathfrak{g}^*$ は線形空間だから，点 x での $\mathfrak{g}^*$ の接空間に属するベクトル ξ はまさしく $\mathfrak{g}^*$ のベクトルと考えることができる．

ベクトル ξ は(多くの仕方で)，速度ベクトル $a\in\mathfrak{g}$ をもつ 1-パラメーター群 e^{at} の共役随伴表現による点 x の運動の速度ベクトルとして表わすことができる．いい換えれば，G の共役随伴表現による点 x の軌道に接する各ベクトル ξ は，$\mathfrak{g}$ の適当な元 a によって次式で表わされる．

---

†) coadjoint の訳．“余随伴”と訳すこともある．

$$\xi = \{a, x\}, \quad a \in \mathfrak{g}, \ \ x \in \mathfrak{g}^*.$$

今や，点 x でその軌道に接するベクトルの対 ξ_1, ξ_2 に対してシンプレクティック 2-形式 Ω の値を定めることができる．すなわち，ξ_1, ξ_2 を上式によって $\mathfrak{g}$ の元 a_1, a_2 で表わし，次にこの $\mathfrak{g}$ の 2 元 a_1, a_2 と $\mathfrak{g}^*$ の元 x とからスカラー

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = (x, [a_1, a_2]), \quad x \in \mathfrak{g}^*, \ \ a_i \in \mathfrak{g}$$

を作る．次の 1)-3) は容易に示される．1) 双線形形式 Ω の定義は適切である．つまり，Ω の値は a_i のとり方の任意性によらない．2) 形式 Ω は歪対称であり，したがって軌道上の 2 次微分形式を与える．3) 形式 Ω は非退化で，閉である (証明は付録 5 にある)．

こうして，形式 Ω は共役随伴表現の軌道の上のシンプレクティック構造である．

B. 左不変計量　Lie 群 G 上の Riemann 計量が**左不変**であるとは，それがすべての左移動 L_g で保たれるとき，すなわち左移動の微分が各ベクトルを同じ長さのベクトルに写すときをいう．

左不変 Riemann 計量は群の 1 点，たとえば単位元で与えれば十分である．そのとき，残りの点での計量は左移動によって移すことができる．こうして，群上の左不変 Riemann 計量は Lie 環上の Euclid 構造と同じだけある．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の Euclid 構造は，$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}^*$ への対称で正定値な作用素によって定まる．$A: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ を対称で正定値な線形作用素としよう：

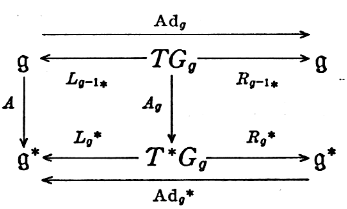
$$(A\xi, \eta) = (A\eta, \xi), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

(A の正定値性は余り本質的ではないが，力学的な応用では，2 次形式 $(A\xi, \xi)$ は正定値である.)

対称作用素 $A_g: TG_g \to T^*G_g$ を左移動によって

$$A_g \xi = L_{g^{-1}}{}^* A L_{g^{-1}*} \xi$$

と定義する．こうして，線形作用素の可換図式



が得られる．作用素 A_g で定まるスカラー積を角括弧

$$\langle\xi,\eta\rangle_g=(A_g\xi,\eta)=(A_g\eta,\xi)=\langle\eta,\xi\rangle_g$$

で表わす．このスカラー積は群 G 上に左移動に関して不変な Riemann 計量を与える．

$\mathfrak{g}$ でのスカラー積を単に $\langle\ ,\ \rangle$ で表わす．演算 $B:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を式

$$\langle[a,b],c\rangle\equiv\langle B(c,a),b\rangle,\qquad \forall b\in\mathfrak{g}$$

によって定義する．明らかに演算 B は双線形であり，最初の変数を固定すれば残りの変数に関して歪対称である：

$$\langle B(c,a),b\rangle+\langle B(c,b),a\rangle=0.$$

C. 例　$G=SO(3)$ を3次元 Euclid 空間の回転群，つまり1点を固定した剛体の配位空間とする．このとき剛体の運動は，G 上の曲線 $g=g(t)$ で記述される．群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は，あらゆる回転の角速度の作る3次元空間である．$\mathfrak{g}$ での交換子は，通常のベクトル積である．

剛体の回転速度 $\dot{g}$ は，点 g での G の接ベクトルである．角速度を得るには，このベクトルを単位元での接空間，すなわち $\mathfrak{g}$ へ移す必要がある．しかしそれには2つの方法，つまり，左移動と右移動がある．この結果，$\mathfrak{g}$ の2つの異なるベクトル

$$\omega_c=L_{g^{-1}*}\dot{g}\in\mathfrak{g}\quad と\quad \omega_s=R_{g^{-1}*}\dot{g}\in\mathfrak{g}$$

が得られる．この2つのベクトルは，《物体(corpus)での角速度》と《空間(space)での角速度》に他ならない．

実際，群 G の元 g は或る初期状態(群の単位元に対応し，任意に選ぶことができる)から，運動 g によって得られる物体の位置に対応している．ω を $\mathfrak{g}$ の元とせよ．

角速度 ω をもつ回転の1-パラメーター群を $e^{\omega t}$ と書こう．ω はこの1-パラメーター群に単位元で接している．ここで，変換 g に短時間 τ だけ角速度 ω の回転を続けて得られる変換

$$e^{\omega\tau}g\qquad (ここで,\ g=g(t)\in G,\ \omega\in\mathfrak{g},\ \tau\ll 1)$$

を考えよう．ベクトル $\dot{g}$ がベクトル

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}e^{\omega\tau}g$$

と一致すれば，ω を**空間での角速度**と呼び，ω_s と書く．したがって，ω_s は $\dot{g}$ から右移動で得られる．同様にして，物体での角速度はベクトル $\dot{g}$ を左移動したものであるこ

とが示される.

この例では, $\mathfrak{g}$ の共役空間 $\mathfrak{g}^*$ は角運動量の空間である.

物体の運動エネルギーは物体での角速度ベクトルで定まり, 空間での物体の位置にはよらない. したがって, 運動エネルギーは G 上の**左不変**な Riemann 計量を与えている. この計量を与える対称な正定値作用素 $A_g: TG_g \to T^*G_g$ を**慣性作用素**(または慣性テンソル)と呼び, これは運動エネルギーと, 式

$$T = \frac{1}{2}\langle \dot{g}, \dot{g}\rangle_g = \frac{1}{2}\langle \omega_c, \omega_c\rangle = \frac{1}{2}(A\omega_c, \omega_c) = \frac{1}{2}(A_g\dot{g}, \dot{g})$$

によって結びついている. ここで, $A: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ は $g=e$ での A_g の値である.

ベクトル $\dot{g}$ の慣性作用素 A_g による像を**角運動量**と呼び, $M=A_g\dot{g}$ と書く.

ベクトル M は点 g での G の余接空間 T^*G_g に属するが, 左移動でも右移動でも, $\mathfrak{g}^*=T^*G_e$ に移すことができ, 2つのベクトル

$$M_c = L_g{}^*M \in \mathfrak{g}^*, \qquad M_s = R_g{}^*M \in \mathfrak{g}^*$$

が得られる.

$\mathfrak{g}^*$ のこの2つのベクトルは, 物体での角運動量 M_c と, 空間での角運動量 M_s に他ならない. 後者は運動エネルギーを角運動量と角速度で表わす式

$$T = \frac{1}{2}(M_c, \omega_c) = \frac{1}{2}(M, \dot{g})$$

から容易に導かれる.

最小作用の原理によれば, 慣性による(つまり外力のないときの)剛体の運動は, 上述の左不変計量での回転群上の測地線である.

ここで, 任意の Lie 群 G 上の任意の左不変 Riemann 計量による測地線を, 配位空間が G である《一般化された剛体》の運動と考えよう. このような《G-剛体》はその運動エネルギー, つまり Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の正定値2次形式によって定まる. 正確には, $\mathfrak{g}$ 上の2次形式 $\langle \omega, \omega\rangle$ によって与えられる G 上の左不変計量による測地線を, G-剛体の運動エネルギー $\langle \omega, \omega\rangle/2$ をもつ運動と考えることにしよう.

この一般化された剛体の運動 $t \mapsto g(t)$ それぞれに, 4つの曲線

$$t \longmapsto \omega_c(t) \in \mathfrak{g}, \qquad t \longmapsto \omega_s(t) \in \mathfrak{g},$$
$$t \longmapsto M_c(t) \in \mathfrak{g}^*, \qquad t \longmapsto M_s(t) \in \mathfrak{g}^*$$

を対応させることができる．これらは，物体でと空間での，角速度ベクトルと角運動量ベクトルの運動と呼ばれる．

これらの曲線が従う微分方程式は，通常の剛体に対しては Euler によって発見された．しかしながら，それは任意の Lie 群というもっとも一般な場合にも正しく，一般化された剛体に対する Euler 方程式と呼ばれる．

注意　通常の剛体の理論では，異なる6つの3次元空間 $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^{3*}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$, TG_g, T^*G_g はみな同一視されている．物体が運動する空間 $\mathbf{R}^3$ の次元と，その回転群の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の次元が等しいのは，3次元であることからくる偶然の事情であって，n 次元の場合には $\mathfrak{g}$ は $n(n-1)/2$ 次元である．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその共役空間 $\mathfrak{g}^*$ を同一視することには，もっと深い基盤がある．それは，回転群上には両側不変な Riemann 計量が(定数倍を除いてただ1つ)存在することである．この計量は線形空間 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ (また TG_g と T^*G_g) との同型を与えている．したがって，角速度と角運動量のベクトルは同じ Euclid 空間に属すると考えることができる．この同一視の結果，演算 $\{\ ,\ \}$ は Lie 環の交換子に負の符号をつけたものになる．

両側不変な計量は任意のコンパクト Lie 群 G 上に存在するので，その G-剛体の運動の研究には，角速度の空間と角運動量の空間を同一視することができる．しかしながら，主として微分同相の群という非コンパクトな(無限次元でさえある)場合にも適用するために，この同一視はしないことにする．

D. Euler 方程式　($G=SO(3)$ なる特別の場合に得られた) Euler の結果は，一般化された G-剛体の角速度ベクトルと角運動量ベクトルの運動に対して次の定理の形に定式化することができる．

定理1　空間での角運動量ベクトルは運動の間不変である：

$$\frac{dM_s}{dt}=0.$$

定理2　物体での角運動量ベクトルは，次の Euler 方程式を満たす．

$$\frac{dM_c}{dt}=\{\omega_c, M_c\}.$$

——

G-剛体に対するこれらの定理の証明も，通常の剛体の場合と同じである．

注意1　物体での角速度ベクトル ω_c は，慣性作用素の逆作用素を使えば，

物体での角運動量ベクトル M_c によって線形に表わされる：$\omega_c=A^{-1}M_c$. したがって，Euler 方程式は物体での角運動量ベクトルだけに関する方程式と考えられ，その右辺は M_c について2次である．

この結果を次のようにも表わすことができる．この剛体の相流を考えよう．(この相空間 T^*G は，群 G または角運動量の空間 $\mathfrak{g}^*$ の次元 n の2倍の次元をもつ.)　このとき，$2n$ 次元多様体 T^*G でのこの相流は，n 次元線形空間 $\mathfrak{g}^*$ 上に Euler 方程式で与えられる流れへ**分解**される．

多様体 X 上の相流 g^t の多様体 Y 上の相流 f^t への**分解**とは，多様体 X から Y 上への滑らかな写像 π であって，運動 g^t を運動 f^t へ移すもの，つまり，次の図式が可換なもののことである．

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g^t} & X \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ Y & \xrightarrow{f^t} & Y \end{array} \qquad \text{つまり，} \pi g^t = f^t\pi.$$

われわれの場合，$X=T^*G$ (剛体の相空間)で，$Y=\mathfrak{g}^*$ (角運動量の空間)である．射影 $\pi: T^*G\to\mathfrak{g}^*$ は左移動によって定義される(つまり，$M\in T^*G_g$ に対しては，$\pi M= L_g{}^*M$ である)．さらに，g^t は $2n$ 次元空間 T^*G での考えている物体の相流で，f^t は角運動量の n 次元空間 $\mathfrak{g}^*$ での Euler 方程式による相流である．

いい換えれば，物体での角運動量ベクトル M_c の運動は，ベクトル M_c の初期状態のみにより，空間での物体の位置にはよらない．

注意2　空間での角運動量ベクトル M_s の保存法則は，空間 $\mathfrak{g}^*$ の任意の座標系に対してベクトル M_s の成分が保存される，といい表わすことができる．こうして，剛体の運動方程式の第1積分の集合が得られる．とくに，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の各元には空間 $\mathfrak{g}^*$ 上の線形関数が，したがって第1積分が対応している．簡単な計算で分るように，$\mathfrak{g}^*$ の関数によって与えられる第1積分の Poisson 括弧はまた $\mathfrak{g}^*$ 上の関数で与えられる．こうして，$\mathfrak{g}^*$ 上のあらゆる関数からなる，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の(無限次元の)拡大が得られる．$\mathfrak{g}$ 自身は，この拡大の中に，$\mathfrak{g}^*$ 上の線形関数の作る Lie 環として含まれている．もちろん，$2n$ 次元空間 T^*G での相流のこれらの第1積分全体の中で，関数的に独立なのは n 個だけである．n 個の独立な積分としては，たとえば，$\mathfrak{g}$ の基底をなしている $\mathfrak{g}^*$ 上の n 個の線形関数をとることができる．

無限次元への応用を考えているので，第1積分についての主張を，座標を使

わない，不変な形で定式化したい．これは可能で，定理1を次のように定式化し直せばよい．

定理3 Lie 群 G の Lie 環の共役空間 $\mathfrak{g}^*$ における共役随伴表現の軌道は，Euler 方程式で与えられる $\mathfrak{g}^*$ 上の流れに対する不変多様体である．

証明 $M_c(t)$ は $M_s(t)$ に共役随伴表現を働かせて得られるが，$M_s(t)$ は不変である．▮

例 通常の剛体の場合，角運動量の空間での群の共役随伴表現の軌道は，球面 $M_1^2+M_2^2+M_3^2=\text{const}$ である．この場合，定理3は角運動量の大きさの保存法則になる．つまり，始点 M_c が或る軌道(今の場合，球面 $M^2=\text{const}$)上にあれば，Euler 方程式によるこの点の軌跡は同じ軌道の上にある．

さて，任意の群 G という一般の場合に戻り，共役随伴表現の軌道がシンプレクティック構造をもつことを思い出そう(A 項参照)．さらに，物体の運動エネルギー T は物体での角運動量で表わすことができ，角運動量の空間 $\mathfrak{g}^*$ の上の2次形式

$$T=\frac{1}{2}(M_c, A^{-1}M_c)$$

が得られる．共役随伴表現の軌道 V を1つ固定しよう．運動エネルギーを，V 上の関数

$$H: V\longrightarrow \mathbf{R}, \qquad H(M_c)=\frac{1}{2}(M_c, A^{-1}M_c)$$

と考えよう．

定理4 共役随伴表現の各軌道 V 上の Euler 方程式は，Hamilton 関数 H をもつ Hamilton 方程式である．

証明 点 M での V の各接ベクトル ξ は $\xi=\{f, M\}$, $f\in\mathfrak{g}$ の形をしている．とくに，Euler 方程式の右辺のベクトル場 X も $X=\{dT, M\}$ の形に書かれる．(ここで，線形空間 $\mathfrak{g}^*$ の点 M での関数 T の微分は $\mathfrak{g}^*$ の共役空間のベクトル，つまり Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元と考えている．) シンプレクティック構造 Ω と演算{ , }の定義(A 項参照)によって，点 M での V の接ベクトル ξ に対して

$$\Omega(\xi, X)=(M, [f, dT])=(dT, \{f, M\})=(dH, \xi)$$

となる．▮

Euler 方程式は，慣性作用素の逆作用素によって，$\mathfrak{g}^*$ から $\mathfrak{g}$ に移すことが

できる．この結果から，Euler 方程式の演算 B (p. 319 参照)による定式化が得られる．

定理 5　剛体での角速度ベクトル ω_c の運動は，ω_c の初期値で決まり，剛体の初期位置にはよらない．ω_c は方程式

$$\dot{\omega}_c = B(\omega_c, \omega_c)$$

を満たす．右辺は 2 次形式である．——

この方程式を角速度に対する Euler 方程式と呼ぼう．注意すると，共役随伴表現の軌道は作用素 $A^{-1}: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ によって，角速度に対する Euler 方程式の不変多様体に移される．この多様体はシンプレクティック構造などをもつ．しかし，$\mathfrak{g}^*$ での軌道とは異なり，これらの不変多様体は Lie 群 G だけでは定まらず，剛体のとり方(すなわち慣性作用素のとり方)にも依存する．

エネルギーの保存法則によって次の定理が得られる．

定理 6　(角運動量と角速度に対する) Euler 方程式は 2 次の第 1 積分をもち，その値は運動エネルギー T である：

$$T = \frac{1}{2}(M_c, A^{-1}M_c) = \frac{1}{2}(A\omega_c, \omega_c).$$

E. 定常回転とその安定性　剛体の**定常回転**とは，物体の角速度が一定であるような回転のことである．(ここで，物体での角速度と空間での角速度のどちらでもよい．一方から他方が出ることは容易．) $\mathbf{R}^3$ での通常の剛体の理論から，定常回転は慣性楕円体の主軸の回りの回転であることを知っている．任意の Lie 群 G に対する G-剛体の場合に，この定理の一般化が以下で定式化される．定常回転は，左不変計量の測地線で，1-パラメーター部分群となるものであることに注意しよう．

次のことも注意しよう．慣性楕円体の主軸の方向は，一定の長さの角運動量ベクトルのなす球面の上で運動エネルギーの停留点を考え，決めることができる．

定理 7　定常回転の物体での角運動量 M_c (または角速度 ω_c)は，共役随伴表現の軌道(または作用素 A^{-1} による軌道の像)の上でのエネルギー関数の臨界点である．逆に，軌道の上でのエネルギーの臨界点はすべて定常回転を定める．——

証明は，直接計算か，または定理4を使う．

角運動量の空間を共役随伴表現の軌道に分解すると，もっとも簡単な通常の剛体の場合には，3次元空間が原点 O と O を中心とする球面とに分解されるが，群が一般の場合には，このように簡単ではない．とくに，軌道の次元が異なることも，与えられた点の近傍で軌道への分解が葉層構造をもたないことも起こり得る．このような特異性は，すでに3次元の場合に原点 O で起こっている．

角運動量の空間の，点 M の近傍の軌道への分解が，Euclid 空間の平行な平面への分解に微分同相であるとき，点 M を**正則点**と呼ぶ(このとき，点 M に近いすべての軌道は同じ次元をもつ)．たとえば，3次元空間の回転群に対しては，角運動量の空間の原点以外のすべての点は正則である．

定理8 角運動量の空間の正則点 M が，共役随伴表現の軌道上でのエネルギーの臨界点であって，この点でのエネルギーの2階微分 d^2H が定値2次形式であるとせよ．このとき，点 M は Euler 方程式の(Liapunov の意味で)安定な平衡点である．——

証明は次のことによる．点 M の近くの軌道上も正則であることから，点 M はエネルギーの条件付き最大か最小である．

定理9 運動エネルギーの2階微分を，共役随伴表現の軌道の Lie 環 $\mathfrak{g}$ での像へ制限したものは，点 $\omega\in\mathfrak{g}$ において式

$$2\,d^2H|_\omega(\xi) = \langle B(\omega,f),B(\omega,f)\rangle+\langle[f,\omega],B(\omega,f)\rangle$$

で与えられる．ここで，ξ は上述の像への接ベクトルであり，

$$\xi = B(\omega,f),\qquad f\in\mathfrak{g}$$

で表わされる．

F. 左不変計量をもつ群の Riemann 曲率 G を左不変計量をもつ Lie 群とする．この計量を与える Lie 環 $\mathfrak{g}$ のスカラー積を $\langle\ ,\ \rangle$ とする．G のどの点での Riemann 曲率も単位元での曲率で決まる(というのは，左移動が G の等距離変換だから)．したがって，曲率は $\mathfrak{g}$ の中の2次元平面に対して計算すれば十分である．

定理10 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の直交する単位ベクトルの対 ξ,η によって定まる断面曲率は，式

$$K_{\xi,\eta}=\langle\delta,\delta\rangle+2\langle\alpha,\beta\rangle-3\langle\alpha,\alpha\rangle-4\langle B_\xi,B_\eta\rangle$$

で与えられる．ここで，$2\delta=B(\xi,\eta)+B(\eta,\xi)$，$2\beta=B(\xi,\eta)-B(\eta,\xi)$，$2\alpha=[\xi,\eta]$，$2B_\xi=B(\xi,\xi)$，$2B_\eta=B(\eta,\eta)$ である．また，B は B 項 (p. 319) で定義した演算である．——

証明は，面倒だが直接の計算でできる．これは，共変微分に対して容易に確かめられる式

$$(\nabla_\xi\eta)_e=\frac{1}{2}([\xi,\eta]-B(\xi,\eta)-B(\eta,\xi))$$

に基づいている．ここで，ξ と η は左辺では左不変ベクトル場であり，右辺ではその単位元での値である．

注意1　とくに両側不変な計量の場合には，曲率公式は簡単な形

$$K_{\xi,\eta}=\frac{1}{4}\langle[\xi,\eta],[\xi,\eta]\rangle$$

になる．

注意2　右不変な Riemann 計量をもつ群の曲率公式も左不変の場合と同じである．実際，群上の右不変計量は，積の法則を入れ換えた群 $(g_1*g_2=g_2g_1)$ 上の左不変計量である．群の積を入れ換えると，Lie 環での交換子と演算 B の符号は同時に変わる．しかしながら，曲率公式の各項は符号の変わる2つの演算の積である．したがって，曲率公式は右不変計量の場合でも同じである．

Euler 方程式は右不変の場合には右辺の符号が変わる．

G.　微分同相群への応用　D を或る Riemann 多様体上の有界領域とする．領域 D の微分同相 g で，体積要素を保つものの作る群を考えよう．この群を S Diff D と書こう．

群 S Diff D に対応する Lie 環は，D 上の発散 0 のベクトル場 v で，(D に境界があるとき) 境界に接するものの全体である．この Lie 環の2元 (つまり2つのベクトル場) のスカラー積を

$$\langle v_1,v_2\rangle=\int_D(v_1\cdot v_2)\,dx$$

と定義する．ここで，(·) は D 上の Riemann 計量を与えるスカラー積であり，dx はその体積要素である．

さて，領域 D における等質な理想(非圧縮，非粘性)流体の流れを考えよう．このような流れは，群 S Diff D 上の曲線 $t \mapsto g_t$ で記述される．つまり，微分同相 g_t は流体の各粒子を，時刻0にいた場所から，時刻 t にいる場所へ移す写像である．

運動する流体の運動エネルギーは，微分同相群 S Diff D の**右不変** Riemann 計量であることが分る．

実際，流体を時間 t だけ流すことが微分同相 g_t によって実現され，この時刻での速度がベクトル場 v で与えられているとしよう．このとき，時間 $t+\tau$ (τ は小さい)だけの流れを実現する微分同相は，τ に比べて小さい量を除けば $e^{v\tau}g_t$ である．(ここで，$e^{v\tau}$ は速度ベクトル場 v をもつ1-パラメーター群，つまり，場 v で与えられる微分方程式の相流である.)

したがって，速度の場 v は点 g での群の接ベクトル $\dot{g}$ から**右**移動で得られる．これによって，

$$T=\frac{1}{2}\langle v, v\rangle$$

と定義される運動エネルギーの右不変性が分る(流体の密度は1としている).

最小作用の原理(これが数学的には理想流体の定義だが)は，理想流体の流れが微分同相群上の上述の右不変計量での測地線であることをいうものである．

厳密には，微分同相群は無限次元であり多様体ではない．それで，上の定義を厳密に定式化するには幾らか補わねばならない．つまり，適当な関数空間をとり出したり，解の存在と一意性定理を証明したりする必要がある．これまでのところ，これらは流域 D が2次元の場合にしか成功していない．けれども，無限次元であることに関連したこれらの困難が存在しないものとして扱うことにしよう．このように，以下の議論は発見的である．とはいえ，多くの結果は無限次元多様体論によらず，厳密に基礎づけることができる．

さて，これまでの公式が $G=$ S Diff D の場合にはどのようになるかを見よう．ここで，D は3次元 Riemann 多様体の連結領域で，有限の体積をもつものとする．このため，まず B 項において等式

$$\langle [a, b], c\rangle \equiv \langle B(c, a), b\rangle$$

によって定義した双線形写像 $B: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を書きくだす必要がある．

容易に確かめられるが，3次元の場合，ベクトル場 $B(c, a)$ は考えている Lie 環に属するベクトル場 a, c によって，

$$B(c, a) = (\mathrm{rot}\, c) \wedge a + \mathrm{grad}\, \alpha$$

で表わされる．ここで，$\wedge$ はベクトル積を表わし，α は D で1価の関数であり，条件 $B \in \mathfrak{g}$ (つまり，$\mathrm{div}\, B = 0$ と，B が D の境界に接するという条件)から，(定数の差を除いて)一意的に定まる．

演算 B は向きづけのとり方にはよらない．というのは，向きを変えると，ベクトル積と rot は共に符号を変えるからである．

H. 定常流　$G = \mathrm{S\,Diff}\, D$ の場合の《角速度》の Euler 方程式は

$$\dot{v} = -B(v, v)$$

の形になる．というのは，計量が右不変だから．したがって，3次元空間の微分同相群の場合には，これは《Bernoulli の運動方程式》

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v \wedge \mathrm{rot}\, v + \mathrm{grad}\, \alpha, \qquad \mathrm{div}\, v = 0$$

の形になる．角運動量に対する Euler 方程式は《渦動方程式》

$$\frac{\partial\, \mathrm{rot}\, v}{\partial t} = [v, \mathrm{rot}\, v]$$

の形に書ける．とくに定常流の回転(rotation)場は速度場と可換である．

この注意によって，3次元空間の理想流体の定常流の位相的な分類が直ちに得られる．

定理 11　コンパクトな領域 D が解析的曲面で囲まれており，D 上の速度場は解析的で，その回転場と至るところ共線的であることはないとする．このとき，流域 D は解析的集合によって有限個の胞体に分割され，各胞体上で流れは標準的なものとなる．つまり，胞体には，流れに関して不変なトーラスを葉とする葉層構造をもつか，あるいは円環 $\mathbf{R} \times S^1$ に微分同相な不変曲面を葉とするかの2つの型がある．この際，各トーラス上では，すべての流線が閉じているか，またはすべての流線が至るところ稠密であるかのいずれかであり，各円環上ではすべての流線は閉じている．——

この定理の証明は，《Bernoulli 面》，すなわち関数 α のレベル曲面の考察に基づいている．定常性の条件 ($v \wedge \mathrm{rot}\, v = -\mathrm{grad}\, \alpha$) によって，流線も渦線も Bernoulli 面に属することが分る．速度場と回転場は可換だから，閉 Bernoulli 面上には群 $\mathbf{R}^2$ が作用し，したがって，これはトーラスでなければならない

(§49 の Liouville の定理の証明と比較せよ). D の境界での境界条件を考慮して同様の考察をすれば, 閉じていない Bernoulli 面は閉じた流線をもつ円環からなることが分る.

注意 速度場の解析性は余り本質的ではないが, 速度場と回転場がどんな領域でも共線的でないことは重要である. M. Hénon は計算機実験によって次のことを示した. 式

$$v_x = A\sin z + C\cos y, \qquad v_y = B\sin x + A\cos z,$$
$$v_z = C\sin y + B\cos x$$

で与えられる3次元トーラス上の定常流に対して, 流線の挙動は定理11で述べたものより複雑である. この式はベクトル v と $\operatorname{rot} v$ が共線的になるように選んである. 計算結果から判断すると, 3次元の領域を稠密に満たす流線がある.

I. 等渦動場 2次元と3次元の流体力学は, 根本的に違ったものである. この差違の本質は共役随伴表現の軌道の幾何が2次元と3次元で異なることにある. つまり, 2次元では軌道は或る意味で閉じており, たとえば或る関数の(もっと正確には, 複数の, 実際無限個のことさえある関数の)レベル集合の族のようである. 3次元では軌道の構造はもっと複雑であって, 軌道が有界でないことや稠密であることさえある. 3次元 Riemann 多様体の微分同相群の共役随伴表現の軌道は次のように記述できる. v_1 と v_2 を領域 D 内の非圧縮性流体の速度ベクトル場とする. 体積要素を保つ微分同相 $g: D\to D$ が存在して, D の各閉路 γ を閉路 $g\gamma$ に移し, γ での場 v_1 の循環が $g\gamma$ での場 v_2 の循環に等しいとき, つまり

$$\oint_\gamma v_1 = \oint_{g\gamma} v_2$$

であるとき, 場 v_1 と v_2 は**等渦動**であるといおう. 容易に確かめられることだが, 共役随伴表現の軌道の(慣性作用素の逆作用素 A^{-1} による) Lie 環での像は, 与えられた場に等渦動な場の全体に他ならない.

とくに, このとき定理3は**循環の保存法則**の形をとる.

定理 12 理想流体の速度場の閉路での循環は, 閉路を流れによって動かしても変わらない. ——

D 内の3次元理想流体の速度場 v_1, v_2 が等渦動であれば，対応する微分同相は v_1 の回転を v_2 の回転に移すこと

$$g_* \operatorname{rot} v_1 = \operatorname{rot} v_2$$

に注意しよう．

その上，**流域 D が単連結ならば**，速度場 v_1, v_2 が等渦動であることをその回転場の同値性として定義できる．したがって，3次元での共役随伴表現の軌道についての問題は，発散0の**ベクトル場**を，体積要素を保つ微分同相による同値性で分類するものとなる．この問題は3次元では絶望的なほど困難である．

さて，2次元の場合を考える．まず，基本公式を2次元での考察に便利な形に書き直そう．

流域 D は2次元で向きづけられているとしよう．計量と向きづけから D 上のシンプレクティック構造が定まる．速度ベクトル場 v は発散0であり，したがって Hamilton 場である．したがって，場 v は Hamilton 関数(領域 D が単連結でなければ，一般に多価となる)によって与えられる．速度場の Hamilton 関数を，流体力学では**流れ関数**と呼び，ψ と書く．つまり，

$$v = I \operatorname{grad} \psi$$

である．ここで，I は《右回りに》90° 回転する作用素である．

2つの場の交換子の流れ関数は，もとの場の流れ関数のヤコビアン(または，Hamilton 形式での Poisson 括弧でもあるが)

$$\psi_{[v_1, v_2]} = J(\psi_1, \psi_2)$$

である．ベクトル場 $B(c, a)$ は2次元では，式

$$B(c, a) = -(\Delta\psi_c) \operatorname{grad} \psi_a + \operatorname{grad} \alpha$$

で与えられる．ここで，ψ_a と ψ_c はそれぞれ場 a と c の流れ関数であり，$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ は Laplace 作用素である．

Descartes 座標 x, y をもつ Euclid 平面という特別の場合には，流れ関数，交換子，Laplace 作用素に対する式は特別に簡単な形

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\psi_{[v_1, v_2]} = \frac{\partial \psi_{v_1}}{\partial x}\frac{\partial \psi_{v_2}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{v_1}}{\partial y}\frac{\partial \psi_{v_2}}{\partial x},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

になる．スカラー関数 r が 2 次元速度場 v の渦(または回転)であるとは，r と向きづけられた面積要素との積を D のどんな向きづけられた領域 σ で積分したものも，σ の境界での場 v の循環に等しい，すなわち

$$\int_\sigma r dS = \oint_{\partial\sigma} v$$

となるときにいう．流れ関数 ψ による渦関数 r の表示

$$r = -\Delta\psi$$

も容易に計算で求められる．

D が 2 次元で単連結な場合，場 v_1 と v_2 が等渦動であることは，単にその渦関数 r_1 と r_2 が面積要素を保つ微分同相によって互いに変換されるということになる．

このような性質をもつ 2 つの関数 r_1 と r_2 は，どんな場合にも同分布，つまり，あらゆる数 c に対して

$$\operatorname{mes}\{x \in D\,;\ r_1(x) \le c\} = \operatorname{mes}\{x \in D\,;\ r_2(x) \le c\}$$

である．したがって，2 つの場が共役随伴表現の 1 つの軌道の像に属するならば，一連の汎関数，たとえば渦関数の巾の積分は等しい：

$$\int_D {r_1}^k dS = \int_D {r_2}^k dS.$$

とくに，2 次元理想流体の運動の Euler 方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\nabla v = -\operatorname{grad} p, \qquad \operatorname{div} v = 0$$

は無限個の第 1 積分をもつ．たとえば，速度場の渦関数の巾の積分

$$I_k = \int\int_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^k dx \wedge dy$$

はそのような第 1 積分である．

つまり，このような第 1 積分が存在すること(これは，共役随伴表現の軌道が比較的簡単な構造をもっていることだが)によって，2 次元の理想流体(また粘性流体も)の流体力学においては存在や一意性などの定理を証明することができるが，3 次元では共役随伴表現の軌道の幾何が複雑だから(この軌道に関

する知識が不十分なせいかも知れないが)，3次元流体力学の基礎づけの問題は困難なのである．

J. 平面定常流の安定性　さて，微分同相群の場合に(上の定理 7, 8, 9 のような)定常回転に関する一般的な定理を定式化し直せば，以下の命題が得られる．

1. 理想流体の定常流は，それに等渦動な流れの集合における，運動エネルギーの条件づき極値点(または臨界点)になっている．

2. もしも，1) 上の臨界点が実際に極値点，つまり局所的に条件づき最大か最小であり，2) (一般的には満たされている)或る正則性の条件を満たし，3) 極値が非退化(2階微分が正または負定値)であれば，定常流は安定である(つまり，Liapunov の意味で安定な Euler 方程式の平衡点である)．

3. 与えられた場に等渦動な場の作る多様体を考える．その接空間上での運動エネルギーの2階微分は，2次元の場合次の形の式で与えられる．D を Descartes 座標 x, y をもつ Euclid 平面の領域とする．流れ関数 $\psi=\psi(x, y)$ をもつ定常流を考えよう．このとき，

$$2\,d^2H=\iint_D (\delta v)^2+\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi}(\delta r)^2 dxdy$$

となる．ここで，δv は速度場の変分(つまり上に述べた接空間のベクトル)であり，$\delta r=\mathrm{rot}\,\delta v$ である．

定常流に対しては，流れ関数 ψ と $\Delta\psi$ の勾配ベクトル，$\nabla\psi$ と $\nabla\Delta\psi$ は共線的であることに注意しよう．したがって，比 $\nabla\psi/\nabla\Delta\psi$ には意味がある．さらに，渦関数 r の勾配が 0 でない点の近傍では，流れ関数 ψ は r の関数である．

上の命題から，2次形式 d^2H が正または負定値であることが，考えている定常流が安定であるための十分条件であるという結論が得られる．この結論は定理 7, 8, 9 から形式的に得られるわけではない．というのは，そこでの式を無限次元の場合に適用するための合理化が必要だからである．

幸い，途中の過程を合理化しなくても，安定性に関する最終結論を証明することができる．つまり，次のアプリオリな評価(これはもとの速度場を少し摂動したときの定常流の安定性を表わしている)を厳密に証明できるのである．

定理 13　領域 D における定常流の流れ関数 $\psi=\psi(x, y)$ が，局所的にだけでなく大域的にも渦関数(すなわち $-\Delta\psi$)の関数であると仮定する．流れ関数

の渦関数による‘導関数’が，不等式

$$c \le \frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \le C \qquad (0<c\le C<\infty)$$

を満たしていると仮定する．$\psi+\varphi(x,y,t)$ を必ずしも定常でない別の流れの流れ関数とする．最初の時刻では，領域 D の境界の各成分に沿っての，(流れ関数 $\psi+\varphi$ をもつ)摂動された流れの速度場の循環が，(流れ関数 ψ をもつ)もとの流れの循環に等しいと仮定する．このとき，どんな時刻での摂動 $\varphi=\varphi(x,y,t)$ も，初期摂動 $\varphi_0=\varphi(x,y,0)$ によって，式

$$\iint_D (\nabla\varphi)^2+c(\Delta\varphi)^2 dxdy \le \iint_D (\nabla\varphi_0)^2+C(\Delta\varphi_0)^2 dxdy$$

で評価される．もし，定常流が不等式

$$c \le -\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi} \le C \qquad (0<c<C<\infty)$$

を満たすならば，摂動 φ は φ_0 により，式

$$\iint_D c(\Delta\varphi)^2-(\nabla\varphi)^2 dxdy \le \iint_D C(\Delta\varphi_0)^2-(\nabla\varphi_0)^2 dxdy$$

で評価される．——

この定理から，$\nabla\varphi$ に関する2次形式

$$\iint_D (\nabla\varphi)^2+\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi}(\Delta\varphi)^2 dxdy$$

が正定値のとき，定常流の安定性が得られる．(ここで，φ は領域 D の境界の各成分上一定な関数であり，$\nabla\varphi$ の境界の各成分を通る流量が0であるものである.) また，形式

$$\iint_D (\nabla\varphi)^2+\left(\max\frac{\nabla\psi}{\nabla\Delta\psi}\right)(\Delta\varphi)^2 dxdy$$

が負定値であるときも同様である．

例1 平面 (x,y) 上の帯状領域 $Y_1\le y\le Y_2$ で，速度プロフィル $v(y)$ をもつ平行流(つまり，速度場 $(v(y),0)$ をもつ流れ)を考えよう．このような流れはどんな速度プロフィル $v(y)$ に対しても定常である．流域をコンパクトにするために，考えるすべての流れの速度場が，座標 x に関して周期的で，周期が

X であるとする．

速度プロフィルが変曲点をもたない(つまり $d^2v/dy^2 \neq 0$) ならば，定理13の条件は満たされる．こうして，速度プロフィルが変曲点をもたないような理想流体の平面平行流は安定である，という結論が得られる．

線形化した問題での類似の命題は **Rayleigh の定理**と呼ばれる．

強調しておきたいが，定理13で問題となっているのは《線形近似》での安定性ではなく，厳密な意味での Liapunov 安定性(つまり，非線形問題での有限な摂動に関して)である．今の場合，この2つの安定性の相違は本質的であって，これは問題が Hamilton 的な性格をもっていることによる(定理4参照)．ところで，Hamilton 系では漸近安定にはなり得ないから，線形近似での安定性などは常に中立的で，非線形問題の平衡点の安定性に関する結論にとって不十分である†)．

例2　トーラス

$$\{(x, y)\ ;\ x \bmod X,\ y \bmod 2\pi\}$$

上の平面平行流で，x 軸に平行な速度場 $\boldsymbol{v}=(\sin y, 0)$ をもつものを考えよう．この場は流れ関数 $\psi=-\cos y$ によって定まり，渦関数 $r=-\cos y$ をもつ．速度プロフィルは2つの変曲点をもつが，流れ関数は渦関数の関数として表わされる．比 $\nabla\psi/\nabla\Delta\psi$ は -1 である．定理13を適用すると，x に関して周期 X で y に関して周期 2π のすべての関数 φ に対して，条件

$$\int_0^{2\pi}\int_0^X (\Delta\varphi)^2 dxdy \geq \int_0^{2\pi}\int_0^X (\nabla\varphi)^2 dxdy$$

が満たされるならば，この定常流は安定であることが分る．この不等式は，$X \leq 2\pi$ のとき満たされ，$X>2\pi$ のとき破れることは容易に計算できる††)．

こうして，sin 型の定常流は，流れの主要な方向での周期が流れの幅 2π よりも小さい狭いトーラスでは安定であることが定理13から分る．一方，($X>2\pi$ 程度に)広いトーラスにおいて，sin 型の定常流が不安定であることは，直接に証明することができる*)．——

こうして，この例では定理13の安定性の十分条件が必要条件でもあること

---

†)　線形近似で安定でも，もとの問題では不安定なことさえある．なお，§42，付録7, 8も参照のこと．

††)　部分積分と Schwarz の不等式だけで得られる．

*)　たとえば，L. D. Meshalkin と Ya. G. Sinai の論文[1]参照．

が分った.

注意すべきことだが，2次形式 d^2H が正定値でも負定値でもないといっても，一般には，対応する流れが不安定とは限らない．一般には，Hamilton 系の平衡点はハミルトニアンがこの点で最大や最小にならなくても安定になることがある．2次の Hamilton 関数 $H=p_1^2+q_1^2-p_2^2-q_2^2$ がこのようなもっとも簡単な例である†).

K. 微分同相群の Riemann 曲率 片側不変な計量をもつ Lie 群の曲率公式を F 項で与えたが，この公式は Riemann 領域 D の微分同相群 S Diff D に対しても意味がある．この群は領域 D を満たす理想流体に対する配位空間である．運動エネルギーは群 S Diff D 上に右不変計量を定めている．Lie 群の曲率公式をこの無限次元群に形式的に適用して得られる数を，群 S Diff D の曲率と呼ぶことは自然であろう．

以下では，微分同相群の曲率を，Euclid 計量をもつ2次元トーラス T^2 上の流れの場合にだけ計算することにする．トーラス T^2 は，Euclid 平面 $\mathbf{R}^2$ からその差が或る格子群($\mathbf{R}^2$ の離散部分群) Γ に属するような点を互いに同一視して得られる．このような格子群の例として，整数座標をもつ点全体 $\boldsymbol{Z}^2$ がある．一般に格子群 Γ を変えてもよければ，整数格子群 $\boldsymbol{Z}^2$ の基本領域である正方形はどんな平行4辺形にもおき換えられる．

さて，トーラス T^2 上の発散0のベクトル場で，流れ関数が1価であるものの作る Lie 環を考えよう．対応する群 $\mathrm{S_0}$ Diff T^2 は T^2 の重心を変えず面積要素を保つ微分同相の全体である．これは面積要素を保つ微分同相全体の作る群 S Diff T^2 に全測地的部分多様体*)として埋め込まれている．

証明は次の議論によっている．最初の時刻に，理想流体の速度場が1価の流れ関数をもっていれば，すべての時刻で流れ関数は1価である．これは運動量の保存法則から得られる．

さて，群 $\mathrm{S_0}$ Diff T^2 の単位元を通るあらゆる方向の断面曲率を調べよう．(このような方向での群 S Diff T^2 の断面曲率はそれらと一致する．というのは，部分多様体 $\mathrm{S_0}$ Diff T^2 は全測地的だからである.)

平面 $\mathbf{R}^2$ の向きづけを定めておく．このとき，群 $\mathrm{S_0}$ Diff T^2 の Lie 環の元は，

---

†) 付録8参照.

*) M の部分多様体 N が全測地的とは，N の測地線が M の測地線にもなっているときにいう.

T^2 上の平均 0 の実関数と考えることができる．（このような関数を流れ関数と考えれば，発散 0 のベクトル場が得られる．）したがって，群 $S_0 \operatorname{Diff} T^2$ の接平面の 2 次元方向は，T^2 上平均 0 の関数の対によって定まる．

このような関数をその Fourier 係数を与えることで定めよう．Fourier 級数の計算は複素領域でする方が便利である．平面 $\mathbf{R}^2$ 上の，点 x での値が $e^{i(k,x)}$ である関数を e_k と表わそう．（ここで，k は Euclid 平面 $\mathbf{R}^2$ の点であり，波動ベクトルと呼ばれる．）このような関数は，Γ-周期的，つまり変数 x に格子群 Γ のベクトルを加えても関数の値が変わらないならば，トーラス T^2 上の関数を定める．

いい換えれば，すべての $x \in \Gamma$ に対して，スカラー積 (k, x) は 2π の倍数でなければならない．このようなベクトル k の全体は，平面 $\mathbf{R}^2$ の或る格子群 Γ^* をなす．関数 e_k $(k \in \Gamma^*)$ は，T^2 上の複素関数の空間の完全系をなしている．

さて，考えている Lie 環や，Lie 環でのスカラー積 $\langle\ ,\ \rangle$，交換子 $[\ ,\ ]$，演算 B，さらに Riemann 接続や曲率テンソル Ω を複素化しよう．すると，これらはすべて Lie 環を複素化した複素線形空間において多重線形である．関数 e_k（ここで $k \in \Gamma^*$，$k \neq 0$）はこの線形空間での基底をなしている．

定理 14　スカラー積，交換子，演算 B と，群 $S_0 \operatorname{Diff} T^2$ 上の右不変計量での接続と曲率に対する式は次の形をしている．

$$\langle e_k, e_l \rangle = 0 \quad (k+l \neq 0), \qquad \langle e_k, e_{-k} \rangle = k^2 S;$$

$$[e_k, e_l] = (k \wedge l) e_{k+l};$$

$$B(e_k, e_l) = b_{k,l} e_{k+l}, \qquad b_{k,l} = (k \wedge l) \frac{k^2}{(k+l)^2};$$

$$\nabla_{e_k} e_l = d_{l,k+l} e_{k+l}, \qquad d_{u,v} = \frac{(v \wedge u)(u \cdot v)}{v^2};$$

$$R_{k,l,m,n} = 0 \qquad (k+l+m+n \neq 0),$$

$$R_{k,l,m,n} = (a_{l,n} a_{k,m} - a_{l,m} a_{k,n}) S \qquad (k+l+m+n = 0),$$

$$a_{u,v} = \frac{(u \wedge v)^2}{|u+v|}. \quad \text{——}$$

これらの式において，S はトーラス T^2 の面積，$u \wedge v$ は u と v で張られる

平行4辺形の面積である(平面 $\mathbf{R}^2$ の向きづけは前もって選んでおく). 円い括弧(・)は平面の Euclid 内積を, 角括弧〈,〉は Lie 環でのスカラー積を表わしている.

この定理の証明は V. Arnold [6] にある.

これらの式によって, どんな方向への断面曲率も計算できる. 計算によると, ほとんどの方向で曲率は負だが, 或る方向では正になる. とくに, 流体の或る流れ, つまりこの群の測地線を考えよう. Jacobi の方程式に従えば, この測地線の安定性は, 測地線のすべての点で, 速度ベクトルを含むあらゆる2次元方向への断面曲率によって決定される.

さて, 考えている流れが定常流であるとしよう. すると, 測地線はこの群の1-パラメーター部分群である. このことから, 測地線のすべての点で, その速度ベクトルを含むあらゆる方向への断面曲率は, この測地線の単位元での速度ベクトルを含む対応する方向への断面曲率に等しい. (証明は, 群の単位元に右移動させればよい.) こうして, 定常流の安定性には, 定常流の速度ベクトル場である Lie 環のベクトルを含む Lie 環内の方向への断面曲率だけが影響を及ぼす.

例として, 簡単な平行 sin 型定常流を考えよう. このような流れは, 流れ関数

$$\xi = \frac{e_k + e_{-k}}{2}$$

で与えられる. Lie 環の他の実ベクトル $\eta = \sum x_l e_l \ (x_{-l} = \bar{x}_l)$ を考えよう. 定理14から, 容易に次の定理が得られる.

定理15 群 $S_0 \operatorname{Diff} T^2$ の, 方向 ξ を含むすべての方向への断面曲率は正でない. 正確には次式が得られる.

$$\langle \Omega(\xi, \eta)\xi, \eta \rangle = -\frac{S}{4} \sum_l a_{k,l}{}^2 |x_l + x_{l+2k}|^2. \qquad ——$$

この式から, とくに以下の命題が得られる.

1) ξ と同じ方向の平行流, つまり $[\xi, \eta] = 0$ であるような η と ξ とからなる方向への断面曲率だけが0である.

2) 流れ関数 $\xi = \cos kx$, $\eta = \cos lx$ で定まる方向への断面曲率は

$$K=-\frac{k^2+l^2}{4S}\sin^2\alpha\sin^2\beta$$

である．ここで，S はトーラスの面積，α は k と l の間の角，β は $k+l$ と $k-l$ の間の角である．

3) とくに，トーラス $\{(x,y) \bmod 2\pi\}$ の微分同相群の，速度場 $(\sin y, 0)$，$(0, \sin x)$ で定まる方向への断面曲率は

$$K=-\frac{1}{8\pi^2}$$

である．

L. 検討　微分同相群の曲率の，この群上の測地線の安定性(すなわち，理想流体の流れの安定性)への関わり方が，有限次元 Lie 群 G の曲率の，G 上の測地線の安定性への関わり方と同じであると期待するのは自然である．つまり，曲率 K が負であることは，測地線の指数不安定性を導く．この際，特性行程(初期条件のずれが e 倍に拡大する平均行程)は $1/\sqrt{-K}$ のオーダーの大きさである．こうして，微分同相群の曲率を知れば，理想流体の流れに対して，ずれが大きなオーダーで増えない範囲で未来を予測することができるような時間を評価することができる．

次のことを強調しておかねばならない．理想流体の流れの不安定性とは J 項での意味ではない．つまり，問題は**流体の運動**の指数不安定性であって，速度場のそれではない．定常流が Euler 方程式の解として Liapunov の意味で安定であっても，対応する流体の運動が指数不安定だということは起こり得る．流体の速度場が微かに変化しても，流体の運動の変化が指数的に増大する可能性があるのである．(Euler 方程式の解としては安定で，群の曲率は負である.) このような場合には，速度ベクトル場は予測できても，流体の質点の運動を予測することは著しく不精確にならざるを得ない．

先に述べた曲率公式を使うと，幾つか単純化のための仮定を認めれば，力学的な理論による天気の長期予報がどれ程の期間にわたって可能であるかに対する粗い評価を得ることもできる．この単純化の仮定とは次のものである．

1. 地球は，平面を平方格子で割って得られるトーラスの形をしている．
2. 大気は 2 次元の等質で，非圧縮，非粘性流体である．
3. 大気の運動は，トーラスの赤道に平行な《貿易風の流れ》に近く，sin 型の速度プロフィルをもっている．——

このとき特性行程を計算するには，定理 15 から，《貿易流》ξ を含む方向への群 $\mathrm{S_0\,Diff}\,T^2$ の曲率を評価しなければならない．この際，$T^2=\{(x, y) \bmod 2\pi\}$，$\boldsymbol{k}=(0, 1)$ と考えよう．いい換えれば，(x, y) 平面上の周期 2π の流れで，sin 型の速度プロフィル

$$\boldsymbol{v}=(\sin y, 0)$$

をもつ x 軸に平行な定常流に近いものを考えよう．

定理 15 の式から，この貿易流 $\boldsymbol{v}$ を含む方向への群 $\mathrm{S_0\,Diff}\,T^2$ の断面曲率は

$$-\frac{2}{S}<K<0 \qquad (S=4\pi^2 \text{ はトーラスの面積})$$

の範囲で変化することが容易に分る．この下界はかなり粗い評価で得られるのだが，曲率が $K=-1/2S$ である方向は確かに存在するし，この値に近い曲率をもつ方向も多く存在する．特性行程の大まかな評価のために，《曲率の平均》の概略値として $K_0=-1/2S$ をとろう．

曲率をこの値 K_0 として計算すると

$$s=(\sqrt{-K_0})^{-1}=\sqrt{2S}$$

なる特性行程が得られる．

貿易流に対応する，群上の運動の速度は $\sqrt{S/2}$ である（$\sin^2$ の平均が 1/2 であることに注意）．したがって，この流れが特性行程を通過する時間は 2 である．流体のもっとも速い部分は，この時間に距離 2 だけ，つまり，トーラス 1 周の長さの $1/\pi$ だけ進むことになる．

こうして，曲率の平均の概略値として上の近似値をとるならば，ずれはもっとも速い部分が 1 周する間に $e^{\pi}\approx 20$ 倍に増加する．貿易流の最大速度の値として 100 km/時 をとれば，1 周の時間として 400 時間，すなわち 3 週間弱が得られる．

それで，最初の時刻に天気の状態が微小誤差 ε で分っていたとしても，n カ月後の予報誤差は

$$10^{kn}\varepsilon \qquad \left(k\approx\frac{30\times 24}{400}\pi\log_{10}e\approx 2.5\right)$$

のオーダーの大きさとなる．たとえば，2 カ月間の天気予報には，小数点以下 5 桁の精度がなければならない．このことは，実際上，このような期間の天気

予報が不可能であることを示している.

もちろん，ここで採った評価は極めて大まかで，モデルも単純に過ぎる.《曲率の平均》の値の選び方にも意味づけが必要である.

付録3　代数多様体上のシンプレクティック構造

古典力学のシンプレクティック多様体は，ほとんど Lagrange 力学系の相空間，つまり，配位空間の余接バンドルである．

これとは全く異なったシンプレクティック多様体の例を，代数幾何学が与えてくれる．

たとえば，(複素射影空間上の多項式系によって与えられる)滑らかな複素代数多様体は，自然なシンプレクティック構造をもっている．

代数多様体上のシンプレクティック構造の構成は，複素射影空間自身が Hermite 構造の虚数部分という顕著なシンプレクティック構造をもっていることに基づいている．

A. 複素射影空間の Hermite 構造　n 次元複素射影空間 CP^n は，$n+1$ 次元複素線形空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ の原点を通る複素直線全体のなす多様体であった．複素射影空間 CP^n 上にシンプレクティック構造を構成するために，対応する線形空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ の Hermite 構造を用いよう．

複素線形空間の **Hermite スカラー積**(または Hermite 構造)とは，次の性質 1)-3) をもつベクトルの対の複素関数のことであった．1) 前の変数について線形，後の変数について反線形であり，2) 変数を入れ換えると複素共役に移り，3) 変数を等しくすると正定値実2次形式となる．つまり，

$$\langle \lambda\xi, \eta\rangle = \lambda\langle \xi, \eta\rangle, \qquad \langle \xi, \eta\rangle = \overline{\langle \eta, \xi\rangle}, \qquad \langle \xi, \xi\rangle > 0 \quad (\xi \neq 0).$$

Hermite スカラー積の例には，

$$\langle \xi, \eta\rangle = \sum \xi_k \overline{\eta_k} \tag{1}$$

がある．ここで，ξ_k, η_k はベクトル ξ, η の或る基底に関する成分である．

Hermite スカラー積が(1)の形になる基底は常に存在し，これを Hermite 正規直交基底と呼んでいる．

Hermite スカラー積の実部と虚部は，実双線形形式である．前者は対称，後者は歪対称

$$\langle \xi, \eta\rangle = (\xi, \eta) + i[\xi, \eta], \qquad (\xi, \eta) = (\eta, \xi), \qquad [\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$$

であり，共に非退化である．2次形式 (ξ, ξ) は正定値である．

このように，複素線形空間の Hermite 構造 $\langle\ ,\ \rangle$ は，この空間の Euclid 構造 $(\ ,\ )$ とシンプレクティック構造 $[\ ,\ ]$ を与えている．この2つの構造は，関係式

$$[\xi, \eta] = (\xi, i\eta)$$

によって，複素構造と結びついている．

さて，複素射影空間 CP^n に Riemann 計量を定義しよう．このため，対応する線形空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ の単位球面

$$S^{2n+1} = \{z \in \mathbf{C}^{n+1};\ \langle z, z\rangle = 1\}$$

を考えよう．この球面には $\mathbf{C}^{n+1}$ の計量から定まる Riemann 計量がある．各複素直線と球面 S^{2n+1} との交わりは大円になる．

定義　複素射影空間 CP^n の2点間の**距離**とは，単位球面 S^{2n+1} 上の対応する2つの大円の間の距離のこととする．

次のことを注意しておこう．このような2つの大円は，一方の大円の任意の点と他方の大円との距離が一定であるという意味で平行である．(証明：z に $e^{i\varphi}$ を掛けることは，球面上の計量を変えない.)　このことにより，いま定義された CP^n の距離を与える Riemann 計量を具体的に表わす式(2)を直ちに書きくだすことができる．

実際，線形空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ の点 $z \neq 0$ を，0 と z を通る複素直線に対応させる写像を

$$p: \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow CP^n$$

と表わす．

点 pz での CP^n の接ベクトル ζ はそれぞれ，(多くの仕方で) z での接ベクトル ξ の像として表わすことができる．つまり，

$$\zeta = p_*\xi, \qquad \xi \in T\mathbf{C}_z^{n+1}.$$

定理　上に定義した Riemann 計量でのベクトル ζ の長さの2乗は，式

$$ds^2(\zeta) = \frac{\langle\xi, \xi\rangle\langle z, z\rangle - \langle\xi, z\rangle\langle z, \xi\rangle}{\langle z, z\rangle^2} \tag{2}$$

で与えられる．

証明　まず，点 z が単位球面 S^{2n+1} 上にあるとしよう．

ベクトル ξ を2つの成分に分解する．つまり，1つはベクトル z の定める複素直線から，もう1つは z に Hermite 直交する方向からとる．ベクトル z に Hermite 直交するというのは，ベクトル z と iz とに Euclid 直交することである．ベクトル z は，球

面 S^{2n+1} の Euclid 構造による点 z での法ベクトルである．ベクトル iz は，点 z を通る複素直線と S^{2n+1} との交わりである大円の接ベクトルである．つまり，ベクトル ξ のベクトル z に Hermite 直交する成分 η は，球面 S^{2n+1} に接し，S^{2n+1} と直線 pz との交わりの大円に Euclid 直交している．

CP^n 上の計量の定義によれば，ベクトル ζ の Riemann 計量での長さの2乗は，ベクトル ξ の z に Hermite 直交する成分 η の Euclid 計量での長さの2乗に等しい．

ベクトル ξ の，z に Hermite 直交する成分 η を計算しよう．ξ の分解を

$$\xi = cz+\eta, \qquad \langle \eta, z\rangle = 0$$

の形に書く．z との Hermite スカラー積をとると，

$$\langle \xi, z\rangle = c\langle z, z\rangle$$

となり，したがって

$$\eta = \frac{\langle z, z\rangle\xi - \langle \xi, z\rangle z}{\langle z, z\rangle}$$

が得られる．ベクトル η の Hermite 計量での2乗を計算すると，

$$\langle \eta, \eta\rangle = \frac{\langle z, z\rangle\langle \xi, \xi\rangle - \langle \xi, z\rangle\langle z, \xi\rangle}{\langle z, z\rangle}$$

が得られる．これで単位球面の点 z に対して，式(2)が証明された．一般の場合は，相似拡大 $z\mapsto z/|z|$ によって上の場合に帰着される．█

この構成を使えば，CP^n の接空間には Euclid 構造(2)ばかりでなく，Hermite 構造も定義できることに注意する．

実際，空間 $T\mathbf{C}_z^{n+1}$ $(z\in S^{2n+1})$ において，ベクトル z 方向への Hermite 直交補空間 H を考える．写像 $p_*: H\to T(CP^n)_{pz}$ は(上で示したように) H から CP^n の接空間 $T(CP^n)_{pz}$ の上への同型であり，H 上の Hermite 構造を移している．

明らかに，この Hermite 構造で定まるスカラー積での2乗は，式(2)で与えられる．したがって，CP^n の接空間での Hermite スカラー積に対する式は，新たに計算することなく書きくだすことができる．すなわち，

$$\langle \zeta_1, \zeta_2\rangle = \frac{\langle \xi_1, \xi_2\rangle\langle z, z\rangle - \langle \xi_1, z\rangle\langle z, \xi_2\rangle}{\langle z, z\rangle^2} \tag{3}$$

である．ここで，ベクトル $\xi_1, \xi_2 \in T\mathbf{C}_z^{n+1}$ は関係 $p_*\xi_k=\zeta_k\in T(CP^n)_{pz}$ を満たせばどれでもよい．

式(3)では，点 z は必ずしも単位球面上になくてもよいことを注意する．

CP^n の接空間に構成された Euclid 構造(2)と Hermite 構造(3)は，多様体 CP^n の射影変換の全体では不変でなく，線形空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ の線形なユニタリ変換(Hermite 構造を保つもの)によって与えられるような射影変換に対してだけ不変である．

B. 複素射影空間のシンプレクティック構造　Hermite 形式(3)の虚部に係数 $-1/\pi$ をつけて考えよう(係数をつける理由は C 項の問1で明らかになる)．つまり，

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle \tag{4}$$

を考える．どんな Hermite 形式の虚部もそうだが，複素射影空間の接空間上の実双線形形式 Ω も，歪対称で非退化である．

定理　2次微分形式 Ω は複素射影空間 CP^n にシンプレクティック構造を与える．

証明　Ω が閉形式であることを証明すればよい．

形式 Ω の外微分 $d\Omega$ を考えよう．多様体 CP^n 上のこの3次微分形式は，空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ のユニタリ変換から誘導される射影変換に関して不変である．このことから，$d\Omega=0$ が分る．

実際，或る点 z での CP^n の接空間に Hermite 正規直交 $\mathbf{C}$ 基底 $e_1, \cdots, e_n$ を考えよう．このとき，ベクトル $e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots, ie_n$ は Euclid 正規直交 $\mathbf{R}$ 基底をなしている．この $\mathbf{R}$ 基底の3つのベクトルにおける形式 $d\Omega$ の値が0であることを示そう．($n>1$ とする．$n=1$ ならば証明する必要がない．)

この $\mathbf{R}$ 基底の3つのベクトルを考えると，少なくとも1つ(これを e と書く)は他の2つに Hermite 直交していることに注意する．CP^n の運動を誘導する空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ のユニタリ変換で，考えている点 z と e の Hermite 直交補空間とを動かさずにベクトル e の向きを変えるものを作ることは易しい．

形式 $d\Omega$ の不変性により，このベクトルの3つ組 e, f, g での形式 $d\Omega$ の値が，3つ組 $-e, f, g$ での値に等しく，したがって0になることが分る．■

注意　複素射影空間上のこのシンプレクティック構造は別の方法で構成することができる．このために，$n+1$ 次元の配位空間をもつ単振子の微小振動を考えよう．エネルギー積分を使えば系の自由度は1さがる．こうして得られる相空間は CP^n であり，そのシンプレクティック構造は上に述べた形式 Ω と定数倍を除いて一致する．

CP^n 上にシンプレクティック構造を構成するもう1つの方法は，CP^n を或る Lie 群の共役随伴表現の軌道の1つとして表わすことができ，このような軌道には常に標準的なシンプレクティック構造が存在する(付録2，A 項参照)ことによるものである．このLie 群として，複素空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ のユニタリ変換(Hermite 構造を保つもの)のなす群をとることができる．この場合，共役随伴表現の軌道は随伴表現の軌道と同じである．随伴表現では，超平面による鏡映(最初の座標の符号を変え，残りの座標は動かさない)はその軌道として CP^n をもつ．というのは，超平面による鏡映は超平面に直交する複素直線で一意的に定まるからである．

C. 射影的代数多様体のシンプレクティック構造　今や，複素射影空間のどんな複素部分多様体[†] M 上にも，シンプレクティック構造が得られる．つまり，$j: M \to CP^n$ を複素多様体 M の複素射影空間 CP^n への埋め込みとしよう．CP^n 上の Riemann, Hermite, シンプレクティックの各構造は，M 上に対応する構造を誘導する．たとえば，M 上のシンプレクティック構造 Ω_M は次式で与えられる．

$$\Omega_M = j^*\Omega.$$

定理　微分形式 Ω_M は多様体 M 上にシンプレクティック構造を与える．

証明　2-形式 Ω_M の非退化性は M が**複素**部分多様体であることから分る．実際，TM_x 上の2次形式

$$(\xi, \xi) = \Omega_M(\xi, i\xi)$$

は正定値である(この2次形式は CP^n の Riemann 計量から誘導されたものである)．したがって，双線形形式 $(\xi, \eta) = \Omega_M(\xi, i\eta)$ は非退化である．つまり，形式 Ω_M も非退化である．Ω_M が閉形式であることは Ω が閉形式であることから分る．∎

注意　CP^n でと同様に，その複素部分多様体 M でも，M の接空間に，虚部がシンプレクティック構造である Hermite 構造が定義された．

虚部が閉形式(すなわち，シンプレクティック構造)であるような Hermite 計量をもつ複素多様体は，**Kähler 多様体**と呼ばれ，その Hermite 計量は **Kähler 計量**と呼ばれる．Kähler 多様体の幾何学では多くの重要な結果が，とくに，顕著な位相的性質のあることが知られている(たとえば，A. Weil [1]

---

†) W.-L. Chow [1] の定理により，M は代数多様体である．

を参照せよ).

既知のすべてのシンプレクティック多様体は Kähler 構造をもっている†).しかし, Kähler 多様体の位相的性質のうちどれが, シンプレクティック構造だけによっているかは明らかでない.

問1　射影直線 CP^1 のアフィンなチャート $w=z_1:z_0$ で, シンプレクティック構造 Ω を計算せよ.

[解]
$$\Omega=\frac{1}{\pi}\frac{dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}\qquad (w=x+iy).$$

形式 Ω の定義において, 係数は複素直線 CP^1 が通常の向きづけ $dx\wedge dy$ をもち, CP^1 全体での積分が1になるように選ばれている.

問2　射影空間 $CP^n=\{(z_0:z_1:\cdots:z_n)\}$ のアフィンなチャート $w_k=z_kz_0^{-1}$ $(k=1,\cdots,n)$ では, シンプレクティック構造 Ω が式

$$\Omega=\frac{i}{2\pi}\frac{\sum_{0\le k<l\le n}(w_kdw_l-w_ldw_k)\wedge(\bar{w}_kd\bar{w}_l-\bar{w}_ld\bar{w}_k)}{\left[\sum_{k=0}^{n}(w_k\bar{w}_k)\right]^2}$$

で与えられることを示せ††).

注意　複素空間上の複素数値微分形式(たとえば, dw_k や $d\bar{w}_k$) は, 接ベクトルの複素線形関数として定義される. つまり, $w_k=x_k+iy_k$ であれば,

$$dw_k=dx_k+idy_k,\qquad d\bar{w}_k=dx_k-idy_k.$$

$\mathbf{C}^n$ でのこのような形式の作る空間は, 複素 $2n$ 次元であり, その $\mathbf{C}$ 基底は, たとえば, $2n$ 個の形式 dw_k, $d\bar{w}_k$ $(k=1,\cdots,n)$ や, $2n$ 個の形式 dx_k, dy_k からなっている.

外積は普通に定義され, 通常の法則に従う. たとえば,

$$dw\wedge d\bar{w}=(dx+idy)\wedge(dx-idy)=-2idx\wedge dy.$$

f を実変数でみて滑らかな(一般には複素数値の) $\mathbf{C}^n$ 上の関数とする. こうした関数としては, たとえば $|w|^2=\sum w_k\bar{w}_k$ がある. 関数 f の微分は複素1-形式である. したがって, これは基底 dw_k, $d\bar{w}_k$ によって分解できる. この分解における係数を,《w_k に関する》または《$\bar{w}_k$ に関する》偏導関数であるという. つまり,

$$df=\frac{\partial f}{\partial w}dw+\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}d\bar{w}.$$

外微分の計算には, 変数 w での微分 d' と $\bar{w}$ での微分 d'' とに分解して, $d=d'+d''$

---

†)　たとえば, 多様体の余接バンドルは Kähler である. シンプレクティック多様体 (M,ω) が複素構造をもてば, ω から Kähler 形式が得られる. 問題は, M 上に導入できる概複素構造の積分可能性である.

††)　$w_0=1$, $dw_0=0$ としている.

とするのが便利である.

たとえば，関数 f に対しては，

$$d'f=\frac{\partial f}{\partial w}dw, \qquad d''f=\frac{\partial f}{\partial \bar{w}}d\bar{w}.$$

1次微分形式

$$\omega=\sum a_k dw_k+b_k d\bar{w}_k$$

に対しても，作用素 d', d'' は同様に定義される. つまり，

$$d'\omega=\sum d'a_k\wedge dw_k+d'b_k\wedge d\bar{w}_k,$$
$$d''\omega=\sum d''a_k\wedge dw_k+d''b_k\wedge d\bar{w}_k.$$

問3　射影空間 CP^n のアフィンなチャート $(w_k=z_k z_0{}^{-1})$ では，シンプレクティック構造 Ω は次式で与えられることを示せ.

$$\Omega=\frac{i}{2\pi}d'd''\log\sum_{k=0}^{n}|w_k|^2.$$

付録4　接触構造

奇数次元多様体上には，シンプレクティック構造は存在し得ない．奇数次元多様体に対するシンプレクティック構造の類似物は，いくぶん対称性は減るが，やはり極めて顕著な構造である接触構造である．

力学におけるシンプレクティック構造の起源は，相空間(すなわち，配位空間の余接バンドル)であり，相空間には常に標準的なシンプレクティック構造がある．接触構造の起源は配位空間の接触要素の作る多様体である．

滑らかな n 次元多様体の或る点での接触要素とは，この点で多様体に接する $n-1$ 次元平面(すなわち，この点での n 次元接空間の $n-1$ 次元線形部分空間)のことである．

n 次元多様体の接触要素の集合には，自然に $2n-1$ 次元の滑らかな多様体の構造が入る．この奇数次元多様体上には，さらに注目すべき《接触構造》(これがどんなものかは A 項で述べる)が存在することが分る．

n 次元 Riemann 多様体 M の接触要素の作る多様体は，Riemann 多様体 M の単位接ベクトルの作る $2n-1$ 次元多様体や，M 上を慣性運動する質点の $2n-1$ 次元エネルギーレベル多様体と密接に関係している．この $2n-1$ 次元多様体の接触構造は，慣性運動の $2n$ 次元相空間(すなわち，M の余接バンドル)のシンプレクティック構造に密接に結びついている．

A.　接触構造の定義

定義　多様体上の**接触構造**とは，後で定式化する或る非退化条件を満足するような，接超平面[*)]の滑らかな場のことである．

この条件を定式化するために，N 次元多様体の1点の近傍で，超平面場が一般にどのように構成されるかを見てみよう．

例　$N=2$ とする．このとき，多様体は曲面で，超平面場は直線場である．どんな直線場も1点の近傍では，常に極めて単純な構造をしている．つまり，

---

*)　線形空間の超平面とは，その空間より1次元低い部分空間(すなわち，恒等的には0でない線形関数の0点全体の集合)のことである．

接超平面とは，接空間の超平面のことである．

平面上の平行な直線族の接線場と同じである．より正確には，常微分方程式の局所理論の基本結果の1つとして，多様体上のどんな滑らかな接線場も，多様体のどの点でもその十分小さい近傍では，微分同相によって，Euclid 空間の平行直線族の接線場に変換することができる．

$N>2$ であれば，超平面はもはや直線ではなく，事態は甚だ複雑になる．たとえば，通常の3次元空間での2次元接平面場が，常に，平行な平面の場に微分同相に変換できるわけではない．実際，《積分曲面》がないような接平面場が存在するのである．ここで積分曲面とは，その各点であらかじめ与えられた接平面をもつ曲面のことである．

接触構造の定義に現われる超平面場の非退化条件とは，超平面場が，超曲面族に接するような場からもっとも隔たっているということである．この隔たりを量るために，さらには，積分超曲面を持たない場が存在することを確かめるためには，幾らかの構成と計算が必要である*)．

B. Frobenius の積分可能条件　N 次元多様体上の1点 O を考え，点 O を通る超曲面であって，その各点で与えられた $N-1$ 次元平面場に接するもの(積分曲面)を構成しよう．

このため，点 O の近傍に座標系を導入して，1つの座標曲面が点 O で場の平面に接するようにする．この平面を水平面といい，これに含まれない座標軸を垂直であるといおう．

積分曲面の構成　積分曲面が存在するならば，それは座標原点 O の近くでは $N-1$ 変数の関数のグラフになっている．これを作るには，水平面上に滑らかな道 γ を考えればよい．そのとき，道 γ の上に立つ垂直な直線は2次元の曲面 C(シリンダー)をなし，もとの平面場が曲面 C を切って C 上の接線場が得られる．求める積分曲面が存在するのなら，それと C との交わりは，この接線場の座標原点 O を通る積分曲線である．このような積分曲線は，積分曲面が存在するしないにかかわらず，常に存在する．こうして，水平面上の滑らかな曲線を動かして，水平面の上方に積分曲面を構成することができる．

このとき，積分曲線全体から滑らかな積分曲面を得るには，この構成の結果

*) 以後，“超”という接頭辞を省く．3次元空間で考え，超平面を通常の平面と考えることにしてもよい．高次元の場合も，3次元の場合と同様である．

が道によらないで，道の終点だけで定まる必要がある．

とくに，水平面上で座標原点 O の近くの閉じた道を1周すると，シリンダー上の積分曲線も閉じていなければならない．

このような閉曲線ができないような，したがって積分曲面が存在しないような平面場の例は容易に与えられる．このような平面場は**積分不能**であるという．

積分不能な平面場の例 与えられた平面場に対して，閉曲線になることからの隔たりを定量的に量るために以下の記号を導入する．

まず，超平面場は局所的には1次微分形式 $\boldsymbol{\omega}$ によって与えることができることに注意する．実際，接空間の超平面は0以外の定数を掛けることを除いて，1-形式を与える．接垂直座標ベクトルでの形式 $\boldsymbol{\omega}$ の値が1になるように，この定数を選ぼう．

この条件は座標原点 O の或る近傍で満足させられる．理由は点 O では場の平面が垂直方向を含まないからである．この条件で，形式は(平面場によって)一意的に定まる．

通常の3次元空間の積分曲面をもたない平面場が，たとえば1-形式

$$\omega = xdy + dz$$

で与えられる．ここで，x, y は水平座標で，z は垂直座標である．この平面場が積分不能であることは後で証明する．

積分不能性を量る2-形式の構成 場を与える微分形式を使って，積分不能性の度合を量ることができる．それを量る2-形式を構成しよう(図236)．

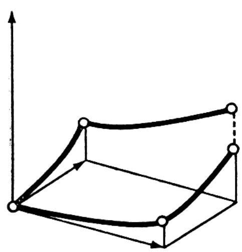


図236 積分不能な平面場で作られた積分曲線

考えている座標系の水平面上にあり原点 O を始点とするベクトルの対をとろう．これを2辺とする平行4辺形を作る．原点 O から対頂点へ，辺を通る2つの道が得られる．この道のおのおのの上方に，先に述べたように，(2つに

折れた)積分曲線が得られる．この結果，平行4辺形の原点 O の対頂点の上方に，一般には2つの点が生じる．この2点の高さの差は，もとのベクトル対の関数になっている．この関数は歪対称であり，1つのベクトルが0なら0になる．したがって，このベクトル対の関数の，O での Taylor 級数の線形項は0であって，2次の項は水平面上の双線形歪対称形式である．

積分可能な場ならば，この2-形式は0になる．したがって，この2-形式は場の積分不能性を量る尺度と考えられる．

考えている座標系では，水平座標平面を原点を通る場の平面と同一視することができる．こうして，場の平面自身の上の2-形式が構成された．

2-形式の定義の適切さ　この2-形式は座標を使って構成されたが，接ベクトル対での値は座標系によらず，場を与える1-形式だけに依存している．

これを確かめるには次の定理を示せばよい．

定理　上で定義した2-形式は，1-形式 ω の零空間上ではその外微分 $d\omega|_{\omega=0}$ と一致する．

証明　平行4辺形の辺に沿う2通りの運動の結果得られる2点の高さの差と，平行4辺形の4辺に沿う1-形式 ω の積分とが，辺の長さに関して3次の微小量を除いて一致することをいおう．

このため，座標原点 O から出る長さ ε のどんな道の上方でも，積分曲線の上る高さは ε^2 のオーダーであることに注意する．というのは，場の平面は原点で水平だからである．したがって，平行4辺形の4辺の上に立つ4つの垂直面上の積分曲線と水平面で区切られた領域で2-形式 $d\omega$ を積分すると，辺の長さのオーダーが ε のとき，ε^3 のオーダーになる．

積分曲線に沿う形式 ω の積分は0である．したがって，Stokes の定理により，平行4辺形のどの辺の上方にある積分曲線の高さの増加も，その辺に沿う1-形式 ω の積分に，3次の微小量を除いて等しい．

今や，外微分の定義から定理は直ちに得られる．■

この2-形式を構成するときに使った1-形式 ω の選び方の任意性がまだ残っている．つまり，形式 ω は平面場によっては，どこでも0にならない関数 f を掛けることを除いてしか定まらない．いい換えれば，形式 $f\omega$ で始めることもできたのである．そのとき，2-形式

$$df\omega = fd\omega + df \wedge \omega$$

が得られるが，考えている平面 $\omega=0$ 上での 2-形式 $d\omega$ との違いは，0 でない数 $f(O)$ を掛けることだけである．

このように，場の平面上に構成された 2-形式は，0 でない定数を掛けることを除いて，不変な形で定められている．

平面場の積分可能条件

定理　超平面場が積分可能であれば，場の平面上に構成した 2-形式は 0 である．逆に，場の各平面上に構成された 2-形式が 0 であれば，場は積分可能である．

証明　定理の第 1 の主張は，2-形式の構成から明らかである．第 2 の主張の証明は，速度場の Poisson 括弧が 0 であるような相流の可換性の証明と全く同じ議論で行うことができる(§39, E 項参照)．水平面上の座標軸の上方にできる積分曲線に，この可換性を単に適用すればよい．■

定理　超平面場の積分可能条件

$$\omega=0 \quad \text{の上で} \quad d\omega=0$$

は Frobenius の条件

$$\omega\wedge d\omega=0$$

と同値である．

証明　相異なる 3 つの座標ベクトルでの 3-形式 $\omega\wedge d\omega$ の値を考えよう．このうち垂直であり得るベクトルは 1 つだけである．それ故，3 つのベクトルにおける外積の値の定義に現われる項のうち，0 でない可能性があるのは 1 項だけで，その項は垂直ベクトルでの形式 ω の値と，水平ベクトルの対での形式 $d\omega$ の値との積である．もし微分形式 ω で与えられた場が積分可能ならば，積の第 2 因子は 0 となる．したがって，3-形式 $\omega\wedge d\omega$ はベクトルの 3 つ組すべてに対して 0 になる．

逆に，この 3-形式がどんなベクトルの 3 つ組に対しても 0 となるならば，1 つが垂直で他の 2 つが水平であるようなどんな座標ベクトルの 3 つ組に対しても 0 になる．このような 3 つ組での 3-形式の値は，垂直ベクトルでの ω の値と水平ベクトル対での $d\omega$ の値との積である．第 1 因子は 0 でないから第 2 因子は 0 であり，したがって，形式 $d\omega$ は場の平面上 0 である．■

C. 非退化な超平面場

定義　超平面場が **1 点で非退化**であるとは，この点を通る場の平面上での 2-形式 $d\omega|_{\omega=0}$ の階数が平面の次元に等しいときをいう．

これはつまり，この平面上の0でないすべてのベクトルに対して，この平面上の他のベクトルが存在して，そのベクトル対における2-形式 $d\omega$ の値が0とならないということである．

定義 平面場が**多様体上非退化**であるとは，多様体の各点で非退化であるときをいう．

偶数次元多様体上には非退化な超平面場は存在し得ないことに注意する．実際，このとき超平面は奇数次元となるが，奇数次元空間上の歪対称双線形形式の階数は空間の次元よりも小さい(§44参照)からである．

奇数次元多様体上には非退化な超平面場が存在しうる．

例 $2m+1$ 次元 Euclid 空間で，座標を x, y, z (x と y は m 次元空間のベクトルで，z は数)とするものを考えよう．1-形式

$$\omega = xdy+dz$$

は超平面場を与える．座標原点を通る場の平面は，方程式 $dz=0$ をもち，この平面上の座標として，x, y がとれる．したがって，この平面上では2-形式 $d\omega$ は次の形に書かれる．

$$d\omega|_{\omega=0} = dx\wedge dy$$
$$= dx_1\wedge dy_1+\cdots+dx_m\wedge dy_m.$$

この形式の階数は $2m$ であり，故にこの場は原点で非退化であり，その近傍でも非退化である．(実は，この平面場は空間のすべての点で非退化である.)

これでやっと，多様体上の接触構造の定義を与えることができる．つまり，多様体上の接触構造とは非退化な接超平面場のことである．

D. 接触要素の多様体 《接触構造》という用語は，この構造が常に，滑らかな多様体の接触要素の作る多様体上に存在することによる．

滑らかな n 次元多様体 M を考えよう．

定義 多様体 M の或る点 x で接する ($n-1$ 次元) 超平面を**接触要素**といい，点 x を**接触点**という．

n 次元多様体 M の接触要素全体の集合 N は，それ自身 $2n-1$ 次元の滑らかな多様体の構造をもつ．

実際，固定された接触点での接触要素の集合は n 次元線形空間の $n-1$ 次元部分空間全体，つまり，$n-1$ 次元射影空間である．接触要素を与えるには，接触点の n 個の座

標と，さらに $n-1$ 次元射影空間の点を定める $n-1$ 個の座標，つまり全部で $2n-1$ 個の座標を与える必要がある．

n 次元多様体 M の接触要素全体の集合 N は，底空間が M で，ファイバーが $n-1$ 次元射影空間であるバンドルの全空間である．

定理 接触要素のバンドル N は余接バンドル T^*M の射影化，つまり，T^*M から，その各余接線形 n 次元空間を $n-1$ 次元射影空間でおき換えて得られるものである．(その点は余接空間の原点を通る直線である.)

証明 実際，接触要素は接空間上の1-形式 ω によって ω の零点集合として与えられる．形式 ω は0でなく，また0でない定数を掛けることを除いて定まる．

ところで，接空間上の形式は余接空間のベクトルである．したがって，接空間上の0でない形式で，0でない数を掛けることを除いて定まる ω は，余接空間の0でないベクトルで，0でない数を掛けることを除いて定まる．つまり，ω は余接空間の射影化の点である．∎

接触要素の多様体上の接触構造 接触要素の作る多様体の接空間には注目すべき超平面がある．これは**接触超平面**と呼ばれ，次のように定義される．

n 次元多様体 M 上の接触要素の作る $2n-1$ 次元多様体 N の点 P を1つ固定する．この点 P をもとの多様体 M に接する $n-1$ 次元平面と考えることができる．

定義 接触要素の作る多様体 N の1点 P での接ベクトル ξ が**接触超平面**に属するというのは，多様体 M 上への ξ の射影が，多様体 N の点である $n-1$ 次元平面 P に属するときとする．

いい換えれば，接触点の速度ベクトルがその接触要素に属せば，接触要素の移動が接触超平面に接するのであり，接触要素はどのように回転してもよい．

例 n 次元多様体 M の或る部分多様体 S と，これに接する $n-1$ 次元平面（すなわち接触要素）の全体を考えよう．このような接触要素の全体は，あらゆる接触要素の作る $2n-1$ 次元多様体 N の滑らかな部分多様体をなす．この部分多様体の次元は，もとの部分多様体 S の次元が何であっても $n-1$ である(S は $n-1$ 次元でも，もっと低次元でもよい．曲線や点でもよい)．

接触要素の作る $2n-1$ 次元多様体 N のこうして得られた $n-1$ 次元部分多様体は，その各点で接触超平面場に接している(接触超平面の定義によって)．

こうして，$2n-2$ 次元接触超平面場は，$n-1$ 次元積分多様体をもつ．

問 接触超平面場には，より高次元の積分多様体が存在するか．

［解］ 否．

問 接触超平面場は接触要素の多様体 N 上の1次微分形式で与えることができるか．

［解］ 否．n 次元多様体 M が Euclid 空間（たとえば，通常の2次元平面）であってさえ不可能である．——

次に証明するのは，n 次元多様体 M のすべての接触要素の作る $2n-1$ 次元多様体 N 上の接触超平面場が非退化であることである．

証明には余接バンドルのシンプレクティック構造が使われる．

というのも，接触要素のバンドル N が余接バンドル T^*M から単純な構成で得られる（つまり，T^*M の射影化が N である）からである．そして，射影化されたバンドル N の接触超平面場の非退化性は，余接バンドルのシンプレクティック構造を与える2-形式の非退化性に密接に関係している．

問題となっている構成は，以下で，幾分一般的な状況のもとで行われる．つまり，接触構造をもつあらゆる奇数次元多様体 N に対して，1次元高いシンプレクティック多様体である，N の《シンプレクティック化》T を構成することができる．奇数次元接触多様体 N と偶数次元シンプレクティック多様体 T とのこの関係は，接触要素の多様体（接触構造をもつ）と余接バンドル（シンプレクティック構造をもつ）との関係と同じである．

E. 接触多様体のシンプレクティック化 任意の接触多様体，すなわち非退化な接超平面（偶数 $n-1$ 次元）の場をもつ奇数 n 次元多様体を考えよう．この平面を**接触平面**という．各接触平面は接触多様体に1点で接する．この点を**接触点**という．

定義 接触多様体の1点の接空間上の線形形式で，その零点集合が接触平面となるものを**接触形式**という．

強調しておくが，接触形式は微分形式ではなく，1つの接空間上の代数的な線形形式である．

定義 接触多様体の**シンプレクティック化**とは，接触多様体上の接触形式全体の集合に，以下で定義するシンプレクティック構造を与えたものである．

まず，接触多様体 N 上の接触形式全体の集合が，偶数 $n+1$ 次元の滑らか

な多様体の自然な構造をもつことに注意しよう．つまり，接触形式全体の集合を接触多様体 N 上のバンドルの全空間 T と考えることができる．底空間 N への射影は，接触形式に接触点を対応させる写像である．

バンドル T のファイバーは，共通の接触点をもつ接触形式の集合である．このような形式はすべて，互いに0でない数を掛けると一方から他方が得られる(これらは同じ接触平面を定めるから)．こうして，バンドル T のファイバーは1次元で，直線から1点を除いたものである．

接触形式の作る多様体 T には，0以外の実数のなす乗法群 $\mathbf{R}^\times$ が作用することも注意しておく．つまり，接触形式に0以外の数を掛けてもまた接触形式である．群 $\mathbf{R}^\times$ はバンドル T に，各ファイバーを不変にするように働いている(接触形式に数を掛けても接触点は変わらない)．

注意 これまでは平面場の非退化性は一度も使わなかった．非退化性は，シンプレクティック化で得られた多様体がシンプレクティックであることだけに必要である．

例 滑らかな n 次元多様体 M のすべての接触要素の作る $(2n-1$ 次元$)$ 多様体 N を考えよう．多様体 N 上には超平面場(前に接触超平面場と定義したもの)がある．したがって，多様体 N をシンプレクティック化できる．

シンプレクティック化の結果，$2n$ 次元多様体 T が得られる．多様体 T はもとの多様体 M の余接バンドル T^*M から0ベクトルを除いたものである．この際，実数の乗法群 $\mathbf{R}^\times$ のファイバー上の作用は，余接空間のベクトルに数を掛けることである．

余接バンドル上には顕著な1-形式《pdq》がある．同様な1-形式が，接触多様体のシンプレクティック化で得られるどんな多様体上にも存在する．

シンプレクティック化の上の正準1-形式

定義 接触多様体 N のシンプレクティック化 T 上の**正準1-形式**とは，1次微分形式 α であって，多様体 T の点 p における接ベクトル ξ での値が，点 p を多様体 N の接平面上の1-形式と考え，ベクトル ξ のこの接平面への射影における p の値と一致する，すなわち，

$$\alpha(\xi) = p(\pi_*\xi)$$

となるもののことである(図237)．ここで，π はシンプレクティック化 T から

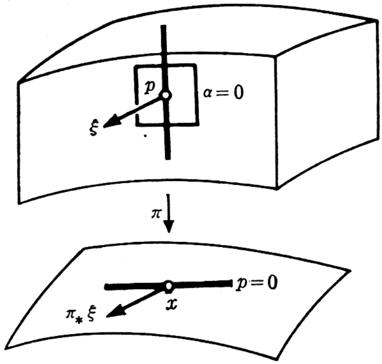


図 237　接触多様体のシンプレクティック化

接触多様体 N の上への射影である.

定理　接触多様体 N のシンプレクティック化 T 上の正準 1-形式 α の外微分 $d\alpha$ は，非退化な 2-形式である.

系　接触多様体 N のシンプレクティック化 T は，奇数次元多様体 N の接触構造から標準的に(すなわち，どんな任意性もなく一意的に)定まるシンプレクティック構造をもつ.

証明　定理の主張の局所性から，多様体の各点の小さな近傍で証明すればよい. 接触多様体 N の点 x の小さい近傍 U では，接触平面場は多様体 N 上の微分形式 ω で与えることができる. このような 1-形式 ω を固定しておく.

さらに，接触多様体 N の点 x の近傍 U へのシンプレクティック化 T の制限を $U\times(\mathbf{R}-\{0\})$ の形に表わしておく.

つまり，接触多様体 N の点 x と 0 でない数 λ の対 (x, λ) に，1 次微分形式 $\lambda\omega$ の定める接空間 T_xN 上の接触形式を対応させる.

こうして，T の領域 U では $\mathbf{R}-\{0\}$ に値をもつ関数 λ が定義される. 強調すべきことだが，λ は単に多様体 T 上の局所座標であって，この座標の定義は標準的ではなく 1 次微分形式 ω のとり方によっている.

すると，正準 1-形式 α は

$$\alpha=\lambda\pi^*\omega$$

の形に書け，ω のとり方にはよらない. したがって，1-形式 α の外微分は

$$d\alpha=d\lambda\wedge\pi^*\omega+\lambda\pi^*d\omega$$

の形になる.

2-形式 $d\alpha$ が非退化である，つまり，シンプレクティック化 T のどんな接ベクトル

$\xi(\neq 0)$ に対しても，$d\alpha(\xi,\eta)\neq 0$ となるベクトル η が見つかることを示そう．

シンプレクティック化 T の接ベクトルを，次の型に分けよう．ベクトル ξ が**垂直**とは，ξ がファイバーに接する，つまり $\pi_*\xi=0$ であるときとし，ξ が**水平**とは，関数 λ のレベル曲面に接する，つまり $d\lambda(\xi)=0$ であるときとする．ベクトル ξ が**接触ベクトル**であるとは，接触多様体 N 上への射影が接触平面内にある，すなわち $\omega(\pi_*\xi)=0$ (つまり $\alpha(\xi)=0$) のときとする．

ベクトル対 (ξ,η) での形式 $d\alpha$ の値を計算すると，

$$d\alpha(\xi,\eta)=(d\lambda\wedge\pi^*\omega)(\xi,\eta)+(\lambda\pi^*d\omega)(\xi,\eta).$$

ξ は接触ベクトルでないとする．η として0でない垂直ベクトル $(\pi_*\eta=0)$ をとろう．そのとき，第2項は0で，第1項は

$$-d\lambda(\eta)\,\omega(\pi_*\xi)$$

となるが，これは0でない．これは η が0でない垂直ベクトルで，ξ が接触ベクトルでないことによる．こうして，ξ が接触ベクトルでないならば $d\alpha(\xi,\eta)\neq 0$ となる η が見つかった．

ξ を垂直でない接触ベクトルとしよう．そのとき，η はどんな接触ベクトルでもよい．すると，第1項は0となり，第2項(すなわち和全体)は $\lambda d\omega(\pi_*\xi,\pi_*\eta)$ になる．ベクトル ξ は垂直でないのだから，接触平面上のベクトル $\pi_*\xi$ は0でない．ところで，(接触構造の定義により) 2-形式 $d\omega$ は接触平面上非退化である．つまり，$d\omega(\pi_*\xi,\pi_*\eta)\neq 0$ となる接触ベクトル η が存在する．$\lambda\neq 0$ だから，このベクトル η で $d\alpha(\xi,\eta)\neq 0$ となる．

最後に，ξ が0でない垂直ベクトルのとき，η としてはどんな非接触ベクトルでもよい．∎

注意　1-形式 α と 2-形式 $d\alpha$ は，超平面場をもつ任意の多様体で構成できるが，非退化性の条件は使っていない．しかしながら，2-形式 $d\alpha$ がシンプレクティック構造を定めるのは，平面場が非退化の場合だけである．

証明　場が退化している，つまり，場の平面上の0でないベクトル ξ' で，この平面のすべてのベクトル η' に対して $d\omega(\xi',\eta')=0$ となるものが存在すると仮定しよう．このような ξ' に対して，量 $d\omega(\xi',\eta')$ は η' の関数として線形であり，場の平面上では恒等的に0である．したがって，接空間のすべてのベクトル η' に対して，

$$d\omega(\xi',\eta')=\mu\omega(\eta')$$

となるような，η' にはよらない数 μ が存在する．

ξ として，多様体 T の接ベクトルで，$\pi_*\xi=\xi'$ となるものをとろう．ベクトル ξ は垂直ベクトルの差を除いて定まるが，この項を適当に選べば，すべての η に対して

$$d\alpha(\xi,\eta)=0$$

となることが言える．実際，$d\alpha$ の式の第1項は $d\lambda(\xi)\omega(\pi_*\eta)$ となり ($\omega(\pi_*\xi)=0$ だから)，第2項は $\lambda d\omega(\pi_*\xi,\pi_*\eta)=\lambda\mu\omega(\pi_*\eta)$ となる．ベクトル ξ の垂直成分を $d\lambda(\xi)=-\lambda\mu$ となるように選べば，ベクトル ξ はすべてのベクトル η に歪直交する．

こうして，$d\alpha$ がシンプレクティック構造であれば，もとの超平面場は接触構造であり，上の主張が証明された．∎

系 どんな滑らかな多様体でも，その接触要素の作る多様体上の接触超平面場は接触構造を与える．

証明 滑らかな n 次元多様体 M 上の接触要素全体の作る $2n-1$ 次元多様体 N の，$2n-2$ 次元接触超平面場によって構成されたシンプレクティック化 T は，その構成により，多様体 M の余接バンドル T^*M から0ベクトルを除いたものである．シンプレクティック化 T の正準1-形式 α は，その定義から，T^*M 上の1-形式《pdq》であって，Hamilton 力学の根底にあるものである (§37参照)．したがって，α の外微分 $d\alpha$ は形式《$dp\wedge dq$》であり，相空間の通常のシンプレクティック構造を与えている．それ故，形式 $d\alpha$ は非退化である．つまり上の注意から，接触超平面場は非退化である．∎

F. 接触微分同相と接触ベクトル場

定義 接触多様体の微分同相 φ が**接触**であるとは，φ が接触構造を保つ，すなわち，構造を与える超平面場の各平面をこの場の平面に写すときにいう．

例 滑らかな n 次元多様体 M の接触要素の作る $2n-1$ 次元多様体 N に通常の接触構造を考えよう．各接触要素 P には，多様体 M の接空間を超平面 P が分割した一方を選んで《正の側》を付与することができる．

正の側を付与した接触要素を**(横断的に)向きづけられた接触要素**という．

n 次元多様体 M 上の向きづけられた接触要素の全体は，自然な接触構造をもつ滑らかな $2n-1$ 次元多様体 $\tilde{N}$ をなす．($\tilde{N}$ は通常の向きづけられていない接触要素の作る多様体 N の2重被覆多様体である.)

ここで，多様体 M 上に Riemann 計量が与えられていると仮定する．すると，向きづけられた接触要素の作る多様体 $\tilde{N}$ 上に《測地流》が得られる*)．こ

---

*) 厳密には，Riemann 多様体 M が完備，つまり M 上の測地線は限りなく延長できることが必要である．

の流れにおいて，時間 t だけずらす変換を次のように定める．接触要素の接触点から，接触要素に垂直で正の側に向いて出る測地線を考える．時間 t が経過すると，接触点は測地線に沿って動くが，このとき接触要素は測地線と直交したままにする．こうして，時間 t 後に新しい向きづけられた接触要素が得られる．これで，向きづけられた接触要素の多様体 $\tilde{N}$ 上の測地流が定義された．

定理 向きづけられた接触要素の多様体 $\tilde{N}$ 上の測地流は接触微分同相からなる．——

この定理の証明は行わない．というのは，これは Huygens の原理(§46参照)を新しい言葉で定式化したものに他ならないからである．

定義 接触多様体上のベクトル場が**接触**であるとは，接触微分同相の(局所)1-パラメーター群の速度場になっていることをいう．

定理 接触ベクトル場の Poisson 括弧は接触ベクトル場である．接触ベクトル場の全体は，接触多様体上の滑らかなベクトル場全体の作る Lie 環の部分 Lie 環をなす．——

証明は定義より直ちに分る．

G. 接触微分同相と接触ベクトル場のシンプレクティック化 接触多様体 N の各接触微分同相に対し，標準的に N のシンプレクティック化 T のシンプレクティック微分同相が構成される．

このシンプレクティック微分同相は，実数の乗法群 $\mathbf{R}^{\times}$ の T 上の作用と可換で，次のように定義される．

シンプレクティック化 T の点とは，接触多様体 N 上の接触形式であることを思い出しておこう．

定義 接触多様体の接触微分同相 f による，接触点 x での**接触形式 p の像**とは，形式

$$f_! p = (f^*_{f(x)})^{-1} p$$

のことである．

簡単にいうと，微分同相 f によって形式 p を接空間 $T_x N$ から $T_{f(x)} N$ の上へ移すということである．(点 x での f の微分 f_{*x} は $T_x N$ と $T_{f(x)} N$ の間の同型を与えている．)

f は接触微分同相だから，$f_! p$ は接触形式である．

定理　接触多様体のシンプレクティック化 T 上の変換 $f_!$ は，T のシンプレクティック微分同相であり，実数の乗法群の作用と可換で，T 上の正準1-形式を保つ．

証明　この主張は次のことから分る．正準1-形式 α や，シンプレクティック2-形式 $d\alpha$ や，実数の乗法群 $\mathbf{R}^\times$ の作用は，接触構造自身から定義されており(その構成には座標などの不変的でない手段は使わなかった)，微分同相 f は接触構造を保っている．このことから，$f_!$ は接触構造から不変的に構成されたすべてのもの，とくに1-形式 α，その外微分 $d\alpha$，$\mathbf{R}^\times$ の作用などをそれら自身に移す．▮

定理　接触多様体 N のシンプレクティック化 T のシンプレクティック微分同相で，実数の乗法群と可換なものは，1) 接触多様体 N 上に射影すると接触微分同相となり，2) 正準1-形式 α を保つ．

証明　乗法群 $\mathbf{R}^\times$ の作用と可換な T の微分同相 F は，接触多様体 N の或る微分同相 f に射影される．f が接触微分同相であることを示すには，定理の主張2)を示せばよい(接触平面の上へ射影されるのは，$\alpha(\xi)=0$ を満たすベクトル ξ だけだから)．

主張2)を示すために，形式 α の道 γ に沿う積分を，シンプレクティック構造 $d\alpha$ を使って

$$\int_\gamma \alpha = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\sigma(\varepsilon)} d\alpha$$

と表わそう．ここで，2-チェイン $\sigma(\varepsilon)$ は γ に線分 $[\varepsilon, 1]$ のあらゆる数を掛けて得られるものである．2-チェイン $\sigma(\varepsilon)$ の境界には，γ の他に道 $\varepsilon\gamma$ と2本の垂直線分がある．形式 α の垂直線分での積分は0であり，$\varepsilon\gamma$ での積分は ε と共に0に近づく．

今や，2-形式 $d\alpha$ の不変性と，微分同相 F が数を掛けることと可換なことから，どんな道 γ に対しても

$$\int_{F\gamma}\alpha = \int_\gamma \alpha$$

となることが分る．したがって，微分同相 F は1-形式 α を保つ．▮

定義　**接触ベクトル場のシンプレクティック化**とは，次のように構成されたものである．ベクトル場を接触微分同相の(局所) 1-パラメーター群の速度場と考えよう．微分同相のシンプレクティック化を考えると，シンプレクティック微分同相の1-パラメーター群が得られる．この群の速度場を考えよう．これをもとの接触場のシンプレクティック化という．

定理　接触ベクトル場のシンプレクティック化は，局所 Hamilton ベクトル

場である．その Hamilton 関数は，実数の乗法群の作用に関して斉次1次，つまり，

$$H(\lambda x) = \lambda H(x)$$

であるようにとることができる．逆に，接触多様体 N のシンプレクティック化上の局所 Hamilton ベクトル場で，斉次1次の Hamilton 関数をもつものは，接触多様体 N 上に射影すると接触ベクトル場になる．

証明　接触場のシンプレクティック化が Hamilton 的であるのは，接触微分同相のシンプレクティック化がシンプレクティックであることから分る．Hamilton 関数の増分の斉次性は，シンプレクティック化された微分同相が斉次なこと(すなわち，λ を掛けることと可換であること)から分る．こうして，定理の第1の主張は接触微分同相のシンプレクティック化についての定理から分る．

第2の主張も同じようにして，シンプレクティック微分同相の斉次性から得られる．■

系　ベクトル場のシンプレクティック化は，接触ベクトル場の作る Lie 環から，斉次1次の Hamilton 関数をもつ局所 Hamilton ベクトル場全体の作る Lie 環の上への同型写像である．——

証明は明らかである．

H. 接触構造に対する Darboux の定理　Darboux の定理は接触構造の局所一意性の定理である．これは次の3つのどの形で定式化してもよい．

定理　同じ次元のすべての接触多様体は，局所的には互いに接触微分同相である．(すなわち，接触多様体の1点 u の十分小さい近傍 U から他の接触多様体の1点 v の近傍 V の上への微分同相があって，u を v に移し，近傍 U の平面場を近傍 V の平面場に移す.)

定理　$2m-1$ 次元の接触多様体は，局所的には，m 次元空間の接触要素の作る多様体に接触微分同相である．

定理　$2n+1$ 次元多様体上の非退化な超平面場を与える微分形式は，すべて或る局所座標系では《標準形》

$$\omega = xdy + dz$$

の形に書き表わされる．ここで，$x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$，z は局所座

標である．——

明らかに，先の2つの定理は第3の定理から導かれる．そして，第3の定理もシンプレクティック構造を与える2-形式の標準形に関する類似の Darboux の定理(§43参照)から得られる．

Darboux の定理の証明 接触多様体 N のシンプレクティック化 T を考えよう．$2n+2$ 次元シンプレクティック多様体 T 上には，正準1-形式 α，非退化な2-形式 $d\alpha$，多様体 N 上への射影 π が，また T の各点での垂直方向が定められている．

接触多様体 N 上に与えられた1次微分形式 ω は，N の各点で接触形式を与えている．この接触形式の全体は，シンプレクティック化 T の $2n+1$ 次元部分多様体 S をなしている．射影 π は S を N 上へ微分同相に写し，垂直線は S と0でない角度で交わる．

シンプレクティック化 T の中に構成されたこの曲面 S の点 P で，$\pi(P)$ が多様体 N の考えている点になるものを考えよう．T はシンプレクティック多様体だから，点 P の近くで局所座標系を選んで，

$$d\alpha = dp_0\wedge dq_0+\cdots+dp_n\wedge dq_n$$

を満たし，座標平面 $p_0=0$ が多様体 S に一致するようにできる．(§43参照．シンプレクティックの場合の Darboux の定理を証明する際，第1座標は任意に選べた．)

さて，1-形式 $p_0dq_0+\cdots+p_ndq_n$ の外微分が $d\alpha$ であることに注意すると，局所的には

$$\alpha = p_0dq_0+\cdots+p_ndq_n+dw$$

と書ける．ここで，関数 w は座標原点で0であるようにとれる．とくに曲面 $p_0=0$ 上では，形式 α は次の形になる．

$$\alpha|_{p_0=0} = p_1dq_1+\cdots+p_ndq_n+dw.$$

射影 π によって，座標 $p_1,\cdots,p_n$；q_0；$q_1,\cdots,q_n$ と関数 w を接触多様体 N 上へ移すことができる．より正確には，関数 x,y,z を，式

$$x_i(\pi A) = p_i(A),\qquad y_i(\pi A) = q_i(A),\qquad z(\pi A) = w(A)$$

で定める．ここに，A は曲面 $p_0=0$ の点である．

このとき

$$\omega = xdy+dz$$

であるから，関数 $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z)$ が座標系をなすことだけが問題である．これには関数 w の q_0 に関する偏微分が0でないこと，いい換えると，1-形式 α の q_0 方向の座標ベクトルでの値が0でないことを示せばよい．さらにこれは，q_0 座標ベクトルと垂直ベクトルの対における2-形式 $d\alpha$ の値が0でないことと同値である[†)]．

---

†) 正準1-形式 α の定義と $d\alpha$ の表示(E項参照)による．

ところが，q_0 座標ベクトルは座標平面 $p_0=0$ のすべてのベクトルと歪直交している．さらに，垂直ベクトルとも歪直交しているとすれば，すべてのベクトルと歪直交することになり，形式 $d\alpha$ の非退化性に反する．つまり，$\partial w/\partial q_0 \neq 0$ である．∎

I. 接触 Hamilton 関数 接触多様体 N の接触構造が1次微分形式 ω で与えられているとし，この形式 ω を固定しておく．

定義 接触多様体 N のシンプレクティック化 T への **ω-埋め込み**とは，N の点 A に，形式 ω を点 A での接平面 TN_A に制限したもの(これを $\omega|_A$ とも書く)を対応させる写像である．

定義 1-形式 ω を固定した接触多様体 N 上の接触ベクトル場 X の**接触 Hamilton 関数**とは，多様体 N 上の関数 K で，点 A での値 $K(A)$ が，場 X のシンプレクティック化の斉次 Hamilton 関数 H の $\omega|_A$ における値に等しいものをいう．ここで，$\omega|_A$ は ω-埋め込みによる点 A の像を表わす．つまり，

$$K(A) = H(\omega|_A).$$

定理 1-形式 ω を選んだ接触多様体 N 上の接触ベクトル場 X の接触 Hamilton 関数 K は，形式 ω の接触場 X での値に等しい．つまり，

$$K = \omega(X).$$

証明 通常の Hamilton 関数 H の道に沿っての増分を，ベクトル場と接触構造で表わす表示を使う．

シンプレクティック化 T の点 B で Hamilton 関数 H を計算しよう．点 B から垂直線分 $\{\lambda B\}_{0<\lambda\leq 1}$ を引く．この線分を，ベクトル場 X が与える相流のシンプレクティック化の作用のもとで，短時間 τ だけ動かすと，或る2次元帯状領域 $\sigma(\tau)$ を埋めつくす．$\lambda\to 0$ のとき $H(\lambda B)$ $(=\lambda H(B))\to 0$ であるから，点 B での H の値は，極限値

$$H(B) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\iint_{\sigma(\tau)} d\alpha$$

となる(§48, C 項参照)．しかし，形式 $d\alpha$ の帯状領域 $\sigma(\tau)$ での積分は，$\sigma(\tau)$ の境界のうち点 B の軌跡になっている部分での1-形式 α の積分に一致する(境界の他の部分での積分は0である)．したがって，この2重積分は1-形式 α の軌跡の部分での積分に等しく，上の極限は場 X の相流のシンプレクティック化の速度ベクトル Y における1-形式 α の値になる．結局，$K(\pi(B))=H(B)=\alpha(Y)=\omega(X)$ となる．∎

J. 計算公式 さて，形式 ω が標準形

$$\omega = xdy+dz, \qquad x=(x_1,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,\cdots,y_n)$$

をしているような Darboux の定理での座標を使うことにしよう．

問 接触 Hamilton 関数 $K=K(x,y,z)$ をもつ接触場の成分を求めよ．

［解］ 接触流の方程式は次の形をしている．

$$\begin{cases} \dot{x}=-K_y+xK_z, \\ \dot{y}=K_x, \\ \dot{z}=K-xK_x. \end{cases}$$

シンプレクティック化 T の点は，$2n+2$ 個の数 x_i, y_i, z, λ で与えることができる．(x,y,z) は接触多様体 N の点 A の座標で，λ は T の点を $\lambda\omega|_A$ と表わす数である．

この座標では $\alpha=\lambda xdy+\lambda dz$ である．したがって，座標系 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ を

$$\boldsymbol{p}=(p,p_0),\quad p=\lambda x,\ p_0=\lambda,$$
$$\boldsymbol{q}=(q,q_0),\quad q=y,\ q_0=z$$

とおけば，形式 α は標準的な形

$$\alpha=\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q},\quad d\alpha=d\boldsymbol{p}\wedge d\boldsymbol{q}$$

をしている．このとき，乗法群 $\mathbf{R}^\times$ の作用 T_μ は，$\boldsymbol{p}$ に数 μ を掛けることである．つまり，

$$T_\mu(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=(\mu\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}).$$

接触 Hamilton 関数 K は，通常の Hamilton 関数 $H=H(p,q,p_0,q_0)$ によって式

$$K(x,y,z)=H(x,y,1,z)$$

で表わされる．関数 H は $\boldsymbol{p}$ に関して1次斉次である．したがって，点 (x,y,z) での K の偏微分と，点 $(p=x, q=y, p_0=1, q_0=z)$ での H の偏微分とは関係式

$$H_q=K_y,\quad H_{q_0}=K_z,$$
$$H_p=K_x,\quad H_{p_0}=K-xK_x$$

で結びついている．故に，Hamilton 関数 H に対する Hamilton 方程式は，点 $(x,y,1,z)$ で

$$\dot{x}+x\dot{\lambda}=-K_y,\quad \dot{\lambda}=-K_z,$$
$$\dot{y}=K_x,\quad \dot{z}=K-xK_x$$

の形になり，上の答が得られる．∎

問 接触 Hamilton 関数 K, K' をもつ接触場の Poisson 括弧の接触 Hamilton 関数を求めよ．

［解］ $(K,K')+K_zEK'-K'_zEK$，ここで，括弧は変数 x,y に関する通常の Poisson 括弧であり，E は Euler 作用素 $(EF=F-xF_x)$ である．

前問の解の記号を用い，斉次 Hamilton 関数 H, H' の点 $(p=x,\ p_0=1,\ q=y,\ q_0=z)$ での通常の Poisson 括弧を，接触 Hamilton 関数 K, K' で表わさなければならない．

$$(H,H') = H_q H'_p - H_p H'_q$$
$$= H_q H'_p - H_p H'_q + H_{q_0} H'_{p_0} - H_{p_0} H'_{q_0}$$

であるから，前問の解の偏微分の値を代入すると，考えている点で

$$(H,H') = K_y K'_x - K_x K'_y + K_z (K' - xK'_x) - K'_z (K - xK_x)$$

となる．

K. Legendre 多様体 シンプレクティックな相空間の Lagrange 部分多様体は，接触多様体の場合には，**Legendre 多様体**と呼ばれる興味深い多様体のクラスに対応している．この名称は，それが Legendre 変換と密接に関わっていることによる．

定義 $2n+1$ 次元接触多様体の **Legendre 部分多様体**とは，接触平面場の n 次元積分多様体のことである．

いい換えると，この積分多様体は非退化な超平面場の積分多様体のとりうる最高次元をもつものである．

例1 S が m 次元多様体 M のどんな次元の部分多様体であっても，S に接する接触要素の作る集合は，M のすべての接触要素の作る $2m-1$ 次元接触多様体 N の $m-1$ 次元 Legendre 部分多様体である．

例2 座標 $(x_1, \cdots, x_n; f)$ をもつ $n+1$ 次元 Euclid 空間 E において，関数 $f=\varphi(x)$ のグラフ G の接平面全体の集合を考えると，グラフの空間 E で垂直でない超平面全体の作る $2n+1$ 次元空間 N の Legendre 部分多様体になる．(空間 N の接触構造は，1-形式

$$\omega = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n - df$$

で与えられ，座標 (p, x, f) をもつ平面とは，座標 (x, f) の点を通り，平面 $f=p_1x_1+\cdots+p_nx_n$ に平行な平面のことである.)

Legendre 変換はこれらの用語では次のように記述される．

他の $2n+1$ 次元接触空間 N' を考え，座標 (P, X, F) をもち，形式

$$\Omega = PdX - dF$$

で接触構造が与えられているとしよう．

Legendre 対合とは，座標 (p, x, f) をもつ空間 N の点を，座標

$$P = x, \qquad X = p, \qquad F = px - f$$

をもつ空間 N' の点に写す変換のことである．

容易に分るように，Legendre 対合は空間 N の接触構造を空間 N' の接触構造に移している．また，明らかに，

定理 接触多様体から他の接触多様体の上への微分同相が，接触平面を接触平面に写していれば，各 Legendre 多様体を Legendre 多様体に写す．——

とくに，Legendre 対合の作用のもとで，関数 φ のグラフ G の接平面が作る Legendre 部分多様体 S は，Legendre 多様体 S' に写される．この多様体 S' を**多様体 S の Legendre 変換**という．

座標 (X, F) をもつ空間 E' 上へ(P 方向に平行に)多様体 S' を射影すると，一般には，像 G' は滑らかな多様体でなく特異点をもつ．この像 G' を**関数 φ のグラフ G の Legendre 変換**という．

関数 φ が凸であれば，G' 自身も或る関数 $F=\Phi(X)$ のグラフとなる．このとき，関数 Φ を**関数 φ の Legendre 変換**という．

別の例として，Riemann 多様体 M 上の測地流の作用による，向きづけられた接触要素の運動を考えよう．《初期波面》として，M の或る滑らかな部分多様体 S をとろう (S は何次元でもよい)．S に接する向きづけられた接触要素の全体は，あらゆる接触要素の作る空間の Legendre 多様体となっている．前定理より，

系 波面に接する接触要素全体の族は，測地流の作用のもとで時間 t 後には，接触要素全体のなす空間の或る Legendre 多様体に写される．——

次のことを注意しなければならない．この新しい Legendre 多様体は，或る滑らかな多様体に接する接触要素全体の族とはなっていないかも知れない．波面上に特異点が生じうるからである．

このようにして現われる **Legendre 特異点**は，Lagrange 特異点(付録12参照)と同じようにして記述できる．$2n+1$ 次元接触多様体 L が **Legendre バンドル**であるとは，ファイバーがすべて n 次元 Legendre 多様体であるバンドルのことである．**Legendre 特異点**とは，$2n+1$ 次元接触多様体 L の n 次元 Legendre 部分多様体から，バンドル L の $n+1$ 次元底空間上への射影の特異点のことである．

微分形式 $\alpha=xdy+dz$ (ここで，$x=(x_1, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, \cdots, y_n)$) で与えられる接触構造をもつ空間 $\mathbf{R}^{2n+1}$ を考えよう．射影 $(x, y, z)\mapsto(y, z)$ は Legendre

バンドル L_0 を与えている.

Legendre バンドル L_1, L_2 が**同値**であるとは, L_1 から L_2 の上への微分同相があって, L_1 の接触構造やファイバーを L_2 の接触構造やファイバーに写すときにいう. **すべての Legendre バンドルは**, その各点の近傍で, **特定の Legendre バンドル L_0 に同値である**ことを示すことができる.

バンドル空間の接触構造は, 各ファイバー上に射影空間の局所構造を与えている. Legendre 同値はこの構造を保つ, つまり, 局所的にファイバーの射影変換を与えている.

次の定理によって, Legendre 部分多様体と Legendre 写像を, 母関数を使って局所的に記述できる.

定理 添数の集合 $(1, \cdots, n)$ の互いに交わらない部分集合への分割 $I \cup J$ と, n 個の変数 x_i $(i \in I)$, y_j $(j \in J)$ の関数 $S(x_I, y_J)$ が何であっても, 式

$$y_I = \frac{\partial S}{\partial x_I}, \qquad x_J = -\frac{\partial S}{\partial y_J}, \qquad z = S - x_I \frac{\partial S}{\partial x_I}$$

は $\mathbf{R}^{2n+1}$ の Legendre 部分多様体を与える. 逆に, $\mathbf{R}^{2n+1}$ の Legendre 部分多様体は, その各点の近傍で部分集合 I の 2^n 通りの可能な選び方の少なくとも 1 つを使って, 上の式で与えられる. ——

証明は, Legendre 多様体上では $dz + x dy = 0$ であり, したがって, $d(z + x_I y_I) = y_I dx_I - x_J dy_J$ であることによる.

定理の式の S として, 付録12で述べる単純 Lagrange 特異点の一覧表にある関数をとろう. そうすると, Legendre 写像 $(x, y, z) \mapsto (y, z)$ の微小変形で保たれる Legendre 特異点が得られる(つまり, 関数 S を微小に変形しても同値な特異点に移る). $n<6$ のすべての Legendre 写像は, 微小変形によって, A_k $(1 \leq k \leq 6)$, D_k $(4 \leq k \leq 6)$, E_6 型の特異点に局所同値な特異点をもつ写像に変換される.

とくに, 7 より低い次元の空間における一般の位置にある波面の特異点の一覧表が得られる[†].

通常の 3 次元空間では, この一覧表は

$$A_1 : S = \pm x_1^2, \qquad A_2 : S = \pm x_1^3, \qquad A_3 : S = \pm x_1^4 + x_1^2 y_2$$

---

†) V. I. Arnold [15] 参照.

となる．ここで，$I=\{1\}$，$J=\{2\}$，$n=2$ である．

ここで述べた Legendre 多様体を，Legendre バンドルの底空間(すなわち，座標 (y_1, y_2, z) をもつ空間)上へ射影すると，それぞれ A_1 の場合には単純点，A_2 の場合には折り目，A_3 の場合には燕の尾(図 246)の特異点を生じる．

こうして，3次元空間の一般の位置にある波面は，折り目と《燕の尾》の型の特異点だけをもっている．波面が動いていくと，或る時点で，さらに3つの A_4, D_4^-, D_4^+ 型の特異点の分岐が見られる．(付録12では，これらに対応して，波面が動くときその特異点が掃き寄せられてできる焦面が描かれている.)

問1 平面上の楕円の各内向き法線上に，長さ t の線分をおく．その端点が作る曲線を描き，その特異点と，t が変化するときの分岐を調べよ．

問2 3次元空間の3軸楕円面で同じことをおこなえ．

L. 接触化 接触多様体のシンプレクティック化と並んで，0にホモローグなシンプレクティック構造をもつシンプレクティック多様体の接触化が存在する．

シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) の接触化 E^{2n+1} は，ファイバー $\mathbf{R}$ をもつ M^{2n} 上のバンドルとして作られる．

M 上の点 x の十分小さい近傍 U で，U 上に $\omega=dp\wedge dq$ なる正準座標系 (p, q) が存在するものをとる．直積 $U\times\mathbf{R}$ に座標 (p, q, z) を考える．

$dP\wedge dQ=\omega$ なる座標 (P, Q) をもつ別の(同じでもよい)近傍 V から作られた直積 $V\times\mathbf{R}$ に座標 (P, Q, Z) を考える．もし M 上の近傍 U と V が交わっていれば，共通の点のファイバーを同一視して，形式 $dz+pdq=dZ+PdQ=\alpha$ が，大域的に定義されているようにする．($PdQ-pdq$ は $U\cap V$ 上で全微分になっているから，これは可能である.)

この貼り合わせで M^{2n} 上のバンドル E^{2n+1} が得られ，形式 α が E 上の接触構造を与えていることは容易に示される．多様体 E をシンプレクティック多様体 M の**接触化**という．形式 ω が整数係数のコホモロジー類を与えているならば，S^1 をファイバーとする接触化を定義することができる．

M. 1階偏微分方程式の積分 M^{2n+1} を接触多様体，E^{2n} を M の超曲面とする．M の接触構造は，E 上にある幾何構造，とくにいわゆる**特性方向の場**を定める．この幾何構造を解析することによって，一般の1階非線形偏微分方

程式の積分が常微分方程式系の積分に帰着される.

多様体 E^{2n} は，その各点で接触平面と横断的に交わっていると仮定する．このとき，E^{2n} の各点での接平面と接触平面との交わりは $2n-1$ 次元であり，E 上に超平面場が定義される．M^{2n+1} の接触構造は，E^{2n} 上の直線場のうち，その各直線が上述の $2n-1$ 次元平面内にあるものを定めている.

実際，α は M^{2n+1} 上の1-形式で，局所的に接触構造を与えているものとし，$\omega=d\alpha$ とおき，$\mathbf{R}^{2n}$ を E^{2n} の点 x での接触平面とする．$\Phi=0$ を E^{2n} の局所方程式とする(したがって $d\Phi$ は点 x では0でない).

$d\Phi$ の $\mathbf{R}^{2n}$ への制限は，$\mathbf{R}^{2n}$ の0でない線形形式を与える．2-形式 ω は $\mathbf{R}^{2n}$ に線形シンプレクティック空間の構造を与え，したがって $\mathbf{R}^{2n}$ とその双対空間との同型を与えている．それゆえ，0でない1-形式 $d\Phi|_{\mathbf{R}^{2n}}$ には，$d\Phi(\cdot)=\omega(\xi,\cdot)$ を満たす $\mathbf{R}^{2n}$ の0でないベクトル ξ が対応している．ベクトル ξ を多様体 E^{2n} の点 x での**特性ベクトル**という．$d\Phi(\xi)=0$ だから，特性ベクトル ξ は E^{2n} の接空間と $\mathbf{R}^{2n}$ との交わりに属する.

ベクトル ξ は，M 上の接触構造と多様体 E によって一意的には定まらないが，0でない数を掛けることを除けば一意的である．実際，$\mathbf{R}^{2n}$ 上の2-形式 ω や $\mathbf{R}^{2n}$ 上の1-形式 $d\Phi$ も，0でない数を掛けることを除いて定まっているからである.

特性ベクトル ξ の方向(つまり，ξ を含む直線)は，多様体 E の各点で M の接触構造によって一意的に定まっている.

こうして，接触多様体 M の超曲面 E 上に，特性方向の場が得られる.

特性方向場の積分曲線を**特性曲線**という.

さて，超曲面 E^{2n} の $n-1$ 次元部分多様体 I が，接触場の積分多様体であるとする(したがって，I の各点での接平面は接触平面に含まれている).

定理 E^{2n} 上の特性曲線が I の点 x で I に接していないならば，点 x の近くで，I の点を通る E^{2n} 上の特性曲線の集合は M^{2n+1} の Legendre 部分多様体 L^n をなす.

証明 ξ を特性ベクトルからなる E^{2n} 上のベクトル場とする．E^{2n} 上でホモトピー公式(§36, G 項参照)

$$L_\xi\alpha = di_\xi\alpha + i_\xi d\alpha$$

が成り立つ.

ところで，特性ベクトルは接触平面に属するから，$i_\xi\alpha=0$ である．したがって E^{2n} 上では $L_\xi\alpha=i_\xi\omega$ である．しかし，1-形式 $i_\xi\omega$ は接触平面と E^{2n} の接平面との交わりの上では 0 になる(なぜなら，接触平面上では $i_\xi\omega=d\Phi$ であり，E の接平面上では $d\Phi=0$ である)．それゆえ，E の接平面上では $i_\xi\omega=c\alpha$ となる．つまり，超曲面 E 上で

$$L_\xi\alpha = c\alpha$$

となる(ここで，c は点 x の近傍で滑らかな関数である)．

さて，$\{g^t\}$ を場 ξ の(局所)相流とし，η を E の接ベクトルとする．$\eta(t)=g^t_*\eta$，$y(t)=\alpha(\eta(t))$ とおくと，関数 y は線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt}=c(t)\,y(t)$$

を満たす.

$\eta(0)$ が I に接しているならば，$y(0)=\alpha(\eta(0))=0$ である．したがって $y(t)=\alpha(\eta(t))=0$ であり，すべての t について $\eta(t)$ は接触平面上にある．したがって，g^tI は接触場の積分多様体である．それゆえ，小さい t に対する $\{g^tI\}$ の全体は Legendre 多様体をなしている. ▮

例 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 上に座標$(x_1, \cdots, x_n; p_1, \cdots, p_n; u)$と，1-形式 $\alpha=du-pdx$ で与えられる接触構造とを考える．関数 $\Phi(x, p, u)$ は微分方程式 $\Phi(x, \partial u/\partial x, u)=0$ と，空間 $\mathbf{R}^{2n+1}$ ($\mathbf{R}^n$ 上の関数の **1-ジェットの空間**)の部分多様体 $E=\Phi^{-1}(0)$ を与える.

方程式 $\Phi=0$ の**初期条件**とは，座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもつ n 次元空間の或る $n-1$ 次元超曲面 Γ 上での関数 u の値 f を与えることである.

初期条件は Γ の各点で $n-1$ 個の独立な方向への u の偏微分を定める．Γ に横断的な方向への偏微分は，一般には方程式から求めることができる．このとき，さらに陰関数の定理の条件が満たされるなら，初期条件は**非特性的**であるという.

非特性的な初期条件は，形式 α の $n-1$ 次元積分多様体 I を与える(I は写像 $u=f(x)$，$p=p(x)$，$x\in\Gamma$ のグラフになっている)．I と交わる E 上の特性曲線は，$\mathbf{R}^{2n+1}$ の Legendre 部分多様体を作るが，これは写像 $u=u(x)$，$p=$

$\partial u/\partial x$ のグラフになっている．得られた関数 $u(x)$ は，初期条件 $u|_\Gamma=f$ を満たす方程式 $\Phi(x, \partial u/\partial x, u)=0$ の解である．

関数 u を求めるには，E 上の特性曲線に対する $2n$ 個の1階常微分方程式からなる系を解き，一連の《代数的な》操作を施せばよいことを注意しておく．

付録5　対称性をもつ力学系

E. Noether の定理によると，力学系の対称性の1-パラメーター群は第1積分を定める．系に対称性のより大きい群が働いていると，いくつかの第1積分が生じる．

相空間におけるこれらの第1積分の共通のレベル多様体は相流の不変多様体である．このような不変多様体にはそれを不変にする対称性の群の部分群が働いている．多くの場合，この不変多様体をこの部分群で割った商多様体を考えることができる．この商多様体を簡約相空間という．簡約相空間は自然なシンプレクティック構造をもつ．もとの Hamilton 力学系はその上に再び Hamilton 力学系を定める．

第1積分の共通のレベル多様体に相空間を分割すると，一般には特異点が生じる．相平面のエネルギー・レベル曲線への分割がその例である．

この付録では力学系を簡約相空間の中で考察し，もとの相空間の不変多様体との関係を調べる．これらの問題はすべて，Jacobi と Poincaré によってすでに研究されている(多体問題における《交点の消去》†)，対称性をもつ系における《階数の低減》，剛体の《定常回転》，等々)．現代的な用語による詳しい叙述は，S. Smale [2]，J. Marsden-A. Weinstein [1] にある．

A. Lie 群の Poisson 作用　シンプレクティック多様体 (M^{2n}, ω^2) を考えよう．その上には Lie 群 G がシンプレクティック微分同相の群として働いているとする．群 G の1-パラメーター部分群はおのおの M 上に局所 Hamilton 相流として働いている．多くの重要な場合に，この相流は1価の Hamilton 関数をもつ．

例　V を滑らかな多様体，G をその微分同相からなる或る Lie 群とする．各微分同相は V 上の1-形式を1-形式に移す．したがって，群 G は余接バンドル $M=T^*V$ 上に働く．

余接バンドル M 上には常に正準1-形式 α《$=pdq$》と自然なシンプレクティック構造 $\omega=d\alpha$ が存在することを思いおこそう．群 G の M 上の作用は1-形式 α を，したがっ

†) Whittaker [1], p. 341 参照.

て 2-形式 $d\alpha$ を保つからシンプレクティックである.

群 G の 1-パラメーター部分群 $\{g^t\}$ は M 上に相流を定める. この相流が 1 価 Hamilton 関数をもつことはすぐ分る. つまり, Noether の定理の式により, その Hamilton 関数 H は

$$H(x) = \alpha\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t x\right), \quad \text{ここで} \quad x \in M$$

によって与えられる. ——

ここで次のことを仮定しよう. 連結シンプレクティック多様体 M 上に Lie 群 G のシンプレクティックな作用が与えられ, 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の各元 a には, 1 価 Hamilton 関数 H_a をもつシンプレクティック微分同相の 1-パラメーター群が対応しているとする. これらの Hamilton 関数は定数項を除いて定まり, この定数は H_a が a に線形に依存するように選べる. このためには, $\mathfrak{g}$ の 1 つの基底を定め, その基底ベクトルに対しては Hamilton 関数の定数は任意に定める. そして, $\mathfrak{g}$ の他の任意の元 a に対応する Hamilton 関数は, a を基底ベクトルの 1 次結合として表わしたときと同じ係数をもつ基底ベクトルに対応する Hamilton 関数の 1 次結合として定めれば十分である.

こうして, M 上の 1 価 Hamilton 関数をもつ Lie 群 G のシンプレクティックな作用によって, 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ から M 上の Hamilton 関数の作る Lie 環への線形写像が作られる. $\mathfrak{g}$ の 2 つの元 a, b の交換子積 $[a, b]$ には Poisson の括弧 (H_a, H_b) またはこれと定数だけ異なる関数 $H_{[a,b]}$ が対応する:

$$H_{[a,b]} = (H_a, H_b) + C(a, b)$$

注意　この式で定数項 C が現われるのは, 次の興味深い現象, すなわち, (大域的) Hamilton 場のなす Lie 環の 2 次元コホモロジー類の存在によるものである.

$C(a, b)$ は Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の双線形歪対称関数である. Jacobi の恒等式から次の等式を得る.

$$C([a, b], c) + C([b, c], a) + C([c, a], b) = 0.$$

Lie 環上の双線形歪対称関数がこの性質をもつとき, Lie 環の **2 次元コサイクル**といわれる.

Hamilton 関数の定数を別のものに選ぶとコサイクル C は C' になる. ここで,

$$C'(a, b) = C(a, b) + p([a, b])$$

であり, p は $\mathfrak{g}$ 上の線形関数である.

このようなコサイクル C' はコサイクル C に**コホモローグ**であるといい, 互いにコホ

モローグなコサイクルの類を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**コホモロジー類**という．

こうして，1価 Hamilton 関数が存在するような群 G のシンプレクティックな作用は群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の2次元コホモロジー類を定める．このコホモロジー類は，交換子積の Hamilton 関数が Hamilton 関数の Poisson 括弧になるような作用からの，考えている作用のずれを量っている．

定義　シンプレクティック多様体上の連結 Lie 群の作用は次の性質をもつとき **Poisson** であるといわれる．すなわち，1-パラメーター群に対する Hamilton 関数が1価で，かつ Lie 環の元に線形に依存し，交換子積の Hamilton 関数が Hamilton 関数の Poisson 括弧に等しく選べるときである：

$$H_{[a,b]} = (H_a, H_b).$$

いいかえると，群の Poisson 作用はこの群の Lie 環から Hamilton 関数のなす Lie 環への準同型を与える．

例　V を滑らかな多様体，G を V 上に微分同相の群として働く Lie 群とする．$M=T^*V$ を普通のシンプレクティック構造 $\omega=d\alpha$ をもった，多様体 V の余接バンドルとする．1-パラメーター群の Hamilton 関数を前のように定める：

$$H_a(x) = \alpha\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g^t x\right), \qquad x \in T^*V\,^{\dagger)}. \tag{1}$$

定理　今与えられた作用は Poisson である．

証明　1-形式 α の定義から，Hamilton 関数 H_a は《運動量に関して》(つまり各余接空間上で)斉次1次である．したがってその Poisson 括弧も斉次1次である．ゆえに，関数

$$H_{[a,b]} - (H_a, H_b)$$

は運動量に関して斉次1次である．これは定数であるから0に等しい．∎

同様にして，接触作用のシンプレクティック化は Poisson であることが分る．

例　V を3次元 Euclid 空間，G をその運動からなる6次元の群とする．Lie 環の基底は6個の1-パラメーター群から作られる．すなわち，座標軸 q_1, q_2, q_3 に沿う速度1の平行移動と，これらの軸の回りの角速度1の回転である．これに対応する Hamilton 関数は(1)式によって，(普通の記号で) p_1, p_2, p_3; M_1, M_2, M_3 に等しい．ただし $M_1=q_2p_3-q_3p_2$, 等々である．上で証明した定理により，これら6個の関数から2個ずつとった Poisson 括弧はそれぞれ対応する1-パラメーター群の交換子積の Hamilton 関数に等しい．——

---

†)　g^t は a に対応する1-パラメーター群である．

シンプレクティック多様体 M 上の群 G の Poisson 作用は，多様体 M から群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の共役空間 $\mathfrak{g}^*$ への写像 P を定める：

$$P: M \longrightarrow \mathfrak{g}^*.$$

すなわち，M の点 x を固定して，$a \in \mathfrak{g}$ に Hamilton 関数の点 x における値 $H_a(x)$ を対応させる $\mathfrak{g}$ 上の関数

$$p_x(a) = H_a(x)$$

を考えよう．この $\mathfrak{g}$ 上の線形関数 p_x が点 x に対応する $\mathfrak{g}^*$ の元である：

$$P(x) = p_x$$

J. Souriau [1] に従って写像 P を**モーメント（運動量）**といおう．モーメントの値は常に線形空間 $\mathfrak{g}^*$ のベクトルであることに注意しよう．

例　V を滑らかな多様体，G を V 上に微分同相の群として働いている Lie 群とする．$M=T^*V$ を余接バンドル，H_a を前に作られた M 上の G の Poisson 作用の Hamilton 関数とする（式(1)を見よ）．

このとき，《モーメント》写像 $P: M \to \mathfrak{g}^*$ は次のように表わすことができる．M 上の1点 x を固定して，これに G の元を作用させることによって得られる写像 $\Phi: G \to M$ を考えよう（$\Phi(g)=gx$）．M 上の正準1-形式 α は G 上の1-形式 $\Phi^*\alpha$ を引きおこす．これを G の単位元における接空間に制限すると Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の線形形式となる．

こうして，M の各点 x に $\mathfrak{g}$ 上の線形形式を対応させることができた．この写像が考えている Poisson 作用のモーメントであることを見るのは容易である．

とくに，V が3次元 Euclid 空間で，G が原点 O の回りの回転群ならば，モーメントの値は普通の角運動量ベクトルである．G が軸の回りの回転のなす群ならば，モーメントの値はこの軸に関する角運動量である．G が平行移動群ならば，モーメントの値は普通の運動量ベクトルである．

定理　連結 Lie 群 G の Poisson 作用はモーメント写像 P によって，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の共役空間 $\mathfrak{g}^*$ 上の群 G の共役随伴作用に移される（付録2参照）．つまり，次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ g\ } & M \\ {\scriptstyle P}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P} \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\ \mathrm{Ad}_g^*\ } & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

系　Hamilton 関数 $H: M \to \mathbf{R}$ は M 上の群 G の Poisson 作用に関して不変であるとする．このとき，モーメントは Hamilton 関数 H をもつ系の第1積

分である．

定理の証明　1-パラメーター群 h^t の Hamilton 関数 H_a は，微分同相 g により 1-パラメーター群 gh^tg^{-1} の Hamilton 関数 $H_{\mathrm{Ad}_g a}$ に写されるというのが定理の主張である．g^s を Hamilton 関数 H_b をもつ 1-パラメーター群とする．関数 $H_a(g^s x)$ と $H_{\mathrm{Ad}_{g^s} a}(x)$ の ($s=0$ における) s に関する微分が一致することを示せば十分である．前者の微分は Poisson 括弧 (H_a, H_b) の点 x での値に等しい．後者の微分は $H_{[a,b]}(x)$ である．あとは群の作用が Poisson であることによる．∎

系の証明　Hamilton 関数 H をもつ相流の方向へのモーメントの [$a\in\mathfrak{g}$ に対する] 成分の微分は 0 である．なぜなら，それは群 G の [a に] 対応する 1-パラメーター部分群の相流の方向への関数 H の微分に等しいからである．∎

B. 簡約相空間　シンプレクティック多様体 M 上に群 G の Poisson 作用が与えられているとする．モーメントのレベル集合，すなわち点 $p\in\mathfrak{g}^*$ の写像 P による逆像を考えよう．この集合を M_p で表わす(図238)．

$$M_p = P^{-1}(p)$$

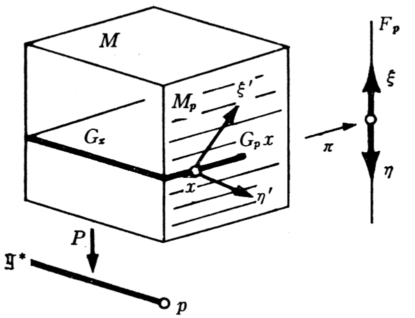


図238　簡約相空間

多くの重要な場合に，集合 M_p は多様体になる．たとえば，p がモーメントの正則値，すなわち，写像 P の微分が集合 M_p の各点で M の接空間を $\mathfrak{g}^*$ の接空間の上へ写しているときがそうである．

M 上に作用している Lie 群 G は一般には集合 M_p を互いに移しかえる．一方，共役随伴表現における点 p の固定部分群(すなわち，$\mathrm{Ad}_g^* p=p$ なる群 G の元 g からなる部分群)は M_p を動かさない．この固定部分群を G_p で表わそう．群 G_p は Lie 群であり，モーメントのレベル集合 M_p 上に働いている．

簡約相空間は M_p を群 G_p の軌道に分割することにより得られる．この分割

が意味をもつためにはいくつかの仮定が必要である．たとえば，次のことを仮定すれば十分である．

1) p は正則値である，したがって M_p は多様体である．

2) 固定部分群 G_p はコンパクトである．

3) 群 G_p の元の M_p 上の作用は不動点をもたない．

注意 これらの条件は弱めることができる．たとえば，群 G_p がコンパクトであるかわりに，作用が固有である(すなわち，写像 $(g, x) \mapsto (g(x), x)$ によるコンパクト集合の逆像がコンパクトである)ことを要請してもよい．たとえば，群の左または右移動によるそれ自身の上への作用は常に固有である．

もし条件 1), 2), 3) が満たされれば，G_p が M_p の上に作用してできる軌道の集合上に滑らかな多様体の構造を容易に定義することができる．すなわち，軌道 $G_p x$ に横断的な，軌道の余次元に等しい次元をもつ任意の曲面は点 $x \in M_p$ の近傍におけるチャートを与える．

こうして得られた軌道多様体を**対称性をもった系の簡約相空間**という．

モーメントの値 p に対応する簡約相空間を F_p で表わそう．多様体 F_p はバンドル $\pi: M_p \to F_p$ の底空間で，ファイバーは群 G_p に微分同相である．

簡約相空間 F_p 上には自然なシンプレクティック構造が存在する．すなわち，点 f で F_p に接する任意の 2 つのベクトル ξ, η を考えよう．点 f は多様体 M_p 上の群 G_p の軌道の 1 つである．x をこの軌道上の 1 点とする．F_p の接ベクトル ξ, η は，点 x で M_p に接する或るベクトル ξ', η' から射影 $\pi: M_p \to F_p$ により得られる．

定義 簡約相空間の 1 点における接ベクトル ξ, η の**歪スカラー積**とは，対応するもとのシンプレクティック多様体 M の接ベクトル ξ', η' の歪スカラー積をいう：

$$[\xi, \eta]_p = [\xi', \eta'].$$

定理*) ベクトル ξ, η の歪スカラー積は，点 x や代表元 ξ', η' のとり方に依らず，簡約相空間上にシンプレクティック構造を与える．

系 簡約相空間は偶数次元である．

---

*) このような形でのこの定理は，まず Marsden–Weinstein [1] によって定式化された．多くの特殊な場合には，Jacobi の時代から研究され，Poincaré と彼の後継者により力学に，Kirillov [1] と Kostant [1] により群論に，Faddeev により一般相対論に利用された．

定理の証明　点 x における M の接空間の中に次の 2 つの空間を考えよう.

$T(M_p)$[†]: モーメントのレベル多様体 M_p の接空間,

$T(Gx)$: 群 G の軌道 Gx の接空間.

補題　上の 2 つの空間は TM の中で互いに歪直交補空間になっている.

証明　ベクトル ζ が群 G の軌道の接空間の歪直交補空間に含まれるのは, (定義から)群 G の Hamilton 相流の速度ベクトルと ζ との歪スカラー積が 0 に等しいとき, かつそのときに限る. ところで, この歪スカラー積は ζ 方向に, Hamilton 相流に対応する Hamilton 関数を微分したものに等しい. したがって, 群 G の軌道の歪直交補空間にベクトル ζ が含まれるのは, モーメントを ζ 方向に微分すると 0 に等しいとき, つまり ζ が $T(M_p)$ に含まれるとき, かつそのときに限る. 補題の第 1 の主張は証明された. 第 2 の主張は明らかである. ∎

代表元 ξ', η' は群 G_p の軌道 G_px の接平面に属するベクトルを加えることを除いて定まっている. ところで, この接平面は軌道 Gx の接平面と多様体 M_p の接平面との共通部分である (A 項の最後の定理によって). したがって, ベクトル ξ' に $T(G_px)$ のベクトルを加えても $T(M_p)$ のベクトル η' との歪スカラー積は変らない(補題により, $T(G_px)$ は $T(M_p)$ に歪直交である). ゆえに, ξ' と η' の選び方にはよらないことが示された.

$[\xi, \eta]_p$ の値が軌道 f 上の点 x のとり方によらないことは, M 上の G の作用がシンプレクティックであることと M_p の不変性から導かれる. ゆえに, F_p 上に 2 次微分形式

$$\Omega_p(\xi, \eta) = [\xi, \eta]_p$$

が定まる.

これは非退化である. なぜなら, すべての η に対して $[\xi, \eta]_p = 0$ ならば, 対応する代表元 ξ' は $T(M_p)$ のすべてのベクトルに歪直交する. したがって, ξ' は TM の中で $T(M_p)$ の歪直交補空間に属する. 補題により, $\xi' \in T(Gx)$, すなわち, $\xi = 0$.

形式 Ω_p は閉じている. これを確かめるために 1 つのチャート, すなわち, 1 点 x で群 G_p の軌道に横断的に交わる M_p の曲面 S を考えよう.

このチャート上で形式 Ω_p は, M 全体の上にシンプレクティック構造を与えている 2-形式 ω から, 曲面 S の埋め込みにより誘導された 2-形式として表わされる. 形式 ω は閉じているから, 誘導された形式もまた閉じている. ∎

例 1　$M = \mathbf{R}^{2n}$ を座標 p_k, q_k と 2-形式 $\sum dp_k \wedge dq_k$ をもつ $2n$ 次元 Euclid 空間とする. $G = S^1$ を円周とし, M 上の G の作用は線形振動の Hamilton 関数

---

†) 正確には $T(M_p)_x$ と書くべきであるが混乱はないだろう. 以下の $T(Gx)$, TM 等も同様である.

$$H=\frac{1}{2}\sum(p_k{}^2+q_k{}^2)$$

によって与えられているとする.

このとき，モーメント写像は単に $H:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}$ となり，モーメントの0以外のレベル多様体は球面 S^{2n-1}，商空間は複素射影空間 CP^{n-1} である.

したがって，上の定理は複素射影空間上にシンプレクティック構造を定める. この構造が付録3で構成したものと(実数倍を除いて)一致することを見るのはそう難しくない.

例2 V を Lie 群, G をこの群自身とし，その作用を左移動で与える. このとき，M_p は群の余接バンドル T^*G の部分多様体であって，右移動で群の単位元に移したとき Lie 環の共役空間 $\mathfrak{g}^*$ の或る同一の元に移るようなベクトルからなるものである.

したがって，多様体 M_p は群 G 自身に微分同相で，T^*G の右不変な断面である. 値 p はすべて正則値である.

点 p の固定部分群 G_p は元 p の左移動と右移動による像が同じ元であるような群 G の元からなる. 単位元以外の G_p の元の M_p への作用は(群のそれ自身の右移動に対しては不動点は存在しないから)不動点をもたない.

群 G_p の作用は固有である(p. 378の注意をみよ). したがって，M_p 上の群 G_p の軌道空間はシンプレクティック多様体となる.

ところで，この軌道空間は共役随伴表現における点 p の軌道と容易に同一視される. 実際，T^*G の右不変な断面 M_p を左移動によって群の単位元における余接空間 $\mathfrak{g}^*$ へ写そう. 写像

$$\pi:M_p\longrightarrow\mathfrak{g}^*$$

が得られる.

この写像 π の像は共役随伴表現による点 p の軌道であり，ファイバーは群 G_p の作用の軌道である. 簡約相空間上のシンプレクティック構造は，こうして共役随伴表現の軌道上にシンプレクティック構造を定める.

これが付録3で考えた構造そのものであることは，直接計算することによって困難なく確かめられる.

例3 群 $G=S^1$ を円周とし，G は多様体 V 上に不動点なしに働いていると

する．このとき，余接バンドル $M=T^*V$ 上に円周 G の Poisson 作用が生じる．モーメントの(M で余次元1の)レベル多様体 M_p と(M より2次元低い)商多様体 F_p を定義することができる．

さらに，配位空間 V 上の群の各軌道上の点を同一視することにより V の商多様体を作ることができる．この商空間を W で表わそう．

定理　簡約相空間 F_p は配位商空間 W の余接バンドル T^*W にシンプレクティック微分同相である．

証明　[$p=0$ とする.]　$\pi: V\to W$ を商化写像，$\omega\in T^*W$ を点 $w=\pi v$ における W の1-形式とする．V 上の形式 $\pi^*\omega$ は点 v において M_0 に属し，商化の後では F_0 内の点を与える．逆に，F_0 の元は V 上の不変1-形式であって軌道上では0である．これらは W 上の1-形式を与える．こうして得られた写像 $T^*W\to F_0$ がシンプレクティック微分同相であることは容易に分る．

$p\neq 0$ の場合は，次のようにして $p=0$ の場合に帰着される．V 上に，G に関して不変な Riemann 計量を考えよう．M_p と点 v における V の余接平面 T^*V_v との交わり $M_p\cap T^*V_v$ は超平面である．計量を与えている2次形式はこの超平面上においてただ1つの点 $s(v)$ で最小値をとる．ベクトル $s(v)$ を引き去ることにより超平面 $M_p\cap T^*V_v$ は $M_0\cap T^*V_v$ に移され，微分同相 $F_p\to F_0$ が得られる．■

C. 定常回転および不変多様体の分岐の研究への応用　シンプレクティック多様体 M 上に群 G の Poisson 作用が与えられていて，H は G に関して不変な M 上の関数とする．F_p を簡約相空間とする(その定義に必要な条件は満たされているとする)．

Hamilton 関数 H をもつ Hamilton 場はモーメントの各レベル多様体 M_p に接する(モーメントは第1積分であるから)．M_p 上に生じる場は G_p に関して不変であり，簡約相空間 F_p 上の場を与える．この F_p 上のベクトル場を**簡約場**という．

定理　簡約相空間上の簡約場は Hamilton 場である．簡約場の Hamilton 関数の簡約相空間の1点における値は，もとの相空間の対応する点でもとの Hamilton 関数がとる値に等しい．

証明　形式 ω をもつ多様体 M 上の，Hamilton 関数 H をもつ Hamilton 場 X_H を定める関係式は

$$dH(\xi)=\omega(X_H,\xi)\qquad \forall\xi$$

である．この関係式から，F_p 上のシンプレクティック構造の定義により簡約場に対しても同様の関係式が得られる．▌

例　重力(あるいは鉛直線に関して対称なポテンシャル場)の作用のもとにある，不動点に固定された非対称な剛体を考えよう．

配位空間 $SO(3)$ 上に鉛直軸の回りの回転の群 S^1 が働いている．Hamilton 関数は回転で不変だから，簡約相空間上に簡約系が生じる．

この場合には，簡約相空間は配位商空間の余接バンドルとなる(例3，p. 380 を見よ)．配位空間を鉛直軸の回りの回転の群の作用で商化することは，次のようにして Poisson によって行われた．

剛体の位置を正規直交枠 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ で定めよう．この枠のベクトルの3つの鉛直成分は3次元 Euclid 空間のベクトルを定める．このベクトルの長さは1である．(なぜか．)　この **Poisson のベクトル***) $\boldsymbol{\gamma}$ は，もとの枠を鉛直軸の回りの回転を除いて決定する．(なぜか．)

こうして，配位商空間は2次元球面 S^2 となり，簡約相空間は S^2 の余接バンドル T^*S^2 となる．

T^*S^2 上の簡約 Hamilton 関数は，余接ベクトルに関して2次である《簡約運動の運動エネルギー》と，《有効ポテンシャル》(これにはポテンシャル・エネルギーと鉛直軸の回りの回転の運動エネルギーが含まれる)との和になる．

今の場合，簡約相空間へ移行することは《循環座標 φ の消去》にほとんど帰着される．この両者の差は，φ を消去する通常の過程は配位空間または相空間が円周との直積であることを要求するが，われわれの場合にはバンドルであることだけを要求するという点のみにある．配位空間を縮小する犠牲を払えば(すなわち，極に特異点をもつ座標を入れて)，このバンドルを直積に変えることができる．われわれの上のやり方の長所は(座標系の特異点を除いて)，いかなる実際の特異点も極の近傍に存在しないということを明らかにする点にある．

定義　簡約相空間 F_p へ射影したとき，簡約系の平衡点に移るような M 上の相曲線をもとの系の**相対的平衡**という．

---

*)　Poisson は，重い剛体の運動方程式はベクトル γ を使うとかなり簡単な《Euler-Poisson 方程式》

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}-[\boldsymbol{M},\boldsymbol{\omega}]=\mu g[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{l}],\qquad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}=[\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\omega}]$$

の形に書けることを示した．

例　慣性中心に固定された剛体の定常回転は相対的平衡である．

同様にして，重い剛体の鉛直軸の回りの等速度回転は相対的平衡である．

定理　G-不変な Hamilton 関数をもつ系の相曲線が相対的平衡であるのは，それがもとの相空間で群 G の 1-パラメーター部分群の軌道であるとき，かつそのときに限る．

証明　軌道であるような相曲線が 1 点へ射影されることは明らかである．相曲線 $x(t)$ が 1 点へ射影されるならば，一意的に $x(t)=g(t)x(0)$ の形に表わせて，$\{g(t)\}$ は部分群であることが分る．■

系 1　任意の軸対称ポテンシャル場の中の，場の対称軸上の 1 点で固定された非対称な剛体は(対称軸に関する角運動量の各値に対して)少なくとも 2 つの定常回転をもつ．

系 2　軸対称であって，その対称軸上の 1 点で固定された剛体は任意のポテンシャル場において(対称軸に関する角運動量の各値に対して)少なくとも 2 つの定常回転をもつ．——

2 つの系は球面上の関数が臨界点を少なくとも 2 つもつことから出る．

相対的平衡はエネルギーとモーメントの不変多様体の位相型が(エネルギーとモーメントの値を変化させた際に)どう変化するかを調べる場合にも応用される．

定理　モーメント・エネルギー写像

$$P\times H : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*\times \mathbf{R}$$

のモーメントの正則なレベル集合上の臨界点はまさに相対的平衡である．

証明　写像 $P\times H$ の臨界点は，モーメントのレベル多様体 M_p 上で関数 H が条件づき極値となる点である．(というのは，考えているレベル多様体は正則，すなわち，すべての $x\in M_p$ で $P_*TM_x=T\mathfrak{g}_p^*$ となるからである．)

関数 H の M_p 上の条件づき極値点は，G_p により商化するとき簡約 Hamilton 関数の臨界点を与える．(H は G_p に関して不変であるから．)■

相対的平衡や，モーメント・エネルギー写像の特異点を調べることは，実際には簡単なことではなく，重力場の中で非対称な剛体が運動するといった古典的問題においてさえ完全には遂行されていない．重心が慣性軸の 1 つの上にある場合には，S. Smale の論文 [2] のロシア語訳の付録において，S. Katok に

よって調べられた.

この問題では，相空間の次元は6，群は円周，簡約相空間 T^*S^2 は4次元である.

簡約相空間では，エネルギーの正則なレベル多様体は(エネルギーとモーメントの値に依存して)次の4つの型がある： S^3， $S^2\times S^1$， RP^3，3次元球面 S^3 に2つの《把手》$S^1\times D^2$ (D^2 は円板，$\{(x, y)\ ;\ x^2+y^2\leq 1\}$) を貼り合わせて得られる《8の字》.

付録6　2次の Hamilton 関数の標準形

2次の Hamilton 関数は実シンプレクティック変換によっていくつかの標準形に帰着される．この付録ではその標準形の一覧表を与える．この一覧表は，J. Williamson [1] の仕事に基づいて D. M. Galin によって作られた．

Williamson の論文では，任意の体上のシンプレクティック空間における2次形式が扱われ，その標準形が示されている．

A. 記号　Hamilton 関数を

$$H=\frac{1}{2}(Ax, x)$$

の形に書き表わそう．ここで，$x=(p_1, \cdots, p_n; q_1, \cdots, q_n)$ はシンプレクティック基底で書かれたベクトル，A は対称線形作用素である．このとき，正準方程式は次の形をとる．

$$\dot{x}=IAx, \qquad \text{ここで} \quad I=\begin{bmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{bmatrix}.$$

無限小線形シンプレクティック作用素 IA の固有値を Hamilton 関数 H の**固有値**という．同様に，H の Jordan 細胞とは作用素 IA の Jordan 細胞のことである．

Hamilton 関数の固有値には次の4つの型がある：実数の対 $(a, -a)$，純虚数の対 $(ib, -ib)$，4つ組 $(\pm a\pm ib)$，と0．

対の2項または4つ組の4項に対応する Jordan 細胞は常に同じ構造をもつ．

固有値の実部が0のときは偶数次と奇数次の Jordan 細胞を区別しなければならない．このとき，固有値0をもつ奇数次の細胞の数は偶数で，いくつかの対に分れる．

標準形の完全な一覧表は次の通りである．

B. Hamilton 関数　実固有値 $\pm a$ をもつ k 次 Jordan 細胞の対には，次の Hamilton 関数が対応する．

$$H=-a\sum_{j=1}^{k} p_j q_j+\sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}.$$

固有値 $\pm a \pm bi$ をもつ k 次 Jordan 細胞の4つ組には，次の Hamilton 関数が対応する．

$$H = -a\sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b\sum_{j=1}^{k}(p_{2j-1}q_{2j} - p_{2j}q_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2}.$$

固有値0をもつ奇数 k 次 Jordan 細胞の対には，次の Hamilton 関数が対応する．

$$H = \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1} \qquad (k=1 \text{ のときは，} H=0).$$

固有値0をもつ偶数 $2k$ 次 Jordan 細胞には，次の2つの形のうちの1つだけが Hamilton 関数として対応する．

$$H = \pm\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k-1} p_j p_{k-j} - \sum_{j=1}^{k} q_j q_{k-j+1}\right) - \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}$$

$$\left(k=1 \text{ のときは，} H=\pm\frac{1}{2}q_1^2\right).$$

ここで，正負の符号をもつ Hamilton 関数は一方から他方に変換できない．

純虚数固有値 $\pm bi$ をもつ奇数 $2k+1$ 次 Jordan 細胞の対には，次の2つの形のうちの1つだけが Hamilton 関数として対応する．

$$H = \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}(b^2 p_{2j}p_{2k-2j+2} + q_{2j}q_{2k-2j+2}) - \sum_{j=1}^{k+1}(b^2 p_{2j-1}p_{2k-2j+3} + q_{2j-1}q_{2k-2j+3})\right] - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1}.$$

$k=0$ のときは，$H=\pm(b^2 p_1^2 + q_1^2)/2$．正負の符号をもつ Hamilton 関数は一方から他方に変換できない．

純虚数固有値 $\pm bi$ をもつ偶数 $2k$ 次 Jordan 細胞の対には，次の2つの形のうちの1つだけが Hamilton 関数として対応する．

$$H = \pm\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{b^2}q_{2j-1}q_{2k-2j+1} + q_{2j}q_{2k-2j+2}\right) - \sum_{j=1}^{k-1}(b^2 p_{2j+1}p_{2k-2j+1} + p_{2j+2}p_{2k-2j+2})\right] - b^2\sum_{j=1}^{k} p_{2j-1}q_{2j} + \sum_{j=1}^{k} p_{2j}q_{2j-1}.$$

$k=1$ のときは，$H=\pm(q_1^2/b^2 + q_2^2)/2 - b^2 p_1 q_2 + p_2 q_1$．

ここでも，正負の符号をもつ Hamilton 関数は実シンプレクティック変換によって一方から他方に変換できない．

Williamson の定理　実線形シンプレクティック空間は2次形式 H が与えられると，互いに歪直交な実シンプレクティック部分空間の直和に分れて，形式 H はこれらの各部分空間上で上に示した形をもつ形式の和になる．

C. 除去できない Jordan 細胞　《一般の位置》にある個々の Hamilton 関数は重複固有値をもたず，したがって簡単な形になる(すべての Jordan 細胞は1次である)．しかし，個々の Hamilton 関数ではなく，パラメーターに依存する系の族全体を考えると，パラメーターの例外的な値に対して，より複雑な Jordan 構造が現われ得る．そのうちのいくつかは族を少し変動させれば避けられるが，除去できないものもあり，族の小さな変動に際してほんの少し変形されるだけである．族のパラメーターの数 l が有限ならば，l-パラメーター族の中で除去できない Jordan 構造は有限個である．次に述べる Galin の定理によって，任意の l を1つ固定すると，これらの Jordan 構造を数え上げることができる．

$n_1(z)\geq n_2(z)\geq\cdots\geq n_s(z)$ によって，固有値 $z\neq 0$ をもつ Jordan 細胞の次元を表わし，$m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_u$，$\tilde{m}_1\geq\tilde{m}_2\geq\cdots\geq\tilde{m}_v$ (m_j は偶数，$\tilde{m}_j$ は奇数)によって，固有値0をもつ Jordan 細胞の次元を表わす(奇数次元の細胞の各対から1つだけを数える)．

定理　Hamilton 関数全体の空間の中で上に指定した次元の Jordan 細胞をもつ Hamilton 関数の全体は次の余次元 c をもつ．

$$\begin{aligned} c=&\frac{1}{2}\sum_{z\neq 0}\left[\sum_{j=1}^{s(z)}(2j-1)n_j(z)-1\right]\\ &+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{u}(2j-1)m_j+\sum_{j=1}^{v}[2(2j-1)\tilde{m}_j+1]\\ &+2\sum_{j=1}^{u}\sum_{k=1}^{v}\min\{m_j,\tilde{m}_k\}. \end{aligned}$$

(0が固有値でなければ，この和において第1項のみが0でないことに注意しよう.)

系　一般的な形で l 個のパラメーターに依存する線形 Hamilton 系の族の中

には，上式で計算した c が l を越えないような Jordan 細胞をもつ系だけが現われる．l よりも大きい c をもつ場合は，この族を少し動かせば除去される．

系　1または2–パラメーター族においては，次の12通りの Jordan 細胞が除去不可能なものとして現われる：

$$l=1:\quad (\pm a)^2,\ (\pm ia)^2,\ 0^2$$

(ここで，Jordan 細胞はその行列式で表わされている．たとえば，$(\pm a)^2$ はそれぞれ固有値 $a, -a$ をもつ2次の Jordan 細胞の対を意味している)；

$$l=2:\quad (\pm a)^3,\ (\pm ai)^3,\ (\pm a\pm bi)^2,\ 0^4,\ (\pm a)^2(\pm b)^2,$$
$$(\pm ai)^2(\pm bi)^2,\ (\pm a)^2(\pm bi)^2,\ (\pm a)^2 0^2,\ (\pm ai)^2 0^2$$

(残りの固有値は単純である)．——

パラメーターに滑らかに依存する線形 Hamilton 系の任意の族が，パラメーターに滑らかに依存する線形シンプレクティック座標変換によって移される標準形を Galin は計算した．たとえば，もっとも簡単な Jordan 細胞 $(\pm a)^2$ に対しては Hamilton 関数の標準形は

$$H(\lambda)=-a(p_1q_1+p_2q_2)+p_1q_2+\lambda_1p_1q_1+\lambda_2p_2q_1$$

(λ_1, λ_2 はパラメーター)である．

付録7　不動点と閉軌道の近傍における Hamilton 系の標準形

Hamilton 方程式の平衡点の近傍における解の挙動を調べるためには，線形化された方程式を扱うだけでは不十分なことが多い．実際，体積保存に関する Liouville の定理によって，Hamilton 系においては漸近安定な平衡点はありえない．したがって，線形化された系の安定性は常に中立的である．つまり，安定平衡点においては，Hamilton ベクトル場の線形部分の固有値はすべて虚軸上にある．

一般的な形の微分方程式系においては，そのような中立安定性は非線形項がつけ加わると，それがどんなに小さくとも壊されてしまう．Hamilton 系においては事情はもっと複雑である．たとえば，平衡点で Hamilton 関数の 2 次の部分(これはベクトル場の 1 次の部分を定める)が定符号形式であると仮定しよう．このときは，Hamilton 関数はこの平衡点で最大または最小となる．したがって，この平衡点は線形化された系のみならず，もとの非線形系に対しても(漸近的にではなく Liapunov の意味で)安定である．

しかしながら，Hamilton 関数の 2 次の部分は，安定平衡点において必ずしも定符号形式ではない．もっとも簡単な例として，関数 $H=p_1^2+q_1^2-p_2^2-q_2^2$ があげられる．このような 2 次の部分をもつ系の安定性を調べるためには，Hamilton 関数の Taylor 展開のより高次の項，とりわけ 3 次の項(つまり相速度ベクトル場の 2 次の項)を考えなければならない．これを調べるには Hamilton 関数を(したがって Hamilton ベクトル場を)適当な正準変数変換によって，できるだけ簡単な形にもっていくのが便利である．いいかえると，解を調べるには Hamilton 関数と運動方程式ができるだけ簡単になるように，平衡点の近傍の正準座標系を選ぶのが有効である．

一般の(非 Hamilton)ベクトル場に対する同様の問題は簡単に解ける．この場合，一般には平衡点の近傍に適当な座標系をとるとベクトル場は線形になる(これに対応する Poincaré と Siegel の定理は C. L. Siegel [1] にある)．

Hamilton 系の場合には状況はより複雑である．第 1 の困難は，正準な変数

変換によって Hamilton 場を線形の標準形に変換することが一般には不可能であることにある．いいかえると，普通，Hamilton 関数の3次の項を消去することはできるが4次の項をすべて消去することはできない．(このことは，線形系では振動数は振幅に依存しないが，非線形系では一般に振幅に依存するということと関係している.) 今述べた困難は，振動数の変化(周波数変調)を考慮に入れた非線形の標準形を選ぶことにより克服できる．つまり(いわゆる非共鳴な場合には)，平衡点の近傍に作用-角変数を導入して，Taylor 級数の任意に高い次数の項を無視すれば，系が積分可能となるようにできる．

このことから，平衡点に近い初期条件に対しては，十分長い時間の間の系の挙動を調べることができる．しかし，平衡点が Liapunov 安定かどうかを決定するには，これでは不十分である．(なぜならば，無限に長い時間の間には，Taylor 級数の無視した残余項が影響してきて，安定性が壊されることがあり得るからである.) このような安定性は，残余項を無視することなく標準形へ厳密に移行できれば導き出されるであろう．しかしながら，この厳密な移行は一般には不可能であって，系を標準形に変換する正準変換の形式的巾級数は，一般の場合，実際に**発散する**ことが証明できる．

この級数の発散は次のことと関連している．すなわち，もし標準形に帰着することができたとすれば，相曲線の挙動は実際のそれよりもずっと簡単なものになるはずである．(トーラスの条件周期的な巻き線になってしまわなければならない.)

Hamilton 系の平衡点の近傍における相曲線の挙動は付録8で考察される．この付録では，高次項を無視した標準化に関して形式的な結果を述べる．

Hamilton 系を標準形に帰着させるという考えは，A. Lindstedt と H. Poincaré [1], vol. 1 による．また，平衡点の近傍における標準形は G. D. Birkhoff [1] によって詳細に研究された．さらに，退化した場合における標準形は A. D. Bruno [1] にある．

A. 平衡点の近傍における保存系の標準形　自由度 n の Hamilton 系の平衡点が線形近似においては安定であって，n 個の固有振動数 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ は相異なっているとする．このとき，Hamilton 関数の2次の部分は線形正準変換によって

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(p_1^2+q_1^2)+\cdots+\frac{1}{2}\omega_n(p_n^2+q_n^2)$$

の形にできる(ω_k の中には負のものがあってよい).

定義　固有振動数 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ は，関係式

$$k_1\omega_1+\cdots+k_n\omega_n = 0, \qquad |k_1|+\cdots+|k_n| = K > 0$$

を満たす整数 k_l が存在するとき，**K 次の共鳴関係式を満たす**という.

定義　**Hamilton 関数に対する s 次の Birkhoff の標準形**とは，正準座標 (P_l, Q_l) の s 次多項式であって，実際には変数 $\tau_l = (P_l^2+Q_l^2)/2$ の($[s/2]$ 次の)多項式になっているものをいう.

たとえば，自由度1の系に対して $2m$ (または $2m+1$) 次の標準形は

$$H_{2m} = H_{2m+1} = a_1\tau+a_2\tau^2+\cdots+a_m\tau^m, \qquad \tau = \frac{1}{2}(P^2+Q^2)$$

の形をしており，自由度2の系に対しては4次の Birkhoff の標準形は

$$H_4 = a_1\tau_1+a_2\tau_2+a_{11}\tau_1^2+2a_{12}\tau_1\tau_2+a_{22}\tau_2^2$$

となる．係数 a_1, a_2 は固有振動数であって，係数 a_{ij} は振動数の振幅への依存の仕方を表わしている.

定理1　固有振動数 ω_l は s 次以下のどんな共鳴関係式も満たしていないとする．このとき，平衡点の近傍に適当な正準座標系 (P_l, Q_l) を選べば，Hamilton 関数は $s+1$ 次以上の項を除いて s 次の Birkhoff の標準形に帰着される：

$$H(p, q) = H_s(P, Q)+R, \qquad R = O(|P|+|Q|)^{s+1}.$$

証明　この定理の証明は複素座標系

$$z_l = p_l+iq_l, \qquad w_l = p_l-iq_l$$

を使うと容易にできる(この座標系に移る際，Hamilton 関数に $-2i$ を掛けなければならない)．もし標準形には現われない N より小さい次数の項が既に消去されているとすると，母関数 $Pq+S_N(P, q)$ (ここで，S_N は N 次斉次多項式)をもつ変換は Hamilton 関数の Taylor 展開の N 次以上の項のみを変える.

この変換で，Hamilton 関数の

$$z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}w_1^{\beta_1}\cdots w_n^{\beta_n} \qquad (\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\cdots+\beta_n = N)$$

の形の N 次の項の係数は，容易に計算されるように，

$$s_{\alpha\beta}[\lambda_1(\beta_1-\alpha_1)+\cdots+\lambda_n(\beta_n-\alpha_n)]$$

だけ変る．ここで，$\lambda_l = i\omega_l$ であって，$s_{\alpha\beta}$ は関数 $S_N(P, q)$ を変数 z, w で展開したときの $z^\alpha w^\beta$ の係数である.

共鳴関係式は存在しないと仮定したから，$s_{\alpha\beta}$ にかかる大括弧の中は 0 とはならない．ただし，上の項 $z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}w_1^{\beta_1}\cdots w_n^{\beta_n}$ が積 $z_l w_l=2\tau_l$ で表わされている(つまり，すべての l に対して $\alpha_l=\beta_l$ である)場合を除く．こうして，変数 τ_l で表わされるものを除いて N 次の項はすべて消去できる．$N=3, 4, \cdots, s$ として証明すべきものが得られる．▮

Birkhoff の定理を利用する際，Hamilton 関数が標準形である系は積分可能であることに注意する．つまり，《正準極座標》τ_l, φ_l を考えれば，P_l, Q_l は式

$$P_l=\sqrt{2\tau_l}\cos\varphi_l, \qquad Q_l=\sqrt{2\tau_l}\sin\varphi_l$$

で与えられ，Hamilton 関数は作用変数 τ_l だけで表わされるから，系は積分可能であって，$\tau=\mathrm{const}$ なるトーラス上の振動数 $\omega=\partial H/\partial\tau$ をもつ条件周期運動になる．とくに標準形に対する平衡点 $P=Q=0$ は安定である．

B. 不動点の近傍における正準変換の標準形　2 次元平面上の正準な(すなわち，面積を保つ)変換を考えよう．この変換は座標原点を動かさず，1 次部分は固有値 $\lambda=e^{\pm i\alpha}$ をもつ(つまり，変換は適当な正準基底による座標 p, q で角 α の回転である)と仮定する．このような変換は**楕円的**であるといわれる．

定義　正準変換に対する s 次の Birkhoff の標準形とは，平面上の正準変換であって，回転角の大きさが正準極座標系の作用変数 τ の $m=[s/2]-1$ 次以下の多項式であるような回転

$$(\tau, \varphi)\longmapsto(\tau, \varphi+\alpha_0+\alpha_1\tau+\cdots+\alpha_m\tau^m)$$

である．ここで，

$$p=\sqrt{2\tau}\cos\varphi, \qquad q=\sqrt{2\tau}\sin\varphi.$$

定理 2　楕円的正準変換 T の固有値 λ は s 次以下の 1 の巾根でないとする．このとき，この変換 T は正準変数変換によって，$s+1$ 次以上の項を無視すれば s 次の Birkhoff の標準形に帰着される．——

楕円的変換の多次元への一般化は，(p_l, q_l) 平面の固有値 $\lambda_l=e^{\pm i\alpha_l}$ をもつ楕円的回転の n 個の直積である．s 次の Birkhoff の標準形は式

$$(\tau, \varphi)\longmapsto(\tau, \varphi+\partial S/\partial\tau)$$

で与えられる．ここで，S は作用変数 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ の $[s/2]$ 次以下の多項式である．

定理 3　多次元楕円的正準変換の固有値 λ_l が共鳴関係式

$$\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}=1, \qquad |k_1|+\cdots+|k_n|\leq s$$

を満たさなければ，この変換を（点 $p=q=0$ における Taylor 級数展開での $s+1$ 次以上の項を無視して）s 次の Birkhoff の標準形に帰着させることができる．

C. 平衡点の近傍における周期的な係数をもつ方程式の標準形　$p=q=0$ を時間に関して 2π-周期的[†]な Hamilton 関数をもつ系の平衡点とする．線形化された方程式を，時間に関して周期的な線形正準変換によって，固有振動数 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ をもつ自励的な標準形に帰着させることができたと仮定しよう．

$|k_1|+\cdots+|k_n|=K>0$ なる整数 $k_0, k_1, \cdots, k_n$ に対して関係式

$$k_1\omega_1+\cdots+k_n\omega_n+k_0=0$$

が満たされるとき，系は ***K* 次の共鳴関係式を満たす**，または**共鳴をもつ**という．

定理 4　もし系が s 次以下の共鳴をもたないならば，時間に関して 2π-周期的な正準変換が存在して，平衡点の近傍において系を（系が自励的であるかのように）s 次の Birkhoff の標準形に帰着させることができる．ただし，$s+1$ 次以上の残余項 R が時間に関して周期的であることだけが自励的な場合と異なっている．——

最後に，自励 Hamilton 方程式系の閉軌道が与えられているとしよう．このとき，この軌道の近傍において次の 2 つの手段のうちいずれかを使って系を標準形に帰着させることができる．

1)　**等エネルギー的帰着**：エネルギー定数を固定して，$2n-1$ 次元のエネルギー・レベル多様体上の閉軌道の近傍を，時間に周期的に依存する自由度 $n-1$ の系の拡大相空間とみなす．

2)　**切断面**：エネルギー定数と座標の 1 つの値を次のように固定しよう．すなわち，そのとき得られる $2n-2$ 次元面 S と閉軌道が横断的に交わるようにする．このとき，与えられた閉軌道に近い相曲線は，S と閉軌道の交点を不動点とする S 上の写像を定める．この写像は S 上の自然なシンプレクティック構造を保つ．したがって B 項の標準形を用いてこれを調べることができる．

自励 Hamilton 系の閉軌道を調べるときには，周期的な係数をもつ系の平衡

---

†)　l を周期とする周期的な関数を以下簡単のため，l-周期的な関数という．

点を調べるときと比べると1つの新しい事態が生じる．実際，自励系の閉軌道は孤立しておらず，(一般には) 1-パラメーター族をなしている．

この族のパラメーターはエネルギー定数の値である．実際，或る値 E_0 にエネルギー定数をとったとき，閉軌道が $2n-1$ 次元のエネルギー・レベル多様体の中で，$2n-2$ 次元面 S を横断的に横切ると仮定しよう．このとき，E_0 に近い値のエネルギー定数に対しても同様の閉軌道が存在する．陰関数定理から，この閉軌道はエネルギー定数の値に滑らかに依存していることもわかる．

閉軌道の1-パラメーター族を調べるために Birkhoff の標準形を利用しようとすると，次の困難にぶつかる．族のパラメーターが変化すると，一般に線形化された問題の固有値も変化する．したがって，パラメーターの或る値に対して共鳴が起ることは避けることができない．そのとき標準形に帰着させることができなくなる．

低次の共鳴がとくに危険である．というのは，Taylor 展開での初めの方の項に影響するからである．低次の共鳴関係式をほとんど満たす固有値をもつ閉軌道を扱うには Birkhoff の標準形を幾分修正する必要がある．つまり，N 次の共鳴が起ると，

$$k_0-[\omega_1(\beta_1-\alpha_1)+\cdots+\omega_n(\beta_n-\alpha_n)],\qquad |\alpha|+|\beta|=N$$

の形の式のどれかが0になるが，Hamilton 関数の N 次の項を消去しようとするとき，これらの数で割らなければならない．非共鳴ではあるが共鳴に近いパラメーターの値に対しては，一般に上の固有振動数の1次結合は0にはならないが非常に小さくなる(このため，この1次結合を《小さい分母》という)．

小さい分母で割ると次のようになる．

1)　標準形に帰着させる変換はパラメーターに不連続的に依存する(共鳴の起るパラメーターの値で極をもつ)．

2)　Birkhoff の標準形が系を正しく記述している領域は共鳴に際して1点にまで縮む．

これらの欠点を免れるには，Hamilton 関数の或る項(すなわち，パラメーターの或る値で共鳴を起す項)を消去することをやめなければならない．これらの項は，共鳴の起るパラメーターの値だけでなく，その近くの値に対してもそのままおいておかなければならない*)．

この結果得られる標準形は通常のものよりいくらか複雑ではあるが，多くの場合，共鳴の起る近くで解がどのように振舞うかについて有効な情報をこれから引き出すことができる．

D. 例：3次の共鳴の研究　簡単な例として，自由度2の自励 Hamilton 系を考えよう．この系は或る一定のエネルギー値のもとで閉軌道をもち，その近くの軌道の振動周期は閉軌道上の回転周期の3倍である†)とする．エネルギーの値をこの一定値から少し変化させるとき，このような閉軌道がどうなるかをみよう．

前に述べたことから，この問題は自由度1の，時間に関して 2π-周期的な非自励 Hamilton 系の1-パラメーター族を平衡点の近傍で調べることに帰着される．この平衡点はパラメーターのすべての値を通じて座標原点であると考えてもよい(このためには，パラメーターに依存する変数変換を行う必要がある)．

さらに，平衡点で線形化された系を，時間に関して 2π-周期的な線形正準座標変換によって，定数係数の線形系に変換することができる．こうして得られた座標系においては，線形化された系の相流は平衡点の回りの一様な回転となる．この回転の角速度 ω はパラメーターに依存する．

共鳴が起るパラメーターの値では $\omega=1/3$ である(時間が 2π たつと座標原点の回りを 1/3 回転する)．一般に角速度 ω のパラメーターに関する微分は0とならない．このため，パラメーターとしてこの角速度自身を，あるいはもっとよいのは，その 1/3 からのずれをとることができる．このずれを ε で表わす．量 ε を**振動数のずれ**という．共鳴が起るパラメーターの値は $\varepsilon=0$ に対応する．問題は ε が小さいときの系の挙動である．

もし，Hamilton 方程式で非線形項を無視し，振動数のずれ ε を無視すると，系の軌道はすべて3回転して閉じる(つまり，6π を周期にもつ)．ここでは，非線形項と振動数のずれ ε が軌道の挙動に及ぼす影響を調べたい．明らかに，一般にはすべての軌道が閉じてしまうということはない．これらの軌道がどのように振舞うかを調べるには系の標準形を考えるのが有効である．

---

*) ここに示した手法は Hamilton 系の研究だけでなく，微分方程式の一般論においても有効である．たとえば，V. I. Arnold [12] を参照．

†) 正確にいえば，これは閉軌道の回りで線形化した系に対する仮定である．

座標として，$z=p+iq$，$\bar{z}=p-iq$ をとると，Hamilton 関数は

$$-2iH=-i\omega z\bar{z}+\sum_{\alpha+\beta=3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{\alpha\beta k}z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}e^{ikt}+\cdots$$

の形になる．ここで，… は 4 次以上の項を表わし，$\omega=\varepsilon+(1/3)$ である．

標準形に帰着させるとき，共鳴の際に小さい分母

$$\omega(\alpha-\beta)+k$$

が 0 となるような項 $z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}e^{ikt}$ を除いて 3 次の項はすべて消去できる．これらの除外された項はまた，振動数のずれ ε と非線形項を無視するとき得られる周期運動の軌道に沿って一定であるものとしても記述される．これらの項は**共鳴項**と呼ばれる．ゆえに，共鳴 $\omega=1/3$ に対して共鳴項は［項 $z^{\alpha}\bar{z}^{\beta}e^{ikt}$ で］

$$\alpha-\beta+3k=0$$

を満たすものである．したがって，3 次の項のうち共鳴項となるものは，z^3e^{-it} と $\bar{z}^3e^{it}$ だけであることが分る．したがって，Hamilton 関数を

$$-2iH=-i\omega z\bar{z}+hz^3e^{-it}-\bar{h}\bar{z}^3e^{it}+\cdots$$

の形に帰着することができる(h と $\bar{h}$ が複素共役であることは H が実関数であることに対応している)．

Hamilton 関数をこの標準形に帰着させる変換は，時間に関して 2π-周期的な滑らかな正準変換であって，共鳴が起る時も含めてパラメーターに滑らかに依存していることに注意しよう．この変換と恒等変換は，閉軌道からのずれに関して 2 次の微小項でしか違わない(その母関数は恒等変換の母関数と 3 次以上の項だけが異なる)．

Hamilton 方程式の解の挙動をもっと研究するには次のようにする．まず，Hamilton 関数の 4 次以上の項をすべて取り除いて得られる縮約された方程式の解を調べる．その後に，取り除いた項が軌道の挙動にどのように影響するのかを見る．

縮約方程式の研究は，複素変数 z の平面上に角速度 1/3 で一様に回転する座標系を導入すると，つまり変換 $z=\zeta e^{it/3}$ をほどこすと見易い．このとき，変数 ζ に対して，Hamilton 関数

$$-2iH_0=-i\varepsilon\zeta\bar{\zeta}+h\zeta^3-\bar{h}\bar{\zeta}^3,\qquad \varepsilon=\omega-\frac{1}{3}$$

をもつ自励 Hamilton 系が得られる[†].

回転座標系において，縮約系が自励系であるというのは大変幸運なことである．(Hamilton 関数の4次以上の項も考えた)もとの Hamilton 方程式系は回転座標系において自励系でないばかりか，時間に関して 2π-周期的でさえない(6π-周期的であるだけである)．Hamilton 関数 H_0 をもつ自励系は本質的には，$\varepsilon=0$ なる線形系の閉軌道に沿ってもとの系を平均化した結果である(このとき4次以上の項は無視する)．

係数 h は実数にできる(これは座標系を回転することにより得られる)．こうして，Hamilton 関数は実座標系 (x, y) において

$$H_0 = \frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)+a(x^3-3xy^2)$$

なる形に帰着される．係数 a はパラメーターである振動数のずれ ε に依存する．$\varepsilon=0$ でもこの係数は一般には0ではない．したがって，パラメーターに滑らかに依存する座標変換によって，この係数を1にできる．こうして，(x, y) 平面上の Hamilton 関数

$$H_0 = \frac{\varepsilon}{2}(x^2+y^2)+(x^3-3xy^2)$$

をもつ系において，相空間図が小さいパラメーター ε にどのように依存しているかを調べなければならない．

この依存の様子が次のようになることは容易に分る(図239)．$\varepsilon=0$ では，関数 H_0 の0-レベル曲線は原点で60°の角をなして交わる3本の直線からなる．ε を変化させても3本の直線からなるレベル曲線は常に存在するが，ε を徐々

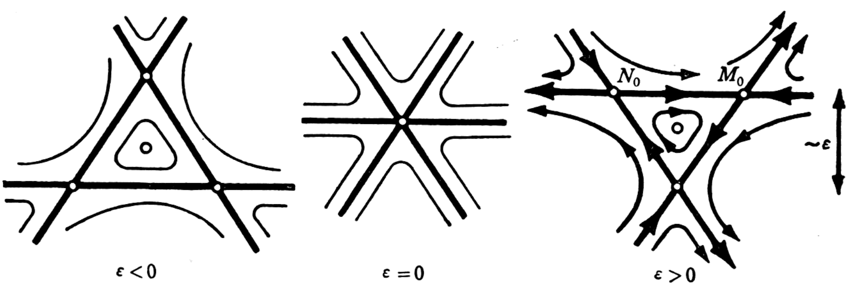


図239　3:1の共鳴の通過

[†] $\Phi(\bar{z}, \zeta, t)=\bar{z}\zeta e^{it/3}$ を母関数とする正準変換をほどこす．このとき，新しい Hamilton 関数 H' は $H'=H+\partial\Phi/\partial t$ で与えられることに注意せよ．

に変化させると，この3直線は座標原点を中心とする正3角形を作りつつ移動していく．この3角形の頂点は Hamilton 関数の鞍状臨界点である．座標原点にある臨界点は ε が0を通り過ぎると(つまり，共鳴を通過すると)，最小から最大に変る．

こうして，Hamilton 関数 H_0 をもつ系においてパラメーターが共鳴の起る値をとらないときは，座標原点は常に安定な平衡点であるが，共鳴の起る値では不安定である．パラメーターの値が共鳴の起る値に近い場合，閉相曲線で満たされている座標原点の近くの3角形は小さい(ε の程度である)．したがって，座標原点の《安定領域半径》は $\varepsilon\to 0$ のとき0に近づく．相点がこの3角形の外に出て平衡点から逃げ出し始めるためには，初期条件に与える摂動はそれほど大きくなくて(ε の程度で)十分であることになる．

周期軌道に関するもとの問題に戻ると，次の結論に達する(4次以上の項を除いているのでもちろん証明されたわけではないが，正当化することができる)．

1. 考えている $3:1$ の共鳴を通過するとき，一般に周期軌道 γ は安定性を失う．

2. 共鳴の起る値に近い値をパラメーターがとるとする．このとき，この値に対するエネルギー・レベル多様体上に，考えている周期軌道 γ の近傍に不安定な周期軌道が存在する．この軌道は γ に沿って3周回りながら γ の回りを1回転して閉じる．パラメーターが共鳴の起る値をとると，この不安定な軌道はもとの軌道 γ に重なる．

3. 上に述べた不安定周期軌道ともとの周期軌道 γ との距離は，共鳴に近づくとき，振動数のずれ ε の1次のオーダーで(つまり，パラメーターの共鳴が起る値からのずれの1次のオーダーで)減少する．

4. 3次元エネルギー・レベル多様体上に，上に示した不安定軌道を含む2つの不変な2次元曲面[セパラトリックス]が存在する．これらの面のうち1つは，$t\to+\infty$ のときこの面上で上の不安定周期軌道に近づく軌道で満たされており，他の1つは，$t\to-\infty$ のときその面上で不安定周期軌道に近づく軌道で満たされている．

5. セパラトリックスの配置は次のようになる．セパラトリックスが軌道 γ への横断面と交わると，正3角形の3辺とその延長に近い図形が得られる．3

角形の頂点は不安定周期軌道と横断面との交点である.

6. セパラトリックスで作られる3角形の内部に初期条件を与えると, ($1/\varepsilon$ のオーダーより小さくはない)長時間の間, 相点はもとの周期軌道 γ の近くに(ε 程度の距離に)止まっているが, 初期条件を外部にとると, かなり急速に ε に比べて大きい距離に離れる.

E. セパラトリックスの分離　実際には主張4, 5, 6で述べたセパラトリックスは非常に複雑である(われわれの近似では考慮されていない4次以上の項の影響のためである). 様子を明らかにするためには, もとの閉軌道 γ と, その上の或る1点で横断的に交わる2次元曲面 S を考えるのが好都合である*)(さらに, S はエネルギー・レベル多様体の1つに完全に含まれているとする).

S 上の点 P から出発する軌道はもとの閉軌道 γ 上の回転周期に近い時間がたつとまた S と点 P' で交わる. こうして, 閉軌道 γ と S の交点の S 上の近傍から S への点 P を点 P' に写す写像が生じる. この写像は不動点(閉軌道と S との交点)をもち, この点の回りの120° の回転に近い. この点を S 上の座標原点としよう.

上に示された写像の3乗を考えよう. これもまた, S 上の座標原点の或る近傍の, 座標原点を動かさない写像である. この写像は360° の回転, つまり恒等写像に近い. この写像は, 考えている閉軌道 γ の周期の3倍に近い時間の経過により, われわれの系の軌道によって実現される.

上に述べた解析はこの《3周期間写像》の構造について自明でない情報を与えている. 実際, Hamilton 関数で4次以上の項を無視すると, この写像では3次以上の項が変る. したがって, 縮約された Hamilton 関数に対応する3周期間写像は(3次の誤差で)われわれの3周期間写像を近似している.

ところで, 縮約された Hamilton 関数に対応する3周期間の写像の性質はよく知られている. というのは, この写像は Hamilton 関数 $H_0(x, y)$ をもつ系の相流の 6π 時間間の写像だからである(証明は 6π 時間たつとわれわれの回転座標系がもとの位置に戻ってくることによる). さて, 写像を不動点からの距離の3次のオーダーの微小量で摂動するとき, これらの性質のうちどれが保存

---

*) ここにも《考察するには周期間写像が便利であるが, 計算するには流れ(フロー)が簡単である》という一般的な事情が現われている.

され，どれが保存されないかを考えてみよう．

縮約された系に対する3周期間写像を A_0 で，また，われわれの3周期間写像を A で表わそう．

1. 写像 A_0 は流れの中に含まれる：Hamilton 関数 H_0 をもつ相流における 6π 時間間の変換である．写像 A が流れの中に含まれているとする根拠は何もない．

2. 写像 A_0 は 120° の回転で不変である：自明でない微分同相 g で $g^3=E$，かつ A_0 と可換なものが存在する．写像 A が $g^3=E$ なる何らかの自明でない微分同相 g と可換であると考えられる理由は何もない．

3. 写像 A_0 は座標原点から ε のオーダーの距離のところに3個の不安定な不動点をもち，これらは正3角形の3頂点に近い．共鳴からのずれが十分に小さいと（つまり，ε が十分に小さいと），写像 A もまた正3角形の頂点の近くに3個の不安定な不動点をもつ．これは陰関数の定理から導かれる．

4. （パラメーターが共鳴値ではないがそれに近い値をとると）写像 A_0 の不動点のセパラトリックスは正3角形の辺およびその延長に近い図形を作る．正3角形の辺上にある1点から出発して，この点に写像 A_0 をくり返し施すと同じ辺上の点列が得られ，この辺の両端のうちの1つに収束する．それを M_0 とする．また，写像 A_0^{-1} をくり返し施すと，他方の端点に収束する点列が得られる．この端点を N_0 で表わす（図239）．

写像 A の3つの不安定不動点もまた，それぞれ正3角形の各辺に近いセパラトリックスをもつ（図240）．いいかえると，写像 A^n, $n\to\infty$ を施すと，不動点 M に収束する平面上の点は滑らかな曲線 Γ^+ を作る．この曲線 Γ^+ は A に

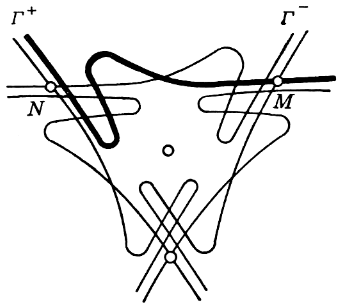


図240　セパラトリックスの分離

関して不変で点 M を通る．さらに点 M の近傍では，写像 A_0 のセパラトリックスである正3角形の1辺 M_0N_0 に近い．写像 A^n, $n\to-\infty$ を施すと，N に近づく平面上の点は別の不変で滑らかな曲線 Γ^- を作る．Γ^- は点 N を通り，さらに点 N の近傍では辺 M_0N_0 に近い．

ところで，2曲線 Γ^+, Γ^- は共に直線 M_0N_0 に近いが，必ずしも互いに一致するわけではない．これこそセパラトリックスの分離という現象であって，縮約系ともとの系とが根本的に異なる点である．

小さい ε に対するセパラトリックスの分離の大きさは指数関数的に小さくなる．このため，《摂動法》による計算においては分離現象は簡単に見逃されてしまう[†]．しかし，この現象は原理的には極めて重要である．たとえば，この現象の存在から，直ちにいろいろな摂動論における級数の**発散**が出てくる(なぜなら，もし級数が収束すれば分離はありえないから)．

一般に(初めのいくつかの項によって与えられる近似がよいときにも)，摂動論の級数が発散するということは，実際には存在しないものを求めようとしていることに，普通は原因がある．調べている現象を，実際には現象の本質的な特徴に矛盾している摂動法で取り扱おうとすると級数が発散してしまっても別に不思議ではない．

(Hamilton 関数を Taylor 級数に展開して，その初めのいくつかの項だけに止まらず全ての項を標準形にすることによって得られる) Birkhoff の級数は，形式的には成立しても，実際には発散する摂動法の1例である．もしも，これらの級数が収束するならば，自由度1で周期的な係数をもつ一般の振動系は平衡点の近くでは自励標準形へ帰着できて，しかも，そこではセパラトリックスの分離は起らないだろう(実際には分離は起っている!)．

話をもとの閉軌道に戻すと，変換 A の3つの不安定不動点にはもとの閉軌道を3重にしたものに近い不安定な閉軌道が対応することが分る．$t\to+\infty$ のときに，この不安定軌道に収束する軌道の族が存在し，同様に，$t\to-\infty$ のときに，同じ不安定軌道に収束する別の軌道の族が存在する．これらの族に属する軌道の全体は初めの不安定軌道を含む滑らかな曲面をなす．

これらの2つの曲面こそ，p. 398 の主張 4, 5, 6 で触れたセパラトリックスに他ならない．これらの曲面が横断面と交わると，変換 A の不変曲線 Γ^+, Γ^- が

†) セパラトリックスの分離の大きさは e^{-1/ε^4} のオーダーであり ε の任意の巾 ε^N より小さい．《摂動法》の計算においては全ての量は ε の巾に展開されることに注意せよ．なお，この付録の F 項も参照せよ．

得られる．この2曲線は互いに交わって，もつれた網の目をつくるが，このことについて，最初にセパラトリックスの分離現象を発見した H. Poincaré は次のように書いている．《交点の全体は一種の格子，或る種の織物，あるいは限りなく詰った結び目をもつ網をなしている．2つの曲線のおのおのは決して自分自身には交わってはならず，極めて複雑に自分自身の上に折れ重なってすべての網目と無限回交わらなければならない．

この図形の複雑さは驚くべきもので，私は描こうとも思わない．3体問題や，一般に1価の積分が存在しないで Bohlin 級数が発散するようなすべての力学の問題の複雑さを想像するのに，これほど適当なものはない．》(H. Poincaré [1], vol. III, chap. XXXIII, p. 389)

セパラトリックスの交わりの様子は，現在のところ，まだ多くのことがはっきりしていないということを注意しておこう．

F. 高次の共鳴　より高次の共鳴もまた，標準形を使って調べることができる．このとき，普通，5次以上の共鳴は不安定性をひき起さないことに注意する．それは標準形に4次の項が現われて，共鳴のときにすら，関数 H_0 の最大または最小性を保証するからである．

次数が $n>4$ なる共鳴の場合には，Hamilton 関数 H_0 をもつ系の(パラメーターが変化したときの)相空間図の典型的な変化の様子は

$$H_0=\varepsilon\tau+\tau^2\alpha(\tau)+a\tau^{n/2}\sin n\varphi,$$
$$2\tau=p^2+q^2,\qquad \alpha(0)=\pm1$$

によって与えられ，次のようになっている(図241).

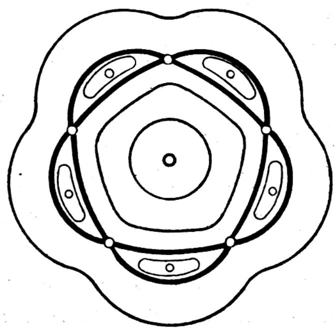


図 241　5:1の共鳴の近くにおける相振動の平均化された Hamilton 関数

共鳴からの振動数のずれ ε が小さいと，座標原点にある平衡点から($\sqrt{|\varepsilon|}$ のオーダーの)近いところに，関数 H_0 は $2n$ 個の臨界点をもち，これらは座標原点を中心とする正 $2n$ 角形の頂点の近くにある．この臨界点の半分は鞍点であり，残り半分は座標原点が最小(最大)点ならば，最大(最小)点となる．鞍点と安定点は交互に現われる．n 個の鞍点はすべて関数 H_0 の1つのレベル上にあり，隣り合う鞍点を結ぶセパラトリックスは n 個の《島》を作るが，そのおのおのは安定点を囲む閉相曲線で満たされている．島の幅は $\varepsilon^{(n/4)-1}$ のオーダーである．各島の中にある閉相曲線を**相振動**という(本質的には，変動するのは座標原点の回りの振動の位相であるからである)．相振動の周期は振動数のずれ ε が小さくなると $\varepsilon^{-n/4}$ のオーダーで大きくなる．

島々から作られた，狭い円環の内側に，座標原点を囲んでいる閉相曲線が含まれている．円環の外側でも，相曲線は閉じているが，これに沿っての運動は円環の内側のと反対向きである．共鳴のオーダーが5次以上でありさえすれば，この円環の半径は共鳴のオーダーには関係なく $\sqrt{|\varepsilon|}$ のオーダーであることに注意しよう．このとき，島々のなす円環は，ε の2つの符号のうちの一方でだけ存在する．

Hamilton 関数 H_0 をもつ縮約された系からもとの系へ移ると，セパラトリックスは3次の共鳴に対して上で述べたのと同じように分離する．セパラトリックスの分離の大きさは指数関数のオーダー($e^{-1/\varepsilon^{n/4}}$ のオーダー)で小さくなるが，しかし分離は安定性を調べる際，とくに高次元の場合，原理的な意味をもっている†)．

もとの閉軌道に戻ると，その様子は次のようになる．定まった一方の側から ε 軸に沿って共鳴に近づいていくと，周期軌道から安定なのと不安定なのと2つの周期軌道が分離する*)．この2つの新しい軌道はもとの軌道に沿って n 周して閉じるが，もとの軌道からは $\sqrt{|\varepsilon|}$ のオーダーで離れている．安定軌道の近くに，$\varepsilon^{-n/4}$ のオーダーの周期をもち，振幅が方位角の方向に π/n のオーダーで，動径方向には $\varepsilon^{(n/4)-1}$ のオーダーである緩やかな相振動で満たされた帯域がある．共鳴値を通過するとき，少なくともわれわれが考えている近似の範

---

†)　Arnold-Avez [1], §23 参照.

*)　3次の共鳴のときは，これと異なって，分離する不安定周期軌道は共鳴の両側で現われる.

囲では，もとの周期軌道の安定性が失われることはない．

4次の共鳴の場合は特別である．この場合，標準形の4次の項には，共鳴項も非共鳴項も存在するからである．縮約された系の相曲線の形は，これらの標準形でどちらの項，共鳴項か，非共鳴項か，が優っているかによる．前者の場合，変化の様子は3次の共鳴のときと同じで，3角形が4角形に替るだけである．後者の場合には $n>4$ のときと同様である．

最後に注意しておくと，パラメーターの値が共鳴値に近い程($\varepsilon \ll 1$)，また周期軌道からの初期値のずれが小さい程，標準形で与えられる近似はよりよいものとなる．つまり，閉軌道の周期と，その周りの軌道の振動周期が有理比に近づけば近づく程，そしてまた，初期条件が閉軌道に近づけば近づく程，われわれの近似が相曲線の挙動を忠実に記述する時間は長くなっていく．

無限の時間にわたる，閉じていない相曲線の挙動(たとえば，もとの周期軌道が Liapunov 安定か)について，以上の考察からはどんな結論も出ない．なぜなら，標準形に帰着させる際に捨てた高次の項が，無限の時間の間に，運動の性格を全く変えてしまいうるからである．実をいうと，考えている条件のもとでは，もとの周期軌道は Liapunov 安定である．しかし，その証明には Birkhoff の標準形に比べると，本質的に新しい考え方を必要とする(付録8参照)．

付録8　条件周期運動の摂動論と Kolmogorov の定理

厳密に解ける《積分可能》な問題を集めてみても，そんなに多くはない(1次元の問題，中心場における点の運動，剛体の Euler の運動および Lagrange の運動，2つの固定中心の問題，楕円面上の測地線に沿う運動)．しかし，これらの《積分可能な場合》の助けを借り，積分可能な問題を第1近似と見なすことによって，多くの重要な系の運動について，かなり重要な情報を得ることができる．

このような事情を示す1例に，万有引力の法則に従って動く太陽の周りの惑星の運動の問題がある．惑星全体の質量は太陽質量の約0.001であるから，第1近似では，惑星間の相互作用は無視できて，太陽の引力のみを考慮するだけでよい．こうして，太陽の周りの，惑星間の相互作用のない，惑星の運動に関する完全に積分可能な問題が得られる．各惑星は他の惑星と独立に，Kepler の楕円を描き，系の運動は全体として条件周期的である．今，惑星間の相互作用を考慮に入れると，各惑星の Kepler 運動は幾分修正される．

天体力学の摂動論はこの相互作用を考察するものである．

千年程度の期間を計算するだけなら，明らかに，原理的な困難は生じてこない．しかし，もっと長い時間にわたって調べようとすると，とくに運動方程式の厳密解の挙動を無限の時間にわたって定性的に調べようとすると，原理的な困難が生じてくるのである．

というのも，千年よりずっと長い時間が経つうちに，摂動が積り積って，運動の性格が全く変ってしまうということが起りうるからである．たとえば，惑星が太陽に落下したり，飛び去ったり，あるいは惑星同士で衝突するということが起るかもしれない．

運動方程式の解が無限の時間にわたってどのように振舞うかという問題は，惑星の実際の運動の問題とは間接的な関わりしかもたないことに注意しよう．というのも，数十億年の時間にわたると，Newton 方程式では考慮されていない小さな非保存的効果が強く現われてくるからである．したがって，惑星間の重力の相互作用が実際に重要になる

のは，非保存力の効果が現われてくる時間に比べて短い有限時間内にそれが惑星の運動の様相に重大な変化を引き起すときだけである．

このような有限時間内の運動を計算するには，電子計算機が非常に役立ち，未来・過去の数千年間の運動が手早く求められる．

しかし，計算機を使っても，相点が指数不安定帯†)に入り込むと，摂動の影響を予想することはできないということに注意する必要がある．

漸近的，定性的方法がもっと大きい意味をもつのは，磁場の中の荷電粒子の運動を調べるときである††)．この時には，粒子は計算機よりも速く，何回も回転するので，計算機で軌道を計算するのは，たとえ指数不安定性が起らないときでも不可能である．

天体力学で摂動を計算するには多くの方法がある(それらは詳細に H. Poincaré [1] で扱われている)．これらの方法の特質は，**発散**級数に帰着させることにあり，したがって，それは無限の時間にわたる大域的な運動の挙動については何ら情報を与えない．

摂動論において，級数が発散する原因は《小さい分母》にある．これは非摂動運動の振動数の整係数1次結合であって，摂動の影響を計算する際，これで割らなければならない．厳密な共鳴(振動数が通約可能)のときにはこの分母は0となって，摂動論の級数の対応する項は無限大になる．共鳴の近くではこの項は非常に大きくなる．

たとえば，木星と土星は太陽の周りを24時間でおよそ299″，120.5″回る．したがって，分母 $2\omega_{木}-5\omega_{土}$ はおのおのの振動数と比べて非常に小さい．これは惑星間に(約800年の)長周期の摂動をもたらす．Laplace によるこの効果の研究は摂動論の最初の成果の1つであった．

小さい分母がもたらす困難は極めて本質的であることに注意しよう．実際，有理数全体は(実数全体の中で)至るところ稠密であるから，非摂動問題の相空間の中で，共鳴が生じ小さい分母が0になるような初期条件は至るところ稠密な集合をなす．こうして，摂動論の級数によって与えられる関数は至るところ稠密な特異点の集合をもつ．

ここに述べた困難は天体力学だけでなく，積分可能な問題に近い問題(たと

---

†)　付録1と Arnold [4] を参照．太陽系の運動においても，このような指数不安定帯があると予想されているが，厳密なことは分っていない．

††)　Moser [4] 参照，付録9の E 項の終りの脚注も参照．

えば，非常に速く回転している非対称な重いコマの運動)すべてに特有のものである．Poincaré は，作用-角変数 I, φ で表わされた Hamilton 関数

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi), \qquad \varepsilon \ll 1$$

で与えられる系の，条件周期運動の摂動の研究を**力学の基本問題**とさえ呼んだ．

ここで，H_0 は非摂動問題の Hamilton 関数，εH_1 は摂動で角変数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ に関して 2π-周期的関数である．非摂動問題($\varepsilon=0$)では，角 φ は一定の振動数

$$\omega_k = \frac{\partial H_0}{\partial I_k}$$

で一様に変動するが，作用変数 I_k は全て第 1 積分である．

座標 I をもつ n 次元空間の領域と，角座標 φ をもつ n 次元トーラスとの直積である相空間で，Hamilton 方程式

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}$$

の相曲線を調べなければならない．

この摂動された問題の相曲線の研究における本質的な進歩は，1954 年の A. N. Kolmogorov [1] から始まった．この付録では，この分野でそれ以後得られた重要な結果を述べておく．証明は次の文献にある．V. I. Arnold [1], [2], [3], V. I. Arnold-A. Avez [1], J. Moser [1], [2], [3], C. L. Siegel-J. Moser [1], S. Sternberg [1].

結果を定式化する前に，第 10 章で扱った非摂動問題の相曲線の挙動について簡単にふれる．

A. 非摂動運動　Hamilton 関数 $H_0(I)$ をもつ系は互いに対合的な n 個の第 1 積分(n 個の作用変数 I_k)をもつ．これらの積分の共通のレベル集合は $2n$ 次元相空間の中で n 次元トーラスをなす．このトーラスは非摂動系の相流に関して不変である．すなわち，このようなトーラスの 1 点から出発する相曲線はこのトーラスに止まっている．

不変トーラス，I=const，に沿う相点の運動は条件周期的である．この運動の振動数は非摂動 Hamilton 関数 $H_0(I)$ の作用変数 I に関する微分である：

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k(I), \qquad \text{ここで} \quad \omega_k = \frac{\partial H_0}{\partial I_k}.$$

したがって，振動数 ω_k のうち有理数体上1次独立なものの個数を d とするとき，相曲線は d 次元トーラスを至るところ稠密に満たす.

振動数は考えているトーラスに，つまり，第1積分のどんな値を固定しているかに依存しているということに注意しよう. n 変数 I の，n 個の関数 ω の系は，一般には関数として独立である. このときには，作用変数 I の空間の考えている点の近傍で，変数 ω を座標にとることにより，振動数によって簡単にトーラスを番号づけることができる.

振動数が関数として独立な場合を**非退化な場合**という. つまり非退化条件は

$$\det\left|\frac{\partial\omega}{\partial I}\right| = \det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\right| \neq 0$$

である.

こうして，非退化な場合には非摂動問題の相空間において，それぞれの不変トーラス上にはそれぞれ異なった振動数をもつ条件周期運動が実現される. とりわけ，振動数の［うち有理数体上1次独立なものの］個数が極大(つまり n)となる不変トーラスは相空間内で至るところ稠密な集合をなす. このようなトーラスを**非共鳴**であるという.

非共鳴トーラス全体は相空間の中で全測度の集合をなす. すなわち，非摂動非退化系の不変な共鳴トーラス全体の Lebesgue 測度は0に等しいことが分る. とはいえ，共鳴な不変トーラスも存在して，非共鳴トーラスと交互に現われ，これらもまた，至るところ稠密な集合をなしている. さらに，1から $n-1$ までの間の任意の個数の独立な振動数をもつ共鳴トーラス全体も至るところ稠密である. とくに不変トーラスで，その上の相曲線が全て閉じている(独立な振動数は1個)ものも至るところ稠密な集合をなす.

にもかかわらず，非摂動系の相空間の中で初期条件をでたら目に選ぶとき，共鳴トーラスの上に落ちる確率は0に等しい(でたら目に実数を選ぶとき，有理数の上に落ちる確率が0に等しいように)ということに注意しよう. こうして，測度0の集合を無視すると，非退化非摂動系のほとんど全ての不変トーラスは非共鳴であり，n 個の有理数体上1次独立な振動数の完全な組をもつ，ということがいえる.

非共鳴トーラス上では，条件周期運動の軌道は至るところ稠密である. こう

して，ほとんど全ての初期条件に対して，非摂動非退化系の相曲線は，自由度に等しい次元(つまり，相空間の半分の次元)をもつ不変トーラスを至るところ稠密に満たす.

もっとよく状況を見るために，自由度2 ($n=2$) の場合を考えてみよう．この場合の相空間は4次元である．よって，エネルギーのレベル集合は3次元となる．このレベル集合の1つを固定しよう．この3次元多様体は2次元不変トーラスを葉とする葉層構造をもち，普通の3次元空間の中での，中心線を共有し，かつ互いに含まれるトーラスの族として表わされる(図242).

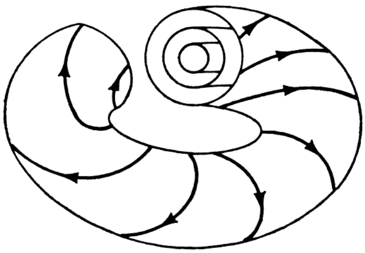


図242　3次元エネルギー・レベル多様体における不変トーラス

相曲線はこれらのトーラスの巻き線であり，2つの回転振動数はトーラスごとに変る．一般の場合には，トーラスごとに2つの振動数だけでなく，その比も変る．トーラスを番号づけている作用変数 I に関する振動数の比の微分が関数 H_0 の与えられたレベル集合上で0でないとき，われわれの系は**等エネルギー的非退化**であるという．等エネルギー的非退化条件は(容易に計算されるように)

$$\det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \dfrac{\partial H_0}{\partial I} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial I} & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

である.

非退化条件と等エネルギー的非退化条件とは互いに独立である．つまり，非退化でも等エネルギー的退化であり得るし，等エネルギー的非退化でも退化であり得る．高次元 ($n>2$) の場合，等エネルギー的非退化性から，n 個の作用変数 I の関数 H_0 の $n-1$ 次元レベル多様体から $n-1$ 次元射影空間への写像

$$I \longmapsto (\omega_1(I) : \omega_2(I) : \cdots : \omega_n(I))$$

の非退化性が出る.

ここで，自由度2の等エネルギー的非退化系を考えよう．まず，われわれの族に属する2次元トーラスに横断的に交わる2次元曲面が3次元エネルギー・レベル集合内に容易に作れる(3次元 Euclid 空間におけるモデルでは，切口は同心円周族になる).

この面から出発する相曲線はトーラスをひと回りしてこの面上に戻ってくる．こうして，面がトーラスと交わってできる円周上の新しい点が得られ，2次元面からその上への写像ができる.

この面上の写像は，面が不変トーラスと交わってできる同心的な子午円を不変にする．このとき，各円周は或る角度ずつ回転する．この回転角と1回転との比はトーラスの子午線に沿う振動数と赤道に沿う振動数との比に等しい．したがって，系が等エネルギー的非退化ならば，切断面上の不変円周の回転角は円周ごとに変る.

このようなわけで，この角度は或る円周上では1回転と通約可能であるが，他の円周上では通約不可能である．通約可能な円周も，そうでないのも，至るところ稠密な集合をなすが，(Lebesgue 測度の意味で)ほとんど全ての円周上で，この角度は1回転と通約不可能である.

通約可能か不可能かに従って，次のように切断面からそれ自身への写像による円周上の点の挙動は異なる．もし，回転角が1回転と通約可能であれば，この写像を何回か反復すると，点はもとの点に戻ってくる(回転比を表わす分数の分母が大きくなる程，この反復回数も大きくなる)．回転角が1回転と通約不可能ならば，この写像を反復して得られる点列は子午円を至るところ稠密に満たす.

通約可能性は共鳴トーラスに，通約不可能性は非共鳴トーラスに対応することにも注意しよう．さらに共鳴トーラスが存在することから，次のような事情が生じることにも注意する．相曲線によって実現される切断面からそれ自身への写像の巾を考える．この巾の指数が，1つの共鳴トーラス上の振動数の比を表わす分数の分母になっているとしよう．このとき，この指数だけ繰り返した写像の巾は，全て不動点からなる円周(つまり，考えている共鳴トーラスの子午線)をもつ.

不動点のこのような現われ方は，いくらかでも一般的な形の写像に対しては，正準写像に対してさえ不自然である(普通は不動点は孤立している)．いまの場合，全体が不動点からなる円周が現われるのは積分可能な非摂動系を考えているためである．一般的な形の任意に小さい摂動に際して，われわれの写像のこの性質(全体が不動点からなる円周をもつこと)は姿を消さざるを得ない．不動点からなる円周は，ばらばらに分解して，有限個の点だけになる．

いいかえると，積分可能な系を少し摂動するとき，相曲線の定性的な様子が少なくとも以下の点において変るものと予期しなければならない．すなわち，閉相曲線で満たされている不変トーラスは分解して，有限個の閉相曲線はそのまま非摂動閉相曲線の近くに残るが，残りの相曲線はより複雑になる．すでに付録7で，共鳴に近い相振動を調べたときこのような場合を見てきた．

さて，Hamilton 関数を小さく摂動すれば，非共鳴不変トーラスはどうなるかを見てみよう．平均化原理を形式的に適用すると(古典的摂動論での第1近似，§52参照)，非共鳴トーラスはどんな発展ももたないことが分る．

ここでは摂動が Hamilton 的であることが極めて本質的だということに注意しよう．というのは，非保存的摂動を加えると，作用変数は明らかに発展できるからである．天体力学的情況において，この発展は Kepler の楕円の長半軸の永年変化，つまり，惑星が太陽に落下したり，互いに衝突したり，摂動量に反比例する時間の間に遠方へ飛び去ったりすることを意味する．保存的な摂動が第1近似で発展を導いたとすると，これが千年のオーダーの時間の間に惑星を見舞う運命であろう．有難いことに，非保存的摂動の大きさのオーダーはずっと小さい．

作用変数の発展が存在しない，という上に述べた厳密でない摂動論の議論には，以下に述べる Kolmogorov の定理によって1つの正当化が与えられる．

B. 摂動系の不変トーラス

定理 非摂動 Hamilton 系は非退化であるとする．このとき，十分に小さい保存的 Hamilton 摂動に際して，次のように，非共鳴不変トーラスの大部分は消え去らずに幾分変形されるだけである．つまり，摂動系の相空間の中にも不変トーラスが存在して，それらは振動数の数が系の自由度に等しいような条件周期的な巻き線である相曲線によって至るところ稠密に満たされている．

ここで不変トーラスが大部分をなすとは，それらの補集合の測度が，摂動が

小さくなるに従い小さくなることを意味する. ——

この A. N. Kolmogorov の定理の証明は彼自身による次の2つの注意に基づいている.

1. 次のような非摂動系の非共鳴な振動数の組を1つ固定する. すなわち, その振動数は互いに1次独立であるばかりか, 低次のいかなる共鳴関係式も, 近似的にも満たすことがないとする. 正確にいうと, 定数 C と ν が存在して, 全ての整数ベクトル $k\neq0$ に対して $|(\omega, k)|>C|k|^{-\nu}$ を満たす振動数の組 ω を固定する.

ν が十分に大きいと (たとえば, $\nu=n+1$), 上にいう非共鳴条件を満たさないベクトル ω の (固定された有界領域内の) 集合の測度は, C が小さくなるに従って小さくなることを示すことができる.

次に, 固定された振動数 ω に対応する非摂動系の非共鳴不変トーラスの近傍に, 摂動系の不変トーラスであって, その上には同じ固定された (したがって, 上の非共鳴条件を満たしている) 振動数 ω をもつ条件周期運動が乗っているようなものを求める.

こうして, 摂動論では通常, (摂動に依存する振動数を導入することにより) 振動数を変動させるのに対し, 振動数を非共鳴で一定のままに保たなければならない. したがって, 摂動に対応して運動が固定された振動数 ω をもつように初期条件を選ばなければならない. 摂動に対応して初期条件の小さい変更ができるのは, 非退化条件によって振動数が作用変数と共に変るからである.

2. 第2の注意というのは, 不変トーラスを求めるのに, 摂動論では普通, 摂動のパラメーターで巾級数展開するが, そのかわりに, Newton の接線法のように急速に収束する方法が使えるということである.

代数方程式の根を求めるのに Newton の方法を使うと, 最初 ε の誤差が, n 回近似すると ε^{2^n} となる. こういう**急速な収束**によって, 近似の各段階で現われる小さい分母の影響から生じる困難を乗り越えることができるので, 無限回の近似を遂行できるばかりか, 全ての手続きの収束性の証明も可能になる.

こういうことが可能なための条件として, 非摂動 Hamilton 関数 $H_0(I)$ が解析的かつ非退化であることと, 摂動 Hamilton 関数 $\varepsilon H_1(I, \varphi)$ が解析的であり, かつ角変数 φ に関して 2π-周期的であることがあげられる. 小さいパラメ

ーター ε が現われるのは本質的ではない．重要なことは，変数 φ の実平面の，或る半径 ρ の複素近傍で，摂動が十分に小さい(或る正の関数 $M(\rho, H_0)$ より小さい)ことだけである．

Newton の方法と各近似で J. Nash の関数の平滑化の技巧とを結合させると，解析性は十分に高い次数までの微分可能性でおきかえられる，ということを J. Moser [1] は示した．

こうして，固定された振動数 $\boldsymbol{\omega}$ をもつ摂動系の条件周期運動が得られるが，これは摂動のパラメーター ε に関して滑らかな(解析的な場合は解析的な)関数であることが分る．したがって，Newton の方法を使わずに，ε の巾級数の形で求めることが可能なのかもしれない．この級数は Lindstedt の級数と呼ばれ，その係数を実際に求めることができる．しかし，級数の収束性は Newton の近似を使って間接的に示すことができるだけである．

C. 不安定帯　摂動問題の相空間の中に不変トーラスが存在するということは，積分可能な系に近い系の大部分の初期条件に対して，運動が最大の個数(n 個)の振動数をもつ条件周期運動のままに止まっていることを意味する．

初期条件(初期点)が不変トーラスの間の隙間にあって，非摂動問題の共鳴不変トーラスのかわりに生じる残りの相曲線はどうなるか，という問題が自然にでてくる．

振動数の個数が最大から1だけ小さい[すなわち，$n-1$ 個]共鳴トーラスの分解は，摂動論の第1近似で容易に調べられる．このためには，上の n 次元共鳴トーラスは非摂動系の相曲線によって至るところ稠密に満たされている $n-1$ 次元不変トーラスに分割されるのだが，これらの $n-1$ 次元トーラスの上で摂動を平均する必要がある．平均化の結果，自由度1の保存系を得るが，これは容易に調べることができる(付録7の，共鳴の近くでの相振動の研究を参照せよ)．

いま考えた近似においては，分解された n 次元共鳴トーラスの近傍に，$n-1$ 次元の不安定なトーラスと安定なトーラスが交互に現われ，安定トーラスの回りでは相振動が起っている．これらに対応する条件周期運動は n 個の振動数の完全な組をもっているが，このうち $n-1$ 個はもとの振動の速い振動数で，残りの1個は相振動の緩やかな($\sqrt{\varepsilon}$ のオーダーの)振動数である．

しかしながら，非摂動系の運動と摂動系の運動との違いが，相振動の《島》の発生にだけあると考えるべきでない．実際の現象は上に述べた第1近似よりはるかに複雑である．摂動問題の相曲線が複雑な挙動を示す例の1つが，付録7で考察したセパラトリックスの分離である．

不変トーラスの外での摂動系の運動を調べるときには，自由度が2の場合とそれより大きい場合を区別しなければならない．自由度が2のときは，相空間は4次元で，エネルギー・レベル多様体は3次元となる．したがって，2次元の不変トーラスはエネルギー・レベル集合を分割する．

このとき，摂動問題の2つの不変トーラスの間の隙間から出発する相曲線は，永久にこの2つのトーラスで囲まれた領域に止まっている．したがって，この相曲線はどんなに複雑に絡んでいようとも，この隙間の外へは出られず，対応する作用変数はいつまでも初期条件の近くに止まっている．

もし自由度nが2より大きいと，n次元不変トーラスは$2n-1$次元エネルギー・レベル多様体を分割しない．ちょうど，平面上の点，あるいは空間における直線のように位置していることになる．このとき，種々の共鳴状態に対応する《隙間》は互いに連結されるため，共鳴点の近くから出発する相曲線が遠方に行くのに，不変トーラスは何ら妨げとならない．したがって，このような相曲線に沿っては，作用変数が全ての時間を通じてその初期条件の近くに止まる，と期待することはできない．

いいかえると，自由度2の系(等エネルギー的非退化条件は満たされているとする．これは一般には満たされる)では，摂動が十分小さければ，相軌道に沿って作用変数は，摂動論のいかなる近似においても永年摂動をもたない(つまり，εを摂動の大きさとして，任意のNに対して$(1/\varepsilon)^N$のオーダーの時間内では殆ど変化しない)ばかりか，(相空間の大部分をなす)2次元トーラスを満たす条件周期的な非共鳴相曲線に対しても，また他の初期条件に対しても作用変数は永久に初期条件の近くに止まる．

それと同時に，2より大きい自由度をもつ系で非退化条件を全て満たし，大部分の初期条件に対しては運動が条件周期的となるにもかかわらず，或る初期条件に対して作用変数は緩やかに初期条件から遠ざかるものが存在する．この遠ざかる平均速度は，得られた例(Arnold[4])では，$e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$のオーダーである．

つまり，摂動 ε が小さくなると，そのどんな巾よりも速く減少する．このために，摂動論のどんな近似を使っても，いま述べた遠ざかる現象をとらえることができないのも不思議ではない[†]．(ここで，平均速度とは時間に対する作用変数の増分の割合である．したがって，実際には $e^{1/\sqrt{\varepsilon}}$ のオーダーの時間でのオーダー 1 の増分を問題にしている.)

積分可能な系に近い，自由度 n の正準 Hamilton 方程式の一般的な系において，作用変数が初期条件から遠ざかる平均速度の上からの評価を与えたのは，最近の N. N. Nekhoroshev の論文 [1] である．

この上からの評価も，上に述べた下からの評価と同様に，e^{-1/ε^d} の形である．こうして，$\varepsilon<\varepsilon_0$ のとき時間が e^{1/ε^d} に比べて小さい限り作用変数の増分は小さい．ここで，ε は摂動の大きさ，d は 0 と 1 の間の数で，ε_0 と同様に非摂動 Hamilton 関数 H_0 の性質から決まるものである．このとき，H_0 には或る非退化条件が課せられている．(これを述べると長くなるが，一般にはこの条件は満たされている．とくに H_0 の 2 次の部分が凸ならば，つまり関数 H_0 の 2 次微分が定符号形式ならば十分である.)

この上からの評価から分るように，作用変数の永年変化は摂動論のどんな近似によっても捕捉されない．この変化の平均速度が指数関数のオーダーで小さいからである．作用変数の永年変化は，明らかに或る定まった方向に変化するという性質をもたず，不変トーラスの周りの共鳴領域の中を，多かれ少なかれ，でたら目に彷徨するという性質をもつ，ということにも注意しよう．ここに現われた問題の詳しい考察は G. M. Zaslavskii-B. V. Tchirikov [1] にある．

D. 不変トーラスに関する定理のいろいろな変化形　自励系における不変トーラスの保存に関する定理に類似の命題が，周期的係数をもつ非自励系と，シンプレクティック写像に対しても証明できる．

同様の主張が，自励系または周期的係数をもつ系の平衡点の近傍や，あるいは相流の閉相曲線の近傍や，あるいはまたシンプレクティック写像の不動点の近傍における，微小振動の理論に関しても成り立つ．

それぞれの場合に必要な非退化条件はさまざまである．よって，ここで参考

---

†) 付録 7, E 項の訳者脚注を参照せよ．

のためにこれらの非退化条件を述べておく．ここでは，《一般の位置にある》系においては常に満たされるような，もっとも簡単な非退化条件に限った．多くの場合，非退化条件は弱めることができるが，その結果得られるものに比べて，その定式化は複雑にすぎる．

1. 自励系　Hamilton 関数は

$$H=H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\varphi),\qquad I\in G\subset \mathbf{R}^n,\ \ \varphi \bmod 2\pi\in T^n$$

である．非退化条件

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\right|\neq 0$$

が満たされれば，小さな摂動 $(\varepsilon\ll 1)$ に際して，不変トーラスの大部分は保存される*)．

等エネルギー的非退化条件

$$\det\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} & \dfrac{\partial H_0}{\partial I}\\[2ex] \dfrac{\partial H_0}{\partial I} & 0\end{vmatrix}\neq 0$$

が満たされれば，各エネルギー・レベル多様体の上に，不変トーラスの集合が存在する．その残りの測度は小さい．これらのトーラス上の振動数は，一般に摂動の大きさ ε に依存しているが，振動数の比は ε を変化させてもそのままである．

$n=2$ のとき等エネルギー的非退化条件が満たされれば，十分に小さい摂動に際して，作用変数は初期条件の近くに永久に止まっている．この意味で，作用変数は安定である．

2. 周期系　Hamilton 関数は

$$H=H_0(I)+\varepsilon H_1(I,\varphi,t),\qquad I\in G\subset \mathbf{R}^n,\ \ \varphi \bmod 2\pi\in T^n$$

であり，摂動 εH_1 は φ だけでなく t に関しても 2π-周期的である．非摂動系を $2n+1$ 次元空間 $\{(I,\varphi,t)\}=\mathbf{R}^n\times T^{n+1}$ の中で考察することは自然である．不変トーラスは $n+1$ 次元である．非退化条件

---

*)　もちろん，摂動するとトーラスは少し変形する．

$$\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\right| \neq 0$$

が満たされれば，小さい摂動($\varepsilon \ll 1$)に際して，$n+1$ 次元不変トーラスの大部分は保存される．

$n=1$ のとき，この非退化条件が満たされれば，十分に小さい摂動に際して，作用変数は永久に初期条件の近くに止まる．この意味で，作用変数は安定である．

3.《$2n$ 次元円環》の写像 $(I, \varphi) \mapsto (I', \varphi')$　母関数は

$$S(I', \varphi) = S_0(I') + \varepsilon S_1(I', \varphi), \qquad I' \in G \subset \mathbf{R}^n,\ \ \varphi \in T^n$$

である．非退化条件

$$\det\left|\frac{\partial^2 S_0}{\partial I'^2}\right| \neq 0$$

が満たされれば，小さい摂動($\varepsilon \ll 1$)に際して，非摂動写像

$$(I, \varphi) \longmapsto \left(I,\ \varphi + \frac{\partial S_0}{\partial I}\right)$$

の不変トーラスの大部分は保存される．

$n=1$ ならば，普通の円環をそれ自身の上に写す保測写像である．非摂動写像は各円周 $I=\text{const}$ を不変にし，その上で回転である．このとき，非退化条件は回転角が円周ごとに変化することを意味する．

$n=1$ の場合，不変トーラスは普通の円周になる．このとき，上の定理から次のことがわかる．すなわち，摂動が十分に小さいとき，写像を反復してできる 1 点の像はすべて，最初それが乗っていた円周の近くに止まる．

4. 平衡点の近傍(自励的な場合)　線形近似において平衡点は安定であると仮定する．したがって，n 個の固有振動数 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ が定まっている．固有振動数の間には共鳴関係

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0 \qquad (k_i \text{ は整数で，} 0 < \sum |k_i| \leq 4)$$

はないものと仮定する．このとき，Hamilton 関数は Birkhoff の標準形に帰着され，

$$H = H_0(\tau) + \cdots$$

となる(付録 7 参照)．ここで，

$$H_0(\tau) = \sum \omega_k \tau_k + \frac{1}{2} \sum \omega_{kl} \tau_k \tau_l$$

で，… は平衡点からの距離に関して 5 次以上の項を表わす．

非退化条件

$$\det |\omega_{kl}| \neq 0$$

が満たされれば，平衡点の十分小さい近傍において，ほとんど全測度をもつ不変トーラスの集合が存在する．

等エネルギー的非退化条件

$$\det \begin{vmatrix} \omega_{kl} & \omega_k \\ \omega_l & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

が満たされれば，(臨界レベルに十分近くの)各エネルギー・レベル集合上において，このような不変トーラスの集合が存在する．

$n=2$ の場合，関数 H_0 の 2 次の部分が 1 次の部分で割れなければ等エネルギー的非退化条件が満たされる．このとき，等エネルギー的非退化性から平衡点の Liapunov 安定性が導かれる．

5. 平衡点の近傍(周期的な場合)　ここでもまた，線形近似における安定性を仮定する．したがって，n 個の固有振動数 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ が定まっている．固有振動数と係数変化の振動数(これは 1 に等しいとみなそう)との間には，共鳴関係

$$k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n + k_0 = 0 \qquad \left(0 < \sum_{i=1}^{n} |k_i| \leq 4\right)$$

は存在しないと仮定する．

このとき，Hamilton 関数は自励系と同じような Birkhoff の標準形に帰着される．ただし，残余項は時間に関して 2π-周期的である．

非退化条件

$$\det |\omega_{kl}| \neq 0$$

が満たされれば，$2n+1$ 次元拡大相空間の中に，平衡点を表わしている円周 $\tau=0$ の近くで，$n+1$ 次元不変トーラスが存在する．

$n=1$ の場合，非退化条件は微小振動の周期をその振幅の 2 乗で微分したとき 0 にはならないということに帰する．このとき，非退化条件が満たされれば，平衡点は Liapunov 安定である．

6. 写像の不動点　ここでは，不動点で線形化した正準写像の $2n$ 個の固有値はすべて絶対値 1 であり，低次の共鳴関係

$$\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}=1, \qquad |k_1|+\cdots+|k_n|\leq 4$$

を満たしていないと仮定する(ここで，$2n$ 個の固有値は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_n$ である)．

このとき，不動点における Taylor 展開の 4 次以上の項を無視すると，写像は Birkhoff の標準形の形に書ける．

$$(\tau, \varphi)\longmapsto(\tau, \varphi+\alpha(\tau)),$$

ここで

$$\alpha(\tau)=\frac{\partial S}{\partial \tau}, \qquad S=\sum\omega_k\tau_k+\frac{1}{2}\sum\omega_{kl}\tau_k\tau_l.$$

(平衡点の近傍における普通座標は $p_k=\sqrt{2\tau_k}\cos\varphi_k$, $q_k=\sqrt{2\tau_k}\sin\varphi_k$ である.)

非退化条件

$$\det|\omega_{kl}|\neq 0$$

が満たされれば，平衡点の十分小さい近傍において n 次元不変トーラスが(それぞれトーラス $\tau=\mathrm{const}$ の近くに)存在し，その集合はほとんど全測度をもつ．

$n=1$ ならば，写像として，通常の平面からそれ自身への写像を扱うことになり，不変トーラスは円周になる．非退化条件は，標準形に対しては，円周の回転角をその円周が囲む面積で微分すると(不動点で，したがってその近傍で)，0 とはならないことを意味する．

$n=1$ の場合，非退化条件が満たされれば，写像の不動点は Liapunov 安定である．このとき，低次の共鳴が存在しないという条件は，

$$\lambda^3\neq 1, \qquad \lambda^4\neq 1$$

なる形であることに注意しよう．

このようにして，面積を保つ平面上の写像を考えるとき，この写像の線形部分が，90° または 120° の倍数でない角度の回転であって，さらに，Birkhoff の標準形での係数 ω_{11} が 0 でないならば(この条件は，回転角が半径に自明でない仕方で依存することを保証する)，この写像の不動点は Liapunov 安定である．

以上では，これらの定理で仮定されている滑らかさの条件には触れなかった．

必要最小限の滑らかさについては 1 つとして分っていない．1 例を挙げると，平面上の写像の不動点の安定性に関する最後の命題は，まず 333 次までの微分可能性の仮定のもとに，J. Moser により証明されたが，その後(Moser, Rüssmann の努力で)，微分の次数は 6 にまで下げられた．

E. 不変トーラスに関する定理とその一般化の応用　上に定式化された定理が適用できる力学の問題はたくさんある．この種のもっとも簡単な例として，周期的に変化する外場のもとでの，あるいは支点が鉛直方向に振動する振子の運動がある．

パラメーター共鳴がないときには，振子の下の平衡点は線形近似において安定であることはよく知られている．(3 次と 4 次の共鳴が存在しないという付加的な仮定のもとに)非線形効果を考えても，この平衡点が安定であることは，不変トーラスに関する定理の助けをかりて証明できる．

同様にして，結合された非線形振動子系の条件周期運動を調べるのに，不変トーラスに関する定理が利用できる．

他の例は楕円面に近い凸曲面上の測地流である．この系は自由度 2 であって，3 軸楕円面に近い曲面上の測地線の大部分は，曲面の曲率線に近い 2 本の《焦線》の間で振動して，この間の円環を至るところ稠密に満たすことは確かである．同時に，曲面の変形に際して(3 次と 4 次の共鳴がないとして)楕円体の中軸(中間の長さの軸)を含む 2 つの楕円から 2 本の閉測地線が得られるが，この測地線が安定であることをいう定理が得られる．

もう 1 つの例として，かってな凸形の撞球台上に描かれる閉軌道を考えることができる．撞球の閉軌道のうちで，線形近似で安定なものが存在する．そして，一般の場合，これらは実際に安定である，と結論できる．そのような安定な撞球の軌道の例として楕円の短軸がある．したがって，撞球台が楕円に近いとき，楕円の短軸に近い撞球の閉軌道は安定である．

非対称な重い剛体の回転の問題に，不変トーラスに関する定理を適用すると，急速に回転している物体の積分不可能な場合を調べることができる．高速回転は，数学的には弱い重力場での普通の速度をもつ運動に同値である．本質的なパラメーターはポテンシャル・エネルギーの運動エネルギーに対する比である．このパラメーターの値が小さいと，第 1 近似として，Euler の剛体の運動が利

用できる．

不変トーラスに関する定理を，循環座標(鉛直軸の回りの回転)をとり除いて得られる自由度2の系の問題[†]に適用すると，高速回転している物体の運動に関する次の結論が得られる．物体の回転の運動エネルギーがポテンシャル・エネルギーと比べて十分大きいと，角運動量ベクトルの長さ M と，その水平面に対する傾きは永久に初期値の近くに止まる[††]．

このことから，物体の運動は次のような場合を除いて，方位角の歳差運動と Euler-Poinsot 運動の組み合せに永久に近いことが分る[†††]．除外される場合は，中間の長さの慣性軸の回りに物体が回転するときの値に，運動エネルギーと角運動量の大きさ M の初期値が近い場合である．この場合は特殊な初期条件に対してだけ実現されるが，中軸の近くにおけるセパラトリックスの分離の結果，Euler-Poinsot 運動におけるのより複雑な**とんぼ返り**がこの中軸の近くで起こる[††††]．

不変トーラスに関する定理の一般化の1つから，周期的に変動するパラメーターをもつ1次元振動系においては，作用変数は永久的な断熱不変量であるという定理が導かれる．ここで，パラメーターの変動の法則は，1つの固定された緩やかに変動する時間の滑らかな周期関数で与えられていて，この問題の小さいパラメーターは，固有振動の周期とパラメーターの変動周期との比であると仮定しなければならない[†††††]．

このとき，パラメーターの変動周期が十分に大きいと，相点の断熱不変量の変動は無限の時間が経過しても小さいままに止まる．

同様にして，軸対称な磁場における荷電粒子の運動に関する問題で，作用変数の永久的な断熱不変性を示すことができる[††††††]．この問題で軸対称性がなくなると，自由度が2から3に増え，したがって，不変トーラスはエネルギー・レベル多様体を分割せず，相曲線が共鳴帯の間を彷徨するということが重要に

---

†) 付録5，C 項の例を参照．

††) Arnold [2] の付録を参照．

†††) Euler-Poinsot 運動の場合，角運動量ベクトルの方位角は一定のままであることに注意．

††††) 第6章の§29，B 項と付録7の E 項を参照．

†††††) 第10章の§52，E 項参照．

††††††) Arnold [3]，2章参照．

なる．

最後に，3体（または多体）問題に適用すると，**《惑星型》の条件周期運動**を見つけることができる．この運動を記述するためには，惑星の運動の問題において，Kepler 近似の次の段階の近似について少し述べる必要がある．簡単のために，ここでは平面上の問題に限定する[†]．

Kepler の楕円のおのおのに対して，楕円の焦点（つまり太陽）を楕円の中心に結ぶベクトルを考えよう．このベクトルは **Laplace ベクトル**といわれ，軌道の離心率と近日点の方向を特徴づける．

惑星間の相互作用によって Kepler の楕円は（したがって，Laplace ベクトルも）時間と共に緩やかに変動する．このとき，長半軸の変動と Laplace ベクトルの変動との間には大きな違いがある．すなわち，長半軸は永年摂動をもたない，つまり第1近似においては，その平均値のまわりに僅かに振動するだけである（《Laplace の定理》）が，Laplace ベクトルは周期的な振動も永年運動も行う．永年運動は次のようにして得られる．まず，惑星がその軌道の各部分を通過するのに要した時間に比例して，惑星を“引き延ばして”得られる“輪”の引力でもって惑星の引力に置き換える，つまり，摂動を高速運動に沿って平均するのである．Laplace ベクトルの実際の運動は，永年運動に微小振動を重ね合わせたものとして得られる．われわれが短い時間（数年間）を問題にしているとき，この振動は非常に重要であるが，長い時間（数千年間）を問題にしているときには，この効果は永年運動の効果に比べて小さいものとなる．

（Lagrange によってすでになされた）計算によると，同一平面上を運動している n 個の惑星のおのおのの Laplace ベクトルの永年運動は（離心率自身よりは小さい離心率の2乗を無視すれば）次のようになる．

惑星の軌道平面上に，それぞれ一定の長さをもち，一定の角速度で一様に回転している n 個のベクトルを配置する．このとき，Laplace ベクトルはこれらのベクトルの和である[††]．

---

†)　Arnold [3]，3章参照．

††)　正確にいうと，k 番目の惑星の Laplace ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ は $\boldsymbol{e}_k=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{e}_{kj}$ と表わされる．$\boldsymbol{e}_{kj}$ は一定の長さで，一様に回転するベクトルであって，その角速度 ν_j はすべての k に対して同じである．Arnold [3]，3章§1を参照せよ．第10章の§51, C 項の問題およびその脚注も参照せよ．

Laplace ベクトルの運動がこのように記述できるのは，Laplace ベクトルの永年運動を記述する，高速運動にそって平均化された Hamilton 系が，離心率 0 に対応する平衡点をもつからである．上に述べた Laplace ベクトルの運動は，いま述べた平衡点の近傍における微小振動を固有振動へ分解したものである．Laplace ベクトルの一様に回転する各成分ベクトルの角速度は，まさに固有振動数であり，各成分ベクトルの長さは，固有振動の振幅を定める．

地球の Laplace ベクトルの運動は明らかに氷河期の到来に関係する要因の1つであることに注意しよう．というのも，地球軌道の離心率が大きくなると(面積速度一定の法則により)，太陽の近くを通過する時間が減少し，遠くを通過する時間が増加するからである．したがって，離心率が大きくなると，気候は一層寒く厳しいものとなる．この効果の大きさは，たとえば，レニングラードの緯度(60°N)で1年間に受ける太陽エネルギーの量は，(離心率が小さくなると)いまのキエフの緯度(50°N)での量に相当し，(離心率が大きくなると)いまのタイムイル半島(80°N)での量に相当する．離心率の変動を特徴づける時間(約1万年)は氷河期の到来の周期とよく一致している．

不変トーラスに関する定理から次の結論を得る．惑星の質量が十分小さいと，問題の相空間の中に，次のような条件周期的相曲線で満たされている正の測度をもつ集合が存在する．これらの相曲線に対応する惑星の運動は，緩やかに変動する小離心率の楕円に沿っての運動に近い．このとき，Laplace ベクトルの運動は上で述べた近似運動に近い．さらにいうと，惑星質量が十分小さいと，次のような相空間の領域で，すなわち，Kepler 近似では互いに相交わらない小離心率の楕円に沿う同じ公転方向をもつ惑星の運動に対応する相空間の領域で，いま述べた型の運動は大きな部分を占める[†]．

n 個の惑星の平面問題では，太陽を不動だと思えば自由度は $2n$ である．角運動量積分により，1つの循環座標を消去することができるが，まだ余りにも多くの変数が残っていて，不変トーラスがエネルギー・レベル多様体を分割するというわけにはいかない(惑星が全部で2個であっても，この多様体は5次元，トーラスは3次元である)．このため，いま考えている問題では，無限の時間の経過に際して，全ての初期条件に対して長半軸が保存されるとは結論で

---

†) Arnold [3]，3章§1参照．

きず，単に大部分の初期条件に対してそういえるだけである．

自由度2の問題はもっと理想化すると出てくる．2個の惑星の1つを《小惑星》で置き換える．これはもう1つの惑星《木星》の場の中で運動しているが，後者の運動を摂動しないものとする．

このような小惑星の運動に関する問題は**制限3体問題**といわれる[†]．平面上の制限3体問題は，小惑星に対して，時間に周期的に依存する自由度2の系になる．その上，木星の軌道が円であるとすると，木星と共に回転する座標系では，小惑星に対して自由度2の自励 Hamilton 系，いわゆる円平面制限3体問題が得られる．

この問題には，小さいパラメーターとして木星質量と太陽質量との比がはいっている．このパラメーターの値が0であるときは，摂動を受けない小惑星の Kepler 運動が対応しているが，これはまた，われわれの4次元相空間では，2次元トーラスに沿う条件周期運動として表わされる(座標系が回転しているから)．この条件周期運動の振動数の1つは全ての初期条件に対して同一である．これは座標系の回転の角速度，つまり，木星が太陽を回る回転の振動数である．もう1つの振動数(これは小惑星が太陽を回る回転の振動数である)は初期条件に依存して，Hamilton 関数の固定された1つの3次元レベル多様体上で変化する．

したがって，われわれの問題では非退化条件は満たされてはいないが，等エネルギー的非退化条件は満たされている．ゆえに Kolmogorov の定理が適用できて次の結論を得る：摂動を与える惑星(木星)の質量が0ではなく十分に小さい場合には，無理数の振動数の比をもつ不変トーラスの大部分は保たれる．

さらに，2次元不変トーラスは Hamilton 関数の3次元レベル多様体を分割する．したがって，小惑星の Kepler の楕円が最初摂動を与える惑星(木星)の軌道と交わらず，この惑星(木星)質量が十分に小さいならば，小惑星の Kepler の楕円の長半軸と離心率は永久に初期値の近くに止まる．

このとき，静止座標系で見ると小惑星の Kepler の楕円は緩やかに回転しうる．なぜなら，われわれの系は等エネルギー的非退化であるだけで，したがっ

---

†) Abraham [1]，10章，Moser [4]，Niwa-Ootsuki [1] 参照．

て，不変トーラスの摂動に際して振動数は保たれず，ただその比だけが保たれるからである．摂動の結果，小惑星の近日点の方位角の運動の振動数が，動座標系で見ると木星の振動数と僅かに違うということが起りうる[†]．このとき，静止座標系において近日点はゆっくりと回転していくだろう．

†）回転座標系での小惑星の近日点の方位角の運動の振動数は，摂動のないときは，回転座標系のとり方により木星の回転の振動数と一致しており，木星の回転の振動数は摂動後も不変であることに注意せよ．

付録9　Poincaré の幾何学的定理，その一般化と応用

天体力学の問題の周期解を研究する中で H. Poincaré は，問題の基本的な難しさをすでに含んでいる，非常に単純なモデルを構成した．このモデルは平面上の円環をそれ自身の上に写す保測(すなわち，面積を保つ)写像である．

この型の写像は自由度2の力学系を調べるときに出てくる．つまり，2次元の切断面をそれ自身の上に写す写像は次のように作られる：切断面上の各点 P は，この点 P から出る相曲線が次にまたこの切断面と交わる点 P' へ写される(付録7を見よ)．

このとき，閉相曲線にはこの写像またはその巾の不動点が対応する．逆に，この写像またはその巾の不動点は閉相曲線を定める．

こうして，力学の問題の周期解の存在に関する問題は，円環をそれ自身の上に写す保測写像の不動点を調べる問題に帰着される．

このような写像にとり組んで，H. Poincaré は次の定理に到達した．

A. 円環からそれ自身の上への写像の不動点

定理　平面上の円環をそれ自身の上に写す保測同相写像が与えられているとする．円環の境界の2つの円周はこの写像により互いに反対方向に回転するものとする．このとき，この写像は不動点を少なくとも2個もつ．——

境界の円周が互いに反対方向に回転するという条件から，境界が $x=a$, $x=b$ であるように円環に座標 $(x, y \bmod 2\pi)$ を選ぶと，写像は式

$$(x, y) \longmapsto (f(x, y), y+g(x, y))$$

で与えられる．ここで，関数 f, g は共に連続で，y に関して 2π-周期的であり，

$$f(a, y) \equiv a, \qquad f(b, y) \equiv b,$$
$$g(a, y) < 0, \qquad g(b, y) > 0$$

が全ての y に対して成立する．

この定理は Poincaré の死の少し前に公表されたが，後 G. D. Birkhoff をまって始めてその証明が与えられた(彼の著書 [1] を参照)．

現在までのところ，この定理に関連した多くの問題，とくに，大きい自由度

をもつ問題の周期解の研究にとって，重要な，高次元への拡張の試みは未解決のままである．

というのは，Poincaré がこの定理を導き出したときの考え方は他の多くの場合にも適用し得るからである．一方，Birkhoff の証明は巧妙すぎてなかなか一般化できない．したがって，Poincaré の考え方が暗示している結論が 2 次元円環の枠を越えて正しいのかどうか分っていない．その考え方というのは次に示すものである．

B. 写像の不動点と母関数の臨界点の関係 母関数 $Xy+S(X, y)$ によって，円環のシンプレクティック微分同相

$$(x, y) \longmapsto (X, Y)$$

を与えよう．ここで，関数 S は y に関して 2π-周期的である．これが微分同相であるためには，$\partial X/\partial x \neq 0$ であることが必要である．このとき，

$$dS=(x-X)\,dy+(Y-y)\,dX$$

となるから，この微分同相の不動点は関数 $F(x, y)=S(X(x, y), y)$ の臨界点である．この関数 F は形式

$$(x-X)\,dy+(Y-y)\,dX$$

の積分として定めることにより常に構成できる．この関数の勾配は境界の 2 つの円周上では，(互いに反対向きに回転するという条件から)同時に，円環の内側に向うか外側へ向う．

ところで，円環上の滑らかな関数で，その勾配が境界の円周上で内側へ向う(あるいは外側へ向う)ものは，全て円環の内部に臨界点(最大または最小)をもつ．さらに，このような関数の円環内での臨界点は少なくとも 2 個あることが示せる．したがって，もし関数 F の各臨界点が写像の不動点であることが正しければ，われわれの微分同相は少なくとも 2 個の不動点をもつといえよう．

だが残念なことに，最後の主張は F を X と y によって表わすことを可能にする $\partial X/\partial x \neq 0$ という付加的な条件のもとでのみ正しいのである．こうして，われわれの考え方は恒等写像とそんなにはかけ離れていない写像に対して通用する．たとえば，関数 S の導関数が 1 より小さければ十分である†)．

†) $|\partial^2 S/\partial y \partial X|<1$ の誤りと思われる．

(他の母関数 Φ を選んで)[*] この考え方を改良すれば，Jacobi 行列 $D(X, Y)/D(x, y)$ の固有値がどんな点においても決して -1 でなければ，つまり，考えている写像がどんな点においてもその点の接空間の向きを変えなければ，十分であることが分る．残念なことに，恒等写像から隔たった写像に対しては，或る点においてこの条件が破られる．一般の場合の Poincaré の定理の証明には全く異なった考え方を使う．

写像の不動点と母関数の臨界点の関係は，2 次元の円環の写像に関する定理そのものよりももっと深遠な事実のように思われる．

以下に数例を挙げるが，そこではこの関係から内容豊かな結論を引き出すことができる．この結論はいくつかの制限のもとに正しいのであるが，この制限が必要かどうかについては明らかでない．

C. トーラスのシンプレクティック微分同相　重心を変えないトーラスのシンプレクティック微分同相

$$(x, y) \longmapsto (x+f(x, y),\ y+g(x, y)) = (X,\ Y)$$

を考えよう．ここで，$x, y \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ はトーラス上の角座標である．変換がシンプレクティックであることは，Jacobi 行列 $D(X, Y)/D(x, y)$ が 1 であることを意味し，重心が保たれるという条件は，関数 f, g の平均値が 0 に等しいことを意味する．

定理　上のような微分同相は重複度を込めて少なくとも 4 個の不動点をもつ．そのうち少なくとも 3 個は位置も異なる．ただし，Jacobi 行列の固有値は全てどんな点においても決して -1 にならないと仮定する．——

証明は

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\int (X-x)(dY+dy) - (Y-y)(dX+dx)$$

により定義されたトーラス上の関数を考えることと，トーラス上の滑らかな関数は(重複度を込めて)少なくとも 4 個の臨界点をもち，そのうち少なくとも 3 個は位置も異なるということによる．

この定理を固有値に対する制限なしで証明しようとすると，円環に対する定

---

*)　$d\Phi = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} X-x & Y-y \\ dX+dx & dY+dy \end{vmatrix}$

理で Poincaré が出会ったのとよく似た困難にぶつかる．

固有値に関する条件を捨てることができれば，円環の場合の定理はトーラスの場合の定理から出てくることに注意しよう．実際，われわれの円環の2つのコピーを平行にしてすぐ近くに並べ，それらの対応する境界の円周の間に幅のせまい円環を2つはめ込んで，われわれの円環を結び合わせて1つのトーラスを作ろう．

このとき，円環の写像を，次のようなトーラスのシンプレクティック微分同相にまで拡張できる：1) 2つの大きい円環上では微分同相はもとのものと一致する．2) 結び合わせている円環のおのおのの上では微分同相は不動点を持たない．3) 重心は動かない．

このようなトーラスの微分同相の構成には，2つの境界の円周が反対方向に回転するという性質を使っている．結び合わせている円環上では，全ての点はその境界の2つの円周上の点と同じ方向に移動する．結び合わせている2つの円環上では，移動する方向は互いに逆向きなので，移動の大きさは重心が動かないように選べる．

トーラス上の4個の不動点のうち2個はもとの円環上になければならない．こうして，トーラスの場合の定理から円環の場合の定理を得る．

上述のトーラスの場合の定理は，2次元だけでなく，高次元の他のシンプレクティック多様体へも一般化できる．この一般化を定式化するためには，重心不変の条件をまず再定式化する必要がある．

$g: M \to M$ をシンプレクティック微分同相とする．微分同相 g が**恒等写像にホモローグ**であるとは，シンプレクティック微分同相からなる滑らかな曲線 g_t によって，g が M の恒等写像と結べ，速度場 $\dot{g}_t$ が各時刻 t で1価な Hamilton 関数をもつ場合をいう．恒等写像にホモローグなシンプレクティック微分同相は，多様体 M のシンプレクティック微分同相全体のなす群の中で，単位元の連結成分の交換子群をなすことが証明できる．

多様体が2次元トーラスの場合，シンプレクティック微分同相が，恒等写像にホモローグであることと重心を変えないことは一致する．

こうして，次の Poincaré の定理の一般化に到達する．

定理 コンパクトなシンプレクティック多様体の恒等写像にホモローグなシンプレクティック微分同相は，恒等写像とそんなにかけ離れていない限り，この多様体上の滑らかな関数がもつ臨界点の最小限の数と少なくとも同じだけの不動点をもつ[†)]．——

---

†) 証明については V. I. Arnold [16]，A. Weinstein [2] を参照．

恒等写像にホモローグであるという条件は，トーラス上の不動点をもたない平行移動の例からも分るように，本質的であるということを注意しよう．

最後の条件（微分同相が恒等写像からそんなにかけ離れていない）についていうと，これが本質的かどうかはっきりしていない．多様体が $2n$ 次元トーラスである場合には，（$\mathbf{R}^{2n}$ 上に与えられた或る大域的なシンプレクティック座標系で）微分同相の Jacobi 行列が -1 を固有値に持たないということで十分である．

この種の制限は高次元では多分必要であろう．というのは，次の A. I. Schnirelman-N. A. Nikishin の定理と同様に，Poincaré の定理が本質的に 2 次元のものであるということがありうるからである：2 次元球面の保測微分同相は少なくとも異なる 2 点を不動点にもつ．

この定理の証明は次のことに基づいている．2 変数の滑らかな関数の勾配ベクトル場の指数は，その孤立特異点において，$1, 0, -1, -2, -3, \cdots$ ではありうるが，1 より大きくなりえない．また，2 次元球面の向きづけを変えない微分同相の不動点での指数の総和は 2 に等しい．

多変数の滑らかな関数の勾配のときには，特異点での指数は任意の整数値をとりうる．

D. Lagrange 多様体の交わり　Poincaré の考え方は，円環の各半径上で半径方向にだけ動く点を考えると，少し違った形で与えられる．円環の境界の円周は互いに反対方向に回転するから，このような点が各半径上に存在する．半径方向に動く点からなっていて，内側と外側の 2 つの円周を隔てる閉曲線が作れたと仮定しよう．このとき，この曲線をわれわれの写像で写すと，その像はこの曲線自身と交わらなければならない（この曲線が円環を分割してできる領域は，同じ面積の領域へ写されるからである）．

この曲線とその像の曲線が共に各半径と 1 点ずつで交わっているならば，この 2 曲線の交点は明らかに写像の不動点である．

以上述べた考え方のあるものは高次元の場合に移せ，力学の問題の周期解に関する有益な結果を与える．多次元の場合，円環の役割は Euclid 空間の領域と同じ次元のトーラスとの直積である相空間が担う（円環は区間と円周との直積である）．相空間のシンプレクティック構造 Ω は普通に与えられる．つまり，$\Omega=\sum dx_k \wedge dy_k$ の形である．ここで，x_k は作用変数，y_k は角変数である．

われわれの相空間において，どんなシンプレクティック微分同相が恒等写像

とホモローグであるかを明らかにするのは難しくない．つまり，シンプレクティック微分同相 A は，恒等写像から連続的な変形で得られ，かつ任意の閉回路 γ に対して

$$\oint_{\gamma} xdy = \oint_{A\gamma} xdy$$

が成り立つならば，恒等写像にホモローグである(ここで，閉回路は必ずしも0にホモローグでなくてもよい).

恒等写像にホモローグであるという条件から，x 方向に沿う全体的な移動《作用変数の発展》は不可能で，トーラス方向に沿う移動だけが許される.

n 次元トーラス，$x=c=\mathrm{const}$ のどれか1つを考え，これに恒等写像にホモローグなシンプレクティック微分同相 A を作用させよう．新しい n 次元トーラスが得られ，次のことが分る．このトーラスの像が滑らかな関数 f によって，$x=f(y)$ の形で表わされるとする．このとき，トーラスとその像は(重複度を込めて)少なくとも 2^n 個の点で交わり，そのうち少なくとも $n+1$ 個は位置も異なる.

$n=1$ のとき，この命題の意味は円環を作る各同心円がその像と少なくとも2点で交わるということになる．これは面積が保たれることからすぐに導かれる．したがって，像が $x=f(y)$ の形で表わされるという仮定は必要でない.

高次元の場合に，この条件が必要かどうかは分っていない．この仮定をつけると証明は次のようになる.

もとのトーラスが相空間の Lagrange 部分多様体であることに注意しよう．考えている微分同相はシンプレクティックであるから，像のトーラスもまた Lagrange 多様体である．したがって，1-形式 $(x-c)dy$ はこの像の上で閉じている．さらに，この像の上で，この1-形式は或る1価微分可能関数 F の全微分である．なぜなら，われわれの微分同相は恒等写像にホモローグであり，したがって閉回路 γ に対して

$$\oint_{A\gamma}(x-c)\,dy = \oint_{A\gamma} xdy - \oint_{A\gamma} cdy = \oint_{\gamma} xdy - \oint_{A\gamma} cdy$$
$$= c\oint_{\gamma} dy - c\oint_{A\gamma} dy = 0$$

となるからである．

トーラスとその像の交点は(交点では $dF=(x-c)dy=0$ であるから)，関数 F の臨界点であることに注意しよう．

像のトーラスが1価に射影される(つまり，像のトーラスが方程式 $x=f(y)$ で与えられる)という条件から，逆に，関数 F の臨界点は全てわれわれの2つのトーラスの交点であることが分る．実際，この条件から y をトーラス上の局所座標としてとれる．したがって，dF が像のトーラスに接する全てのベクトルに対して0となると $x=c$ となる．

n 次元トーラス上の滑らかな関数は，重複度を込めて少なくとも 2^n 個の臨界点をもち，そのうち $n+1$ 個は位置も異なる(たとえば，J. Milnor [1] 参照)．

したがって，われわれのトーラスは(重複度を込めて)少なくとも 2^n 個の点で交わり，そのうち少なくとも $n+1$ 個は位置も異なる．

全く同様に考えると，Lagrange トーラスはその像と少なくとも 2^n 個の点で交わる(そのうち少なくとも $n+1$ 個は位置も異なる)．ただし，もとのトーラスおよびその像は共に y-空間へ1価に射影される，つまり，両者はそれぞれ $x=f(y)$，$x=g(y)$ で与えられると仮定する．

ところで，この命題は正準変換

$$(x, y) \longmapsto (x-f(y), y)$$

によって前の命題に帰着される．

E. 不動点と周期解を求めることへの応用 さて，力学の積分可能な問題から出てくる特別な形をした，恒等写像にホモローグなシンプレクティック変換，つまり，

$$A_0(x, y) = (x, y+\omega(x)), \qquad ここで \quad \omega = \frac{\partial S}{\partial x}$$

を考えよう．ここで，$x \in \mathbf{R}^n$ は作用変数で，$y \bmod 2\pi \in T^n$ は角座標である．

トーラス $x=x_0$ 上では，振動数は全て通約可能:

$$\omega_i(x_0) = \frac{k_i}{N}2\pi \qquad (k_i, N \text{ は整数}),$$

$$\omega(x_0) \neq 0$$

とする．そして，非退化条件

$$\det\left|\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|_{x_0}\neq 0$$

が満たされているとする．

定理　恒等写像にホモローグで，A_0 に十分近いシンプレクティック微分同相 A は，トーラス $x=x_0$ の近くに重複度を込めて少なくとも 2^n 個の周期 N の点 ξ $(A^N\xi=\xi)$ をもつ．

証明　形式 $\Omega=dx\wedge dy-dX\wedge dY$ をもつ $4n$ 次元空間$(\mathbf{R}^n\times T^n\times\mathbf{R}^n\times T^n)$ の2つの Lagrange 部分多様体――その1つは対角線$(X=x,\ Y=y)$で，もう1つは写像 A^N のグラフ――の交わりを考えることに，証明は帰着される．

しかし，トーラス上の適当な関数を直接構成する方がより簡単である．実際，写像 $A_0{}^N$ は

$$(x,y)\longmapsto(x,y+\alpha(x)),\quad \text{ここで}\quad \alpha(x_0)=0,\ \det\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right|_{x_0}\neq 0$$

の形である．陰関数の定理から，写像 A^N により，トーラス $x=x_0$ の近くに，ちょうど半径方向に移される $((x,y)\mapsto(X,y))$ $x=f(y)$ なる形で与えられるトーラスがある．このとき，像もまた同じ形の方程式 $x=g(y)$ で与えられる．これらの記号を使うと，

$$X(f(y),y)=g(y),\qquad Y(f(y),y)=y$$

である．

写像 A が恒等写像にホモローグなことから，A^N は $Xy+S(X,y)$ の形の1価の大域的な母関数をもつ．ここで，S は変数 y について周期 2π をもつ．

関数 $F(y)=S(X(f(y),y),y)$ はトーラス上に少なくとも 2^n 個の臨界点 y_k をもつ．点 $\xi_k=(f(y_k),y_k)$ は全て A^N の不動点である．実際，

$$dF=(x-X)dy+(Y-y)dX=(x-X)dy=(f(y)-g(y))dy.$$

したがって，$dF|_{y_k}=0$ から $f(y_k)=g(y_k)$，つまり，$A^N\xi_k=\xi_k$ が出る．∎

さて，保存系の閉軌道に戻ろう．付録8の用語を用いて，結果を次のように定式化することができる．

系　自由度 n の等エネルギー的非退化系の，閉軌道で全体が埋めつくされている n 次元不変トーラスが分解するとき，摂動が十分に小さいものとすれば，(重複度を込めて)少なくとも 2^{n-1} 個の摂動問題の閉軌道が生じ，そのうち少なくとも n 個は位置も異なる．――

証明は $2n-2$ 次元切断面を用いると，先の定理に帰着される．このとき，まず角座標 y を，トーラス上の非摂動問題の閉軌道が $\dot{y}_2=\cdots=\dot{y}_n=0$ で与え

られ，切断面は $y_1=0$ で与えられるように選ばなければならない.

自由度2のとき，不変トーラスを2次元切断面で切ってできる円環に Poincaré の定理が適用できて，次の結果が得られる.

自由度2の系の2次元不変トーラスを2つ考える．これらのトーラス上の条件周期運動の周期の比は異なっているとする．このとき，これら2つのトーラスの間の隙間に少なくとも2個の閉相軌道が存在する.

こうして，自由度2の系の問題で不変トーラスが見つけられると多くの周期解が得られる(たとえば，円制限3体問題，閉測地線の問題など). コンパクト相空間をもつ《一般の形》の Hamilton 系では，閉相曲線は至るところ稠密な集合をなすという予想さえある．とはいえ，もしこの予想が正しければ，これらの曲線の大部分が閉じているということはほとんど重要でないことになる．それらの周期がとてつもなく大きいからである.

自由度が2より大きい系に Poincaré の方法を適用した例に Birkhoff の定理がある．この定理は，与えられた一般的な形の線形安定な(すなわち，線形近似で安定な)周期解の近くに，周期解が無限に存在すること(あるいは，空間からそれ自身への非退化なシンプレクティック写像の，線形安定な不動点の近くに，無限に周期点が存在すること)をいう．証明には，まず写像をその標準形で近似し，次に写像の不動点と母関数の臨界点の関係を使う.

周期解がわかれば，とりわけ，多くの力学の問題において，(古典的な積分以外の)第1積分が存在しないということの証明が可能になる．たとえば，既知の積分の何か或るレベル多様体上に，不安定周期軌道が見つかったと仮定しよう．一般の場合に，付録7で見たように，そのセパラトリックスは複雑な網を作る．セパラトリックスの分離現象を見出すことができ，セパラトリックスが考えているレベル多様体より低次元のどんな多様体の中にも収まっていないことが証明できると，系が新しい第1積分を持たないことは確かである.

ところで，第1積分の存在を妨げる相曲線の複雑な挙動は，しばしば周期解を使わずに明らかにされうる．電子計算機によって描かれた，相曲線と切断面が交わってできる図†)を単に一目見るだけでよい.

---

†) V. I. Arnold-A. Avez [1] の§20，O. Lanford [1] 参照.

F. 母関数の不変性 すでに強調したように，厄介なことに，母関数はシンプレクティック多様体の正準座標系の選び方に関して不変ではない．

他方，われわれは一度ならず写像の不動点と母関数の臨界点の関係を利用してきた．

一般には，母関数は写像と不変な関係で結びついている訳ではないにしても，不動点の近くでは不変な関係が存在する．

すなわち，或る点を固定するシンプレクティック微分同相が与えられたとしよう．この点の近傍に，或る1つのシンプレクティック座標系 (x, y) を使って，《母関数》

$$\Phi=\frac{1}{2}\int\sum\begin{vmatrix} X_k-x_k & Y_k-y_k \\ dX_k+dx_k & dY_k+dy_k \end{vmatrix}$$

を定める*)．

さらに，別のシンプレクティック座標系 (x', y') を使って，同様に母関数 Φ' を定めよう．

定理 シンプレクティック微分同相の，不動点における線形化が -1 を固有値にもたないとする．このとき，関数 Φ, Φ' はこの点の近傍において次の意味で同値である．(一般にはシンプレクティックでない)微分同相 g が存在して，

$$\Phi(z)\equiv\Phi'(g(z))+\text{const}$$

となる．——

証明は A. Weinstein[1] を見よ．

2つの微分同相が不動点の近傍において同値な母関数をもっていても，シンプレクティック微分同相のクラスでは必ずしも同値ではないことに注意しなければならない(例：回転と，半径に依存する角度の回転で，原点では2次の部分が非退化な母関数をもつもの)．

---

*) この関数の任意の弧に沿っての増分は，(弧上の)各点をその像と結ぶ線分全体からなる帯に沿って，シンプレクティック構造を与える形式を積分した値に等しい．したがって，そのような関数 Φ は写像と線形正準変換に関して不変な関係で結びついている．

付録10　パラメーターに依存する，固有振動数の重複度と楕円体

Euclid 空間の中の楕円体[†]の族には，本書でも何度か出会った．たとえば，微小振動の固有振動数がパラメーターにどのように依存するかを調べたとき，Euclid 空間(その計量は運動エネルギーで定められている)における，系の剛さに依存するポテンシャル・エネルギーのレベル面である楕円体に出会った．もう1つの例は，剛体の慣性楕円体である(このとき，パラメーターは剛体の形とその質量分布である)．

ここでは，パラメーターのどんな値に対して固有値のスペクトルが退化するのか，つまり対応する楕円体が回転楕円体となるのか，という一般的な問題を考えてみよう．Euclid 空間における2次形式の固有値(または楕円体の軸の長さ)は，系のパラメーター(形式の係数)が連続的に変化するとき，連続的に変化することに注意しよう．1つのパラメーターに依存する系では，パラメーターが変化するとき，個々の孤立した値で固有値の1つが他の固有値の1つに重なる，つまり，系は重複スペクトルをもつと期待しても自然であろう．

たとえば，剛体にかたくとりつけられた或る金属棒にそって1つの調節用質量を動かして(つまり，これで1つのパラメーターが得られたことになる)，剛体の慣性楕円体を回転楕円体に変えたいとする．3つの慣性主軸 a, b, c はこのパラメーターの連続関数であり，一見すると，パラメーターの適当な値 p で2本の軸は等しくなる，たとえば，$a(p)=b(p)$ となりうるように見える．

しかし，実際にはこうはならず，慣性楕円体を回転楕円体にするには，一般に**少なくとも2個**の調節用質量を動かす必要があることが分る．

一般に，2次形式の典型的な族において重複スペクトルが見られるのは，パラメーターが2個以上のときだけであり，一般的な形の1-パラメーター族では，パラメーターの全ての値に対してスペクトルは単純である．典型的な1-パラメーター族においては，パラメーターを変化させると固有値はぐっと近づくこ

[†] 楕円面というべきだが，(物理の)慣用に従う．

とがありうるが，互いに十分近づくと反発し合い遠ざかる．こうして，パラメーターを変化させると重複スペクトルが得られるという期待は裏切られる．

この付録では，この一見すると奇妙な固有値の振舞いの原因を考え，種々の対称の群をもつ系に対しても同様な問題を簡単に考察する．

A. 回転楕円体のなす多様体　n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ 上の 2 次形式全体の集合を考えよう．この集合には $n(n+1)/2$ 次元線形空間の自然な構造が入る．たとえば，平面上の 2 次形式全体は 3 次元空間をなす(形式 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ は座標として，A, B, C をもつ)．

この空間の中で，正定値形式全体は開領域をなしている(たとえば，平面の場合には，退化形式から作られる円錐 $B^2=AC$ の片方の内部である)．

座標原点に中心をもつ各楕円体 E は，正定値 2 次形式であって，そのレベル 1 の集合が楕円体 E になるようなものを与え，逆に，任意の正定値 2 次形式のレベル 1 の集合は楕円体である．こうして，正定値 2 次形式の集合と座標原点に中心をもつ楕円体の集合を同一視することができる．

このようにして，$\mathbf{R}^n$ の原点 O を中心とする楕円体の集合に $n(n+1)/2$ 次元の滑らかな多様体の構造を入れよう(この多様体は 1 つのチャート，2 次形式の空間の中で上に示した領域，で覆われている)．

さて，**回転楕円体**全体の集合を考えよう．この集合は 2 次形式全体の空間の中で余次元 2 である，つまり，2 個の独立な方程式で与えられ，一見するとそのように見えるが，1 個で与えられることはないことを示そう．正確には次の定理を得る．

定理 1　回転楕円体の集合は，楕円体全体のなす多様体の，余次元 2 以上の滑らかな部分多様体の有限個の和となる．——

ここで，部分多様体の**余次元**とは，それを含む空間の次元と部分多様体の次元の差である．

証明　まず n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ の楕円体で，2 本の軸は等しく，残りの軸は全て異なるようなものを考えよう．このような楕円体は異なる軸の方向(それは

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

個のパラメーターで与えられる)と，さらに軸の長さ(それは $n-1$ 個のパラメ

ーターで与えられる)とによって定められる．ゆえに，パラメーターの全体の数は

$$\frac{n^2-n-2+2n-2}{2}$$

で，これは楕円体全体の空間の次元 $n(n+1)/2$ より 2 少ない．いま述べたパラメーターに関する計算はまた，2 本の軸だけが等しい楕円体の集合は多様体をなすことを示している．

より多くの等しい軸をもつ楕円体全体に関していえば，明らかにそれらはより低次元の集合をなす．厳密な証明は次の補題から導かれる．

補題　ν_2 組の 2 重軸，ν_3 組の 3 重軸，ν_4 組の 4 重軸，等々をもつ楕円体の集合は，楕円体全体のなす多様体の滑らかな部分多様体であって，その余次元は

$$2\nu_2+5\nu_3+9\nu_4+\cdots=\sum\frac{1}{2}(i-1)(i+2)\nu_i$$

である．——

この補題の証明は，上の特殊な場合にパラメーターの個数を計算したのと同じようにしてできる(上の場合は，$\nu_2=1$，$\nu_3=\nu_4=\cdots=0$ に当る)．n 次元線形空間の k 次元部分空間全体は(n 次元空間で一般の位置にある k 次元部分空間は，k 次元空間から $n-k$ 次元空間への線形写像のグラフと考えることができ，このような写像は $k\times(n-k)$ 行列で与えられるから)，$k(n-k)$ 次元の多様体をなすことに注意すると，上の計算は読者自ら容易に行える．▮

例　$n=2$ の場合，つまり平面上の楕円を考えよう．楕円は 3 個のパラメーターで定まる(たとえば，2 本の軸の長さと，そのうちの 1 本の方向を示す角度)．こうして，平面上の楕円全体は，われわれの公式からも予想されるように，3 次元多様体となる．

円周は 1 つのパラメーター(半径)で定まる．こうして，楕円全体の空間の中で円周全体のなす多様体は，3 次元空間の中の曲線になり，一見するとそう見えるかもしれないような曲面にはならない．

この《パラドックス》は次の計算を見るともっと分り易くなる．2 次形式 $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ で固有値が等しいものは，A,B,C を座標とする 3 次元空間の中で，**ただ 1 つ**の

方程式 $\lambda_1=\lambda_2$ で与えられる多様体を作る．ここで $\lambda_{1,2}(A,B,C)$ は固有値である．しかし，この方程式［に同値な方程式 $(\lambda_1-\lambda_2)^2=0$］の左辺は，2つの平方の和である．それは固有方程式の判別式

$$\Delta=(A+C)^2-4(AC-B^2)=(A-C)^2+4B^2$$

から分る．したがって，1つの方程式 $\Delta=0$ は2次形式全体のなす3次元空間の中で直線 $(A=C, B=0)$ を定めるが，曲面は定めない．

回転楕円体の多様体が余次元2であることから，簡単な結論として，楕円体全体の空間をこの多様体は**分割しない**（また，重複スペクトルをもつ2次形式全体も2次形式全体の空間を分割しない）．これは直線が3次元空間を分割しないのと同様である．

したがって，次のように主張しうる．《一般の位置にある》楕円体では，主軸の長さは全て異なるだけでなく，このような2つの楕円体は，楕円体全体の空間の中で，主軸の長さが相異なる楕円体だけからなる滑らかな曲線で結べる．さらに，楕円体全体の空間の中で，一般の位置にある2つの楕円体が，回転楕円体を含む滑らかな曲線で結ばれているなら，任意に小さなずらしによりこの曲線を回転楕円体の集合から外すことができ，新しい曲線上では，その上の点は全て等しい軸をもたない楕円体であるようにできる．

以上述べたことから，とくに，系の剛さが増すと固有振動数も増すという定理の証明が簡単に得られる．実際，2次形式の単純固有値のパラメーターに関する微分は，2次形式の対応する固有方向への微分で決まる．剛さが増すとポテンシャル・エネルギーは各方向に，もちろん，固有方向にも増大する．つまり，固有振動数は増大する．こうして，重複スペクトルをもつことなく最初の系からより剛い系に移される場合には，振動数の増加をいう定理が証明できた．重複スペクトルがある場合の証明は極限移行によって得られる．なぜなら，任意に小さいずらしにより，もとの系とより剛い系とを結ぶ道の内部を，重複スペクトルをもつ系の集合から外せるからである．

まとめると，楕円体の（あるいは Euclid 空間の中の2次形式の）典型的な1-パラメーター族は，回転楕円体（あるいは重複スペクトルをもつ2次形式）を含まないということができる．慣性楕円体に適用すると，2つの調節用質量が必要であるという先の結論を得る．

2-パラメーター族に移ろう．われわれの計算によると，典型的な 2-パラメーター族では，回転楕円体はパラメーター平面上の個々の孤立点でしか現われない．

例として，3 次元 Euclid 空間内の凸曲面を考えよう．曲面の第 2 基本形式は各点の接空間で楕円を定める．したがって，楕円の 2-パラメーター族ができる(曲面の点の近傍で局所座標をとると，これらの楕円は 1 つの平面上に移せる)．結論として，個々の孤立点を除けば，曲面上の各点で楕円の軸の長さは異なる．したがって，一般的な形の曲面上には，**孤立特異点をもつ**互いに直交する方向場が(楕円の長軸の場と短軸の場と) 2 つできる．微分幾何学では，これらの方向を主曲率の方向といい，特異点は**臍点**という．たとえば，楕円面の表面上には 4 個の臍点がある．これらは長軸と短軸を含む楕円上にあって，そのうちの 2 つは，楕円面の測地線の図(図 207)上に見える．

全く同様に，典型的な 3-パラメーター族では，回転楕円体はパラメーターの 3 次元空間の中の個々の曲線上でのみ現われる．たとえば，3 次元 Euclid 空間の各点に楕円体が与えられている(つまり，2 次の対称テンソルが与えられている)とすれば，主軸の場の特異点は一般に個々の曲線上にある(そこで，3 つの方向場のうちの 2 つが不連続性をもつ)．

前の例での臍点に当るこれらの曲線にはいろいろの型がある．(典型的な楕円体の場に対する)これらの分類は，付録 12 で述べる Lagrange 射影の特異点の分類から得られる．

典型的な 4-パラメーター族では，回転楕円体はパラメーター空間の中の 2 次元曲面上に現われる．これらの曲面はパラメーター空間の個々の孤立点での横断的交叉以外の特異点をもたない．特異点に対応するパラメーターのこれらの値には，相等しい軸を 2 組(組同士では異なる)もつ楕円体が対応する．

3 重軸は 5-パラメーターで初めて，パラメーター空間の個々の孤立点で現われる．2 重軸をもつ楕円体に対応するパラメーターの値は，パラメーターの 5 次元空間の中で，次の 2 つの型の特異点をもつ 3 次元多様体をなす．1 つは或る曲線に沿っての，2 つの分枝の横断的交叉で，もう 1 つは(この曲線上にはない)孤立点での錐状特異点である．後者はパラメーター空間の中で 3 重軸をもつ楕円体に対応する点である．

上の錐状特異点は次のようになっている．特異点を中心とする微小半径の 4 次元球面

で回転楕円体のなす3次元多様体を切ると，射影平面のコピーが2つ得られる．この射影平面の4次元球面への埋め込みは，2次元球面上の5個の2次の球関数で与えられる埋め込みに微分同相である．(球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 上の関数空間で，x_ix_j の1次結合であって正規直交である5個の関数で1にも直交するものは，偶写像 $S^2 \to S^4$ を与え，したがって $RP^2 \to S^4$ の埋め込みを与える†).)

2次形式の典型的な2-パラメーター族で，2つの固有値が一致している特異点にパラメーターが近づいていくとき，固有値がどのように振舞うかを調べて見るのも有益である．ちょっとした計算によると，問題の固有値の組のグラフは，パラメーター平面の上で，特異点の近くで2葉円錐の形をとる．その頂点が特異点に対応し，おのおのの葉が固有値の1つずつに対応する(図243).

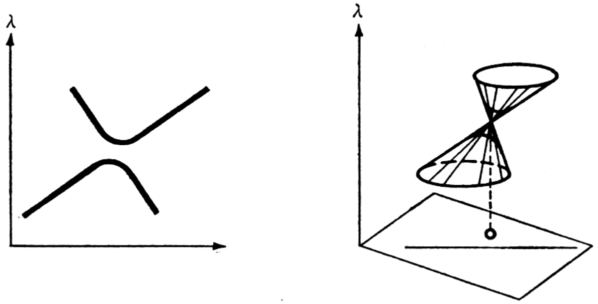


図 243　一般的な形の振動系の1-および2-パラメーター族の固有振動数

この2次元族の典型的な1次元部分族は，パラメーター平面上の特異点を通らない曲線の形をとる．特異点を含む1次元族は全て，ごくわずかずらすことにより，この特異点から外せる．この結果得られる1次元族は特異点の近くを通り過ぎる曲線となる．パラメーター平面上の，特異点の近くを通るこの曲線上にある固有値のグラフは，射影するとこの曲線上に落ちるような円錐上の点からなる．したがって，特異点の近くでのグラフは，相交わる2直線に近い双曲線のようになっている(1-パラメーター族が特異点を通ると，直線の組が得られる).

以上，2次形式の2-パラメーター族の固有値について考えてきたことから，1つのパラメーターを変化させたときの固有振動数の奇妙な振舞いが説明され

†)　$y_1=\sqrt{3}(x_1^2-x_2^2)/2$, $y_2=\sqrt{3}x_1x_2$, $y_3=\sqrt{3}x_2x_3$, $y_4=\sqrt{3}x_3x_1$, $y_5=x_3^2-(x_1^2+x_2^2)/2$ とするとき，偶写像 $S^2 \to S^4$ は $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_5)$ によって与えられる．

る．一般に(完全に特殊な場合を除き) 1つのパラメーターを変化させると，固有振動数は互いに近づくことはあるが，衝突することはない．近づいた後は別々の側へ遠ざからなければならない．

B. 連続媒質の振動の研究への応用 以上の一般的考察は，自由度有限のさまざまな力学系の固有振動数がパラメーターにどのように依存するかを調べる際いろいろと応用される．しかし，もっとも興味ある応用は，恐らく連続媒質の振動を記述する，自由度無限大の系への応用であろう．この応用は次のことに基づいている．軸に多重度をもつ楕円体の余次元は，この多重度によって決定され，空間の次元にはよらない．

たとえば，楕円体全体の多様体の中で，回転楕円体の集合の余次元は空間の次元が何であれ2に等しい．このことから，無限次元 Hilbert 空間の中の楕円体全体のなす無限次元《多様体》でも，回転楕円体全体の集合は余次元2である(そして，とくに多重軸をもたない楕円体の集合は連結である)，と考えるのは自然であろう．

もちろん，このように考えるには厳密な基礎づけが必要である．ここではそれには関わらないで，上に展開した一般的な考え方を，連続媒質の振動の問題に適用するとどんな結論が出るか見よう．

コンパクトな領域 D を満たす連続媒質の運動エネルギーは，点 x での平衡点からのずれ u により，式

$$T=\frac{1}{2}\int_D u_t^2 dx$$

で表わされる．考え易くするために，媒質は薄膜であるとしよう(この場合，領域 D は2次元，ずれ u は1次元である)．運動エネルギーはこの問題の配位空間(つまり，関数 u の空間)に Euclid 構造を与える．ポテンシャル・エネルギーは Dirichlet 積分

$$U=\frac{1}{2}\int_D (\nabla u)^2 dx$$

で与えられる．(数学的観点からは，この設定が薄膜の定義である．)

配位空間には運動エネルギーにより計量が与えられるが，薄膜の固有振動数の2乗は，この空間における2次形式 U の固有値である．典型的な薄膜には，

典型的な2次形式が対応するものと**仮定しよう**(この仮定の意味するところは，重複固有値をもつ2次形式全体の多様体に対して，いろいろな薄膜に対応する2次形式全体の多様体が横断的[†]であるということである)．一般の位置に対するこの性質が正しいとすると次の結論に到達する．

1. 一般の位置にある薄膜の固有振動数は全て異なっている．一般の位置にある薄膜からもう1つの薄膜へは，単純スペクトルのみをもつ薄膜からなる道に沿って連続的に移れる．さらに，2つのかってな膜を結ぶ典型的な道は重複スペクトルをもつ膜を1つも含まない(ただし，道の端点は除く)．

2. 膜の2つのパラメーターを変化させると，2つの固有振動数を一致させることができる．3重に等しい固有振動数を得るには5個の，4重に等しい固有振動数を得るには9個の，等々の独立なパラメーターをそれぞれ動かさなければならない．

3. 単純スペクトルをもつ膜を一般の位置にある1つの道に沿って連続的に変形し，再び単純スペクトルをもつ膜に移すとする．このようにして，最初の膜の k 番目の大きさの固有振動数を延長していくと，変形の道には関係なく，最後の膜の k 番目の大きさの固有振動数が得られる．固有関数を延長する場合は，一般には変形の道に依存する(すなわち，道を取り換えると，得られる固有関数の符号が変ることがあり得る)．——

とくに，膜全体の空間の中で，単純スペクトルの膜から出発し，閉曲線に沿って連続的に変形しつつ重複スペクトルの膜の集合(これは余次元2である)の回りを回ってもとの膜に戻るとする．k 番目の固有振動数はもとの値に戻るが，k 番目の固有関数は符号が変ることがある[††]．

C. スペクトルの重複度に対する対称性の影響　重複スペクトルは一般的な形の系では例外的なものであるが，しかし，与えられた系が対称で，変形がこの対称性を保つときには，小さな変形ではこのスペクトルの重複性は解消できない．

---

†) V. Arnold [11], [12] 参照，D 項の訳者脚注も参照．

††) 有限次元の場合の例を挙げる．2次形式

$$(3-\cos\theta)x^2-2(\sin\theta)xy+(3+\cos\theta)y^2=1$$

の固有値2に対応する固有ベクトル $e(\theta)=(\cos(\theta/2),\sin(\theta/2))$ は，$\theta:0\to2\pi$ のとき $(1,0)$ から $-(1,0)$ に変化する．なお，K. Uhlenbeck [1] も参照せよ．

いま，たとえば，正3角形の各頂点に同一質量をもつ質点がそれぞれおかれていて，質点間および質点と3角形の中心とが同じバネで結ばれ，質点が平面上で動くようになっている系を考えよう．この系は位数3の回転対称性をもつ．したがって，(6次元の)配位空間に3乗して1となる線形作用素 g が作用していて，それはこの空間の(運動エネルギーで与えられる) Euclid 構造だけでなく，ポテンシャル・エネルギーを与える配位空間の楕円体をも変えない．

以上のことから，**この楕円体は回転楕円体でなければならない**．実際，g をいま述べた配位空間の対称性の作用素とし，ξ を楕円体の主軸上のベクトルとすると，(g は楕円体をそれ自身に移すから) $g\xi$ もまた主軸である．

ベクトル $g\xi$ には2つの場合が可能である．すなわち，$g\xi=\xi$ であるか，ξ と $g\xi$ は配位空間において1次独立で $120°$ の角をなす．後の場合，ベクトル ξ と $g\xi$ とで張られる平面は全体が主軸からなっている．したがって，このような軸に対応する固有値は少なくとも2重である．

以上の考察では，位数3の回転対称性をもつ系の固有振動には2つの型があることを示している．すなわち，$120°$ の回転で不変なもの ($g\xi=\xi$)，および，この回転を行うと振動数は同じだが独立な固有振動に移るもの ($g\xi$ と ξ は1次独立)である．後の場合には，さらに同一の振動数をもつ固有振動には3つの型が生じる (ξ, $g\xi$ と $g^2\xi$)，しかし，そのうち独立なものは2つだけである：

$$\xi+g\xi+g^2\xi=0.$$

平面上 $120°$ の角をなし，長さが等しい3つのベクトルの和は0であるからである．

われわれの系は全部で6個の固有振動をもつ．これらのうち幾つが第1の(対称な)型で，幾つが第2の(対称でない)型かを見るためには次の考えが利用できる．各質点が他のものとは独立に振動する極限の場合を考えよう．このときは6個の固有振動からなる正規直交基底を配位空間にとれるが，これらの固有振動は各質点に2個ずつあり，そのおのおのにおいて1質点は動き，残りの2質点は動かない．ξ_i, η_i で i 番目の質点に対応する，固有振動数 a, b をもつ固有ベクトルを表わそう．x_i, y_i を正規直交基底 ξ_i, η_i による座標とする．このとき，ポテンシャル・エネルギーは

$$U=\frac{1}{2}(a^2x_1{}^2+b^2y_1{}^2)+\frac{1}{2}(a^2x_2{}^2+b^2y_2{}^2)+\frac{1}{2}(a^2x_3{}^2+b^2y_3{}^2)$$

と書ける．対称性の作用素 g は座標軸を次のように入れかえる．

$$g\xi_1=\xi_2,\qquad g\xi_2=\xi_3,\qquad g\xi_3=\xi_1,$$

$$g\eta_1=\eta_2,\qquad g\eta_2=\eta_3,\qquad g\eta_3=\eta_1.$$

いまや，われわれの6次元空間を，対称性の作用素 g で不変な2直線と2平面との直交和として表わすことができる．つまり，不変な直線は方向ベクトル

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3,\qquad \eta_1+\eta_2+\eta_3$$

で定められ，不変な2平面はそれぞれ，ξ_i または η_i で張られる空間における，これらの直線への直交補空間である．

このとき，第1の直線は振動数 a をもつ対称な固有振動の方向で，第2の直線は振動数 b をもつものに対応する．全く同様に，第1の平面上の全てのベクトルは振動数 a をもつ固有振動の方向で，120° 回転すると同じ振動数をもつそれとは独立な振動に移る．第2の平面上のベクトルに対しても振動は対称ではなく，振動数 b をもつ．

こうして，3質点が独立である退化した場合には，対称な型の2つの独立な固有振動と，対称でない型の4つの固有振動がある．後者はさらに2つの対に分れる．各対において，振動は同じ固有振動数をもち，質点が乗っている平面の120° の回転で一方から他方が得られる．

さて，上に強調した結論は，点の間の相互作用の法則が何であれ，その相互作用が対称でありさえすれば，つまり，系のポテンシャル・エネルギーが平面の120° の回転で不変ならば，やはり正しいことを主張する．

実際，互いに直交する6個の固有振動 $\zeta_1,\cdots,\zeta_6$ をもつ任意の系を考えよう．配位空間の各ベクトル ζ_i は，作用素 g を施すと，そのまま止っているか，120° 回転する．ところで，作用素 g で不変なベクトルは2次元平面をつくり，120° 回転するベクトルは4次元空間をつくる．したがって，6個のベクトルのうち2個だけが対称な振動に対応し，残りの4個は120° 回転するベクトルからなる4次元空間に入るが，これは先の2個に直交している．これらの4個のベクトルから1個のベクトル ζ をとって，ζ に作用素 g を施して得られるベクトルをもとの固有振動方向 ζ と合わせて対にしよう．この対が張る平面の4次

元空間における直交補空間の中から1つのベクトルをとり，作用素 g によるその像と対にしよう．こうして，上に述べた性質をもつ6個の固有振動の系が得られる．

こうして，平面上の3点からなる一般的な形の，位数3の回転対称性をもつ系においては，相異なる固有振動数は4個あり，そのうち2個は単純，残りの2個はそれぞれ2重である．単純な固有振動数のおのおのには対称な固有振動が対応し，2重である振動数のそれぞれには互いに120° 回転して得られ，かつその和が0である(したがって，このうち独立なものは2個である)3個の固有振動が対応する．

問　正3角形の対称性(120° の回転だけでなく，3角形の中線に関する折り返しも許す)をもつ系の固有振動を分類せよ．

問　対称性の群として，位数24の立方体の回転群をもつ系の固有振動を分類せよ．

［解］　振動には5つの型がある．各振動から回転によって，8個，6個，4個，2個，または1個の独立な振動からなる系が得られる(最後の場合，振動は完全に対称である)．

注意　一般の群を対称性の群にもつ系で振動を分類するには特別の道具が作られている(いわゆる，群の表現論である)．たとえば，G. Ya. Lyubarskii[1]．ここには必要な文献のリストがある．

D. 対称性を保つパラメーターの変化に際しての，対称な系の振動数の挙動

われわれの対称な系が一般的な仕方でいくつかのパラメーターに依存し，これらのパラメーターの変化に際しても対称性は損なわれないものとする．このとき，種々の重複度をもつ固有振動数もまたパラメーターに依存し，固有値がいつ衝突するかという問題が生じる．位数3の回転対称性をもつもっとも簡単な系の場合の結果を述べるだけにしたい($n \geq 3$ なる位数の回転に対しても答は同様である)．詳細は V. I. Arnold[11]，V. N. Karpushkin[1] にある．

位数3の回転対称性をもつ任意の系の固有振動は2つの型に分れる．すなわち，対称な振動と，120° 回転するともとのとは独立なものに移る振動とである．位数3の回転で不変な(他には，とくにどんな対称性も持たない)一般の系においては，第1の型の固有振動数は単純で，第2の型のは2重である．

さらに，次のことも分っている．系は一般的な形で1つのパラメーターに依存し，パラメーターの全ての値に対して対称であるとする．このとき，パラメーターを変化させると，対称な振動の固有振動数は互いに衝突することはなく，

非対称な振動の2重の固有振動数は2重のままで分離しない．また，パラメーターを変化させたとき，非対称振動の2重の固有振動数も互いに衝突することはない．一方，対称な振動と非対称な振動の固有振動数は，パラメーターを変化させたとき互いに独立に動く．それゆえ，パラメーターの個々の孤立した値では，対称振動の固有振動数の1つと非対称振動の(2重の)固有振動数とが衝突する(そして，互いにすり抜ける)ことがありうる．

対称振動の2つの固有振動数が衝突するためには，少なくとも2つのパラメーターを変化させる必要がある．非対称振動の2つの固有振動数が衝突するためには，少なくとも3つのパラメーターを変化させる必要がある．

一般に，位数3の回転対称性をもつ系の典型的な族では，i 個の単純固有振動数(i 個の対称振動)と j 個の2重固有振動数(j 個の非対称振動)とが衝突するためには，系のパラメーターの数は少なくとも

$$\frac{(i-1)(i+2)}{2}+j^2$$

でなければならない．

以上のことを対称な薄膜の振動に適用しよう．ここで，120° の回転で不変な一般的な形の膜には，膜の回転から生じる配位空間の変換で不変な楕円体全体のなす空間における，一般的な形の楕円体が対応すると仮定しよう．

この仮定の正確な定式化は次のようになる．対称膜の作る空間から，対称な楕円体の作る空間への写像が，余次元無限大の集合を除いた全ての膜に対して，与えられた多重軸をもつ楕円体のなす多様体のそれぞれに横断的である†)．

この仮定を認めると，対称膜の振動に関して次の結論を得る．

1. 120° の回転で不変な一般的な形の膜に対して，固有振動数の(重複度をこめて)漸近的に1/3が単純で，対応する固有振動は120° の回転で不変である．残りの固有振動数は2重で，各2重固有振動数には3個の固有関数が対応していて，その和は0で120° の回転で互いに他へ移る．

2. このような対称膜の一般的な1-パラメーター族では，パラメーターの個々の孤立した値で，単純な振動数と2重の振動数とが衝突しうるが，単純な，

†) 多様体 X から Y への写像 f が Y の部分多様体 Z に Y で横断的であるとは，$f(X)\cap Z$ の各点で，Z の接空間と X の接空間の像の和が Y の接空間全体になるときをいう．V. I. Arnold [12] も参照せよ．

あるいは2重の振動数同士では衝突することはない.

3. 固有振動数の間のより複雑な(対称性を保つ，小さな変形では除去しえない)衝突が起る，膜の族のパラメーターの最小数は，

$$\sum_{i,j}\left[\frac{(i-1)(i+2)}{2}+j^2\right]\nu_{ij}$$

によって与えられる．ここで，ν_{ij} は i 個の単純な振動数と j 個の2重振動数とが衝突する点の数である.

とくに，円形膜を位数3の回転対称性を保ったまま典型的に微小変形すると，2重固有値の1/3がすぐに分離する(これらは方位角部分が $\cos 3k\varphi$, $\sin 3k\varphi$ なる固有関数に対応する)．さらに，1-パラメーターで変形すると，単純および2重の固有振動数が互いにすり抜けることはあるが，単純同士，2重同士の固有振動数は決して衝突しない.

E. 検討　一般の位置と対称性の概念の重要性は，とりわけ問題の厳密な解を見出すことが困難な場合に，それから何らかの情報を得ることができるところにある.

とくに，ほとんどどんな膜に対しても固有振動の形は分っていないが，それでも一般的考察から，何らかのこと，たとえば固有値の重複度について語ることができる.

連続媒質の高い振動数の振動を調べることは多くの分野(光学，音響学など)で非常に大きな意味がある．固有振動の形を近似的に見出すためには特別な方法が考えられている．その1つは，振動を，局所的には短い波長の単純調和波であって，その波面の方向と振幅は各点ごとにわずかずつ変化しているようなものに近い形で求める方法(準古典近似といわれる)である.

いま述べた性質をもつ固有関数の方程式の近似解が，或る場合には構成できるということを解析は(ここでは立ち入れないが)示している．ここで近似解とは，固有関数に対する方程式をほとんど満たしているようなものを意味している†)(実際の固有関数に近いということではない).

とりわけ，膜が正3角形の角を滑らかに丸めた形をしているときに，3角形の1つの中線の近傍でのみ0とならない，いま述べた型の近似解がうまく作れ

†)　Arnold [11], §6参照.

る．(物理学ではこの近似解を3角形の中線上を動く光線の波動近似という．この光線はこの膜と同じ形をもつ撞球台上の安定な軌道である*)．付録11を参照せよ.)

対称性と一般の位置に関する議論から，位数3の回転で対称な典型的な膜では，いま述べた型の真の固有振動は存在しない．実際，膜の固有振動の1つが，1つの中線の近くに集中しているとしよう(ただし，膜の中心に集中しているのではないとする)．これを120°および240°回転すると，同一の固有振動数をもつ3つの固有振動が得られる．この3つは独立である(これはこの3つの振動の和が0でないことから分る)．したがって，固有振動数は3重であるが，これは位数3の回転で対称な典型的な系には現われないものである．

以上の考察から分るように，固有関数に対する厳密な高周波漸近近似を作ろうとするのは非常に絶望的なことである．それより期待できそうなことは，準固有振動に対する近似式を得ることである．このような準固有振動は真の固有振動とは随分異なるが，それに対応する初期条件を与えると，長時間の間，その運動は定常波(固有振動)を思わせるものがある．

準固有振動の例として，非常に弱いバネで結ばれた2つの同一の振子のうちの1つの振子の運動がある．最初，1つの振子を動かしてもう一方は固定しておくと，長時間の間，実際上は最初の振子だけが振動し，振動は準固有となる．真の固有振動では2つの振子の振幅は同一である．

膜の幾何学とその固有振動の性質との関係は，最近多くの人によって精力的に調べられた(とくに，H. Weyl, S. Minakshisundaram と A. Pleijel, A. Selberg, J. Milnor, M. Kac, I. Singer, N. Mckean, M. Berger, Y. Colin de Verdière, J. Chazarain, J. J. Duistermaat, V. F. Lazutkin, A. I. Schnirelman, S. A. Molchanov).

もっとも簡単な問題《太鼓の形を聞きわけられるか》[M. Kac [1]] には，答えは否定的であることが分った：互いに等長的でない Riemann 多様体で同じスペクトルをもつものが存在するからである．しかし，多様体の幾つかの性質は，Laplace 作用素の固有値のスペクトルと固有関数の性質とによって復元することができる(たとえば，閉測地線の長さの集合全体は復元できる)．

---

*) 撞球のこの軌道が線形安定である条件は，

$$(r_1+r_2-l)(r_1-l)(r_2-l)>0$$

である．ここで，l は軌道の区間の長さ，r_1, r_2 は区間の両端での壁の曲率半径である．

付録11　短波における漸近

幾何光学においては光の伝播を，光線(つまり，Hamilton の正準方程式)か，波面(つまり，Hamilton-Jacobi の方程式)を使って記述しているが，これは物理光学の観点からは近似に過ぎない．物理光学の表現に従えば，光は電磁波であって，幾何光学は考えている物体の大きさに比べて波長が小さいときにのみ現象をうまく記述する第1近似である．

こうした物理的な考え方の数学的ないい換えは，対応する微分方程式の解の振動数が大きいほど(つまり，波長が短いほど)よい近似を与える漸近公式となる．この漸近公式は，光線(つまり，或る Hamilton 力学系の運動)か，波面(つまり，Hamilton-Jacobi の方程式の解)の言葉で記述される．

このような短波における漸近近似は，あらゆる波動現象を記述している多くの数理物理学の方程式を解くために存在している．しかし，物理や数学のいろいろな分野では，これにまちまちの名をつけている．たとえば，量子力学では，短波における漸近近似を準古典近似と呼び，これを求める方法を WKBJ 法(G. Wentzel, H. A. Kramers, L. Brillouin, H. Jeffreys)と呼んでいる．この近似はずっと以前から，たとえば Liouville, Green, Stokes, Rayleigh によって用いられてきたものである．

短波における漸近近似の構成は，次のような観測に基づいている．つまり，振幅や波面の方向は点ごとに少しずつ異なっているが，局所的には各点ごとに殆ど sin 型の一連の波が観られる．波動現象を記述する偏微分方程式にこのような形の関数を形式的に代入すると，(波長が短いときの第1近似として)波面に対する Hamilton-Jacobi の方程式が得られる．次の近似では，振幅が点にどう依存するかを定めることもできる．

もちろん，すべての手続きには数学的な基礎づけが必要である．対応する定理を厳密に定式化し証明することは決して簡単ではない．とくに大きな困難がいわゆる《焦面》(caustics)(別名――焦点，共役点，転回点)によって起る．

焦面とは光線の族の包絡面である．これは或る滑らかな曲面で反射された光で照らされた壁の上に見ることができる．波を記述する際に現われる光線が，

交わって焦面を作れば，焦面の近くでは短波における漸近公式は少し修正しなければならない．つまり，各光線に沿った振動の位相は，光線が焦面を通るごとに(4分の1波長だけの)標準的な不連続性を受ける†)．

これらすべての現象の厳密な記述には，対応する相空間の Lagrange 部分多様体と，その配位空間への射影という幾何の言葉が便利である．

このとき焦面は，光線族を与える Lagrange 多様体の，相空間から配位空間への射影の特異点として説明される．こうして，付録12で述べる Lagrange 射影の特異点の標準形は，とくに，《一般の位置》にある光線族の作る焦面の特異点の分類を与えている．

この付録では，量子力学の Schrödinger 方程式に対する短波における漸近近似の簡単な公式を(証明なしで)述べる．もっと詳しい記述は，J. Heading [1](とくに付録 II)，V. P. Maslov [1]，V. I. Arnold [7]，L. Hörmander [1]，J. J. Duistermaat [1]，藤原大輔 [1] にある．

A. Schrödinger 方程式の解に対する準古典近似　Euclid 空間においてポテンシャル U をもつ場を動く粒子に対する **Schrödinger 方程式**とは，複素数値関数 $\psi(q,t)$ に関する方程式

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + U(q)\psi \qquad (q\in\mathbf{R}^n,\ \ t\in\mathbf{R})$$

のことである．ここで，h は或る実定数であり，この問題における小さいパラメーターである．Δ は Laplace 作用素である．

初期条件は短い波の形

$$\psi|_{t=0} = \varphi(q)e^{(i/h)s(q)}$$

をしているものとする．ここで，滑らかな関数 φ は或る有界領域の内部でだけ0と異なっている．以下で，このような初期条件をもつ Schrödinger 方程式の解に対する($h\to 0$ のときの)漸近公式を与えよう．

まず，ポテンシャル U をもつ場における古典的な粒子の運動を考えよう．つまり，$2n$ 次元相空間で Hamilton 方程式

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},\qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\qquad \left(H=\frac{1}{2}p^2+U(q)\right)$$

---

†) 量子力学の教科書，たとえば L. I. Schiff [1]，§28 参照．

を考える．この方程式の解は相流を定める．(これはポテンシャルに関する或る条件のもとで成り立つが，この条件は満足されているとしよう．なお，この条件は有限時間内に無限遠へ逃げないようにするものである.)

この短い波の初期条件に，相空間の Lagrange 部分多様体を対応させる．(Lagrange 多様体とは，配位空間の次元に等しい次元をもつ多様体であって，相空間のシンプレクティック構造を与える 2-形式 $dp\wedge dq$ がその上で恒等的に 0 になるもののことである.) つまり，この初期条件に対応する《運動量》を，相の勾配，すなわち

$$p(q)=\frac{\partial s}{\partial q}$$

として定める．

補題　滑らかな関数 s が何であれ，s から作られた関数 $p(q)$ の相空間 $\mathbf{R}^{2n}=\{(p,q)\}$ でのグラフは Lagrange 多様体である．逆に，Lagrange 多様体 M の q-空間上への射影が 1 対 1 であれば(すなわち，グラフであれば)，M は或る母関数 s から上の式で与えられる．——

初期条件(つまり，関数 s)から作られた Lagrange 多様体を M と書こう．相流 g^t は時間 t の後に，多様体 M を別の多様体 g^tM へ移す．この新しい多様体も Lagrange 多様体である．何故なら，相流はシンプレクティック構造を保つからである．

時間 t が小さいと，新しい Lagrange 多様体 g^tM も，もとの M と同様，配位空間の上へ 1 対 1 に射影される．しかし，t が大きくなると，必ずしもそうはならない(図 244).

いい換えると，配位空間の 1 点 Q に，g^tM の幾つかの点が射影されることがある．これらの点は有限個であって，しかもすべて非退化(つまり，与えられた点 Q へ射影される g^tM の各点で，g^tM から配位空間の上への射影の微分が退化していない)と仮定しよう．

非退化の条件は，殆どすべての点 Q で満たされている．これが満たされていないような特異点 Q は，配位空間の中で測度 0 の集合をなす．一般の場合，この集合は配位空間より 1 次元低い曲面になっている．この曲面はわれわれの問題において焦面の役割を果しており，かなり複雑な特異点をもつことがある．

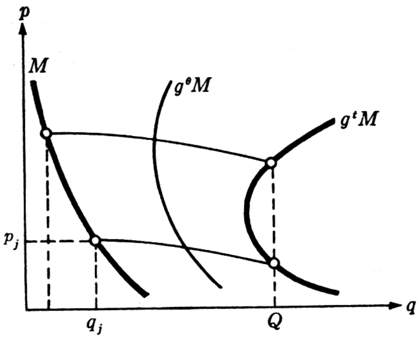


図 244　相流による Lagrange 多様体の変換

与えられた点 Q に射影される g^tM の点は，相流による変換 g^t によって，(初期条件から作られた)もとの M の或る点からきている．いい換えれば，点 Q へ，初期条件がもとの M に属するような古典的な粒子の軌道が幾つか，時間 t 後に集まってくる．

相空間でのこの初期点を (p_j, q_j) と書き，点 (p_j, q_j) から出る相流の軌跡に沿う作用を S_j と書く．正確には，

$$S_j(Q,t) = s(q_j) + \int_0^t L d\theta$$

とおく．ここで，$L=\dot{q}^2/2-U(q)$，$g^\theta(p_j, q_j)=(p(\theta), q(\theta))$ とする．このとき，関数 s と φ で与えられた振動する初期条件をもつ Schrödinger 方程式の解は，$h\to 0$ のとき，漸近形

$$\psi(Q,t) = \sum_j \varphi(q_j)\left|\frac{DQ}{Dq_j}\right|^{-1/2} e^{(i/h)S_j(Q,t)-(i\pi/2)\mu_j} + O(h)$$

をもつ．ここで，μ_j は整数(Morse 指数)であって，B 項で定義されるものである．

この式を理解するために，まず時間間隔 t が小さい場合を考えよう．この場合，和は 1 つの項だけからなっている．何故なら，もとの Lagrange 多様体 M から，相流によって短時間 t 後に得られる Lagrange 多様体 g^tM は配位空間上に 1 対 1 に射影されるからである．いい換えれば，Schrödinger 方程式の初期条件に対応する粒子の族の中で，短時間 t 後に Q に達するのはただ 1 つの点だけである．

t が小さいと，Morse 指数は 0 になる(これは以下の定義から分る)．こうして，関数 $\psi(Q,t)$ は，初期条件と同じように，速く振動する形になる．

このとき，初期波面を定める関数 s を初期条件として Hamilton-Jacobi の方程式を解けば，解の時刻 t での値が時刻 t での波面を定める関数 S に他ならない．点 Q における時刻 t での波の振幅は，Q に達する軌跡上のもとの点における初期振幅に，或る因子を掛けて得られる．この因子はわれわれの初期条件に対応する粒子が運動する際に，その粒子たちが満たす配位空間の領域の上で，関数 ψ の絶対値の 2 乗を積分したものが時間変化しないように，選ばれている．(ここでは，初期時刻において配位空間の或る領域を選び，もとの Lagrange 多様体 M として配位空間への射影がこの領域に入るものをとり，M の相点を考え，さらに相流 g^t の作用での M の像 g^tM を考え，最後に，これを配位空間へ射影したものを考え，これを《時刻 t で粒子たちが満たしている》領域だとしている.)

B. Morse 指数と Maslov 指数　数 μ_j は，点 (p_j, q_j) からでる相曲線の区間 $[0,t]$ 上の点であって，多様体 M の焦点であるものの個数として定義される．

M の焦点は次のように定義される．Lagrange 多様体 g^tM の射影が，そこで非退化条件を満足しているような点 Q を選ぶ．しかし，点 (p_j, q_j) からでる相曲線全体を見ると，或る時刻 $\theta \in [0,t]$ では Lagrange 多様体 $g^\theta M$ の点 $(p(\theta), q(\theta))$ で，非退化条件が満たされていないかも知れない．このような点を，考えている相曲線に沿っての多様体 M の**焦点**という．

M の焦点や Morse 指数の定義は，Schrödinger 方程式によるものではなく，単に配位空間の余接バンドルでの相流の幾何(または同じことだが，変分法)に関係したものであることを注意しておく．とくに，Lagrange 多様体 M として，余接バンドルの点 (p_0, q_0) を通るファイバー(条件 $q=q_0$ で与えられるもの)をとることができる．

この場合，点 (p_0, q_0) からでる相曲線上の多様体の焦点は，点 (p_0, q_0) に**共役**である(正確には，この焦点の配位空間への射影が，点 q_0 から運動量 p_0 ででていく配位空間の極値曲線に沿っての点 q_0 の共役点である)，といわれる．Riemann 多様体上の測地線に沿っての運動という，もっと特別な場合には，余接バンドルのファイバーの焦点は，測地線に沿ってのこの測地線の始点の共役点といわれる．たとえば，球面の南極点はどんな子午線に沿っても北極点の共役点である．

測地線分の Morse 指数は始点の共役点の数のことであるが，変分法において重要な

役割を果す．つまり，作用の2階微分を，考えている測地線の(両端を固定した)変分の空間での2次形式と考えよう．このとき，この2次形式の負の慣性指数は Morse 指数に等しい(たとえば，J. Milnor [1] 参照).

こうして，最初の共役点までの測地線は最小作用を実現しており，このことが力学のいろいろな変分原理を《最小作用の原理》と呼ぶことの理由である.

Morse 指数を計算するには，焦点の重複度も考慮しなければならないことに注意する(一般の位置にある焦点の重複度は1である).

Morse 指数は **Maslov 指数**の特別な場合であって，後者は配位空間の余接バンドルの Lagrange 多様体上のどんな曲線に対しても定義され，相流には関係しない.

n 次元 Lagrange 多様体の n 次元配位空間上への射影を考えよう．これは同じ次元の多様体間の微分可能写像であって，特異点——微分写像のランクが下がり，その近傍で射影が微分同相でなくなる点——を持つことがある.

このとき次のことが分る．つまり，一般には，特異点全体の集合は $n-1$ 次元であり，ランクが1だけ下がる単純特異点の作る $n-1$ 次元の滑らかな多様体と，$n-3$ 次元以下の有限個の多様体の和になっている.

ここで《一般には》というのは，上に述べた性質が，Lagrange 多様体に Lagrange 多様体のままでの任意に小さな変形をほどこすことにより得られるということを意味している.

特異点の集合をいろいろなランクの部分に分解する際，$n-2$ 次元の部分がないことを注意するのは重要である．$n-1$ 次元多様体をなす単純特異点の次にくるのはランクが2だけ下がる点だが，これらは $n-3$ 次元の多様体をなすのである．特異点の集合の配位空間上への射影(焦面)は，一般にいって，0から $n-1$ までのすべてを例外なく次元とする部分からなっている.

さらに，単純特異点の作る $n-1$ 次元多様体は，Lagrange 多様体上に両側をもつように入っている．つまり，そのすべての点で法線の向きを以下のように矛盾なく定められることが分る.

Lagrange 多様体上にある単純特異点を考えよう.

この点を配位空間へ射影した点の近傍において座標系 $q_1, \cdots, q_n$ を考える．$p_1, \cdots, p_n$ を余接バンドルのファイバーでの対応する座標とする．考えている特異点の近傍では，Lagrange 多様体は変数 $(p_1, q_2, \cdots, q_n)$ のベクトル値関数

$(q_1, p_2, \cdots, p_n)$ のグラフと考えることができる(または，特別に選ばれた座標が第1座標でなく他の座標であるような類似の形のベクトル値関数のグラフと思ってもよい).

このとき，考えている点の近くの特異点は条件 $\partial q_1/\partial p_1=0$ で定められる．一般の位置にある Lagrange 多様体に対しては，単純特異点の考えている近傍においては，特異点のなす多様体を一方から他方へ横切ると，関数 $\partial q_1/\partial p_1$ の符号が変る．そこで，この関数が正である方を**正の側**とする．

いろいろな点の近くでの正の向きの定義が矛盾していないことは証明を要する．さらには，1点の近くでの正の向きの定義が適切であること，すなわち，座標系によらないことも証明しなければならない．これらは直接の計算で示すことができる(Arnold [7] 参照).

さて，Lagrange 多様体上の向きづけられた曲線の Maslov 指数を，特異点のなす多様体を負の側から正の側へ横切る回数から反対向きに横切る回数を引いたもの，として定義する．この際，曲線の両端は特異点でなく，曲線は単純特異点のなす多様体としか交わらず，しかも0でない角度で交わると仮定している．このような曲線に対して指数を定義すると，2つの非特異点を結ぶ任意の曲線に対しても指数を定義することができる．このためには，単純特異点のなす多様体とだけ0でない角度で交わる曲線で近似すればよい．近似する曲線のとり方に，指数が依存しないことを示すことができる．

問　相平面の Lagrange 多様体 $p^2+q^2=1$ の上の，パラメーター t, $0\leq t\leq 2\pi$ で向きづけられた円周 $p=\cos t$, $q=\sin t$ の指数を求めよ．

［答］　+2.

最後に，$\mathbf{R}^{2n}$ の相曲線の Morse 指数は，いまや，適当な $2n+2$ 次元相空間 E の $n+1$ 次元 Lagrange 多様体上の曲線の Maslov 指数として定義することができる．$(p_0, p\,; q_0, q)$ を空間 E の座標とする(ここで，$(p, q)\in\mathbf{R}^{2n}$)．ここで，もとの Lagrange 多様体から相流の作用によって時間 t 後に得られる $\mathbf{R}^{2n}$ の n 次元 Lagrange 多様体上を点 (p, q) が動くとし，$q_0=t$, $p_0=-H(p, q)$ とおけば，得られる $\mathbf{R}^{2n+2}$ の点は t を変化させるとき，或る $n+1$ 次元 Lagrange 多様体を作る．相点の相流による運動のグラフは，この $n+1$ 次元 Lagrange 多様体上の曲線と考えることができる．このグラフの Maslov 指数が，もとの

相曲線の Morse 指数と一致することを確かめることができる.

C. 閉曲線の指数　線形相空間の Lagrange 部分多様体上の閉曲線の指数は複素構造を使っても計算できる. 線形相空間 $\mathbf{R}^{2n}=\{(p,q)\}$ にシンプレクティック構造 $dp\wedge dq$ の他に, Euclid 構造(このスカラー積での 2 乗は p^2+q^2 である)と, 虚数単位を掛けるという作用

$$I:\mathbf{R}^{2n}\longrightarrow\mathbf{R}^{2n},\qquad I(p,q)=(-q,p);$$
$$z=p+iq,\qquad \mathbf{C}^n=\{z\}$$

によって定まる複素構造を導入しよう. この 3 つの構造には, 関係式

$$[x,y]=(Ix,y)$$

が成り立っている. ここで, [,] は歪スカラー積を表わす.

このうちどれか 2 つの構造を(したがってそのとき 3 つ全部を)保つ相空間の変換を**ユニタリ**であるという. このような変換は Lagrange 平面を Lagrange 平面に写す.

Lagrange 平面はどれも, 或る 1 つの Lagrange 平面(たとえば, 方程式 $q=0$ で定められる実平面 $\mathbf{R}^n$)からユニタリ変換によって得ることができる[†]. このとき, 実平面を同一の Lagrange 平面に写す 2 つのユニタリ変換 A, B は, 実直交変換となっているユニタリ変換 C しか異ならない[†]. すなわち,

$$B=AC,\qquad C\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^n.$$

逆に, 直交変換を先に施しても, ユニタリ変換での実平面の像は変らない.

ここで, 直交変換の行列式が ±1 であることに注意する. したがって, 実平面を与えられた Lagrange 平面に写すユニタリ変換の行列式の 2 乗は, この Lagrange 平面にだけ依存し, ユニタリ変換のとり方には全く依存しない.

この予備的な注意から Lagrange 多様体とその上にある閉曲線に戻ろう. 曲線の各点に, 線形シンプレクティック空間の Lagrange 部分多様体の接平面がある. 実平面をこの接平面に写すユニタリ変換の行列式の 2 乗は, 絶対値 1 の複素数である. この閉曲線を点が運動するとこの複素数も変化する. 閉曲線を 1 周する間に, 行列式の 2 乗は複素平面の原点のまわりを 1 から i への向きに或る整数回まわり切る. この整数が考えている閉曲線の指数に等しい.

---

†) §41, D, E 項参照, また, 藤原 [1] 参照.

閉曲線の指数は，(固有振動の)定常問題に対する漸近公式に現われてくる．ポテンシャル U に対応する相流が，エネルギー・レベル $H=E$ の中の或る Lagrange 多様体を不変にしていると仮定しよう．この Lagrange 多様体上のすべての閉曲線 γ に対して，

$$\frac{2\mu_N}{\pi}\oint_\gamma pdq \equiv \operatorname{ind}\gamma \pmod 4$$

が満たされていれば，方程式

$$\frac{1}{2}\Delta\psi = \lambda^2(U(q)-E)\psi$$

は，漸近的には $\lambda_N=\mu_N+O(\mu_N{}^{-1})$ を満たす一連の固有値 λ_N ($N\to\infty$ のとき $\lambda_N\to\infty$) をもつ(Arnold [7] 参照)．

1 次元の場合には，Lagrange 多様体は円周であって，その指数は 2 であり，上の合同式は，いわゆる《量子化条件》

$$\mu_N\oint_\gamma pdq = 2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)$$

となる．

これらの固有値に対応する固有関数もまた Lagrange 多様体と関係しているが，この関係は単純でない．実際，固有関数に対する漸近公式を書きくだすことはできず，できるのは固有関数の方程式を近似的に満たす関数に対する公式だけである．この関数は Lagrange 多様体を配位空間へ射影した外側では小さくなっている．漸近公式は，射影の際にできる焦面の近くでは特異点を持つ．

しかしながら，本当の固有関数は，少なくとも固有値が重複していたり，近くに固有値があったりすると，全く異なった振舞いをする(付録 10 参照)．

付録 12　Lagrange 特異点

Lagrange 特異点とは，Lagrange 多様体から配位多様体への射影の特異点である．このような特異点は，Hamilton-Jacobi の方程式の解の大域的な研究とか，焦面，焦点，共役点などを調べるときとか，連続体の力学で不連続性の伝播や衝撃波を解析するときとか，さらに短波における漸近に帰着される問題（付録 11 参照）とかにも現われるものである．

Lagrange 特異点を記述するためにまず，一般の滑らかな写像の特異点についていくらか述べる必要がある．簡単な例から始めよう．

A. 曲面から平面への滑らかな写像の特異点　球面を平面へ射影する写像は，球面の赤道上に特異点を持っている（赤道上では微分のランクは 1 下がる）．この結果，射影された平面上に原像の数が異なる 2 つの領域へ分割する曲線（見かけの輪郭と呼ばれる）が形成される．つまり，平面の見かけの輪郭の内部の点にはそれぞれ 2 点の原像があり，外部の点には原像は 1 点もない．

もっと複雑な場合には，《見かけの輪郭》はもっと複雑な特異性を示すだろう．たとえば，座標 (x, y, z) をもつ 3 次元空間の，方程式

$$x = yz - z^3$$

で与えられる曲面 S と，座標 (x, y) をもつ平面への z 軸に平行な射影を考えよう（図 245）．

射影の特異点は，曲面 S 上では（$3z^2 = y$ を方程式にもつ）滑らかな曲線をなしている．しかし，この曲線の平面 (x, y) での像は，もはや滑らかな曲線ではない．この像は方程式

$$27x^2 = 4y^3$$

で与えられ，点 $(0, 0)$ に尖点をもつ 3/2 乗型の放物線である．

この曲線は平面を 2 つの部分に分ける．小さい方がくさびの内側で，大きい方がくさびの外側である．内側の各点には曲面 S の 3 点が，外側には 1 点が射影される．

さて，この曲面 S を任意に少し変形してみる．S に近いあらゆる曲面を射影すると，見かけの輪郭はいつも，曲面 S の見かけの輪郭の特異点の近くの或

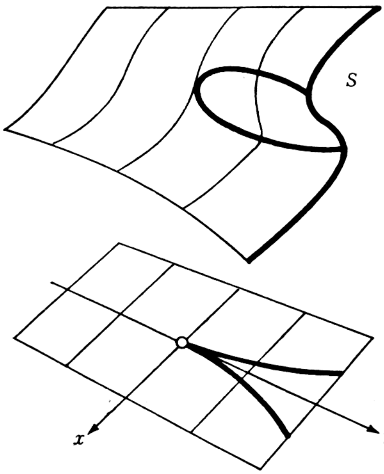


図245 Whitney のひだ

る点で，同じような特異点(3/2 乗型のくさび)をもつことが分る．いい換えれば，考えている特異点は，曲面の小さな変形では解消されない．

さらに，曲面を変形する代りに，曲面から平面への写像自体を，(それが射影かどうかを気にせず)滑らかさを保ち変形が小さい限り，好きなように変形してもよい．このような変形では，くさびは消え去らず僅かに変形されるだけであることが分る．

ここに述べた例は，曲面から平面への写像のすべての典型的な特異点をつくしている．これよりも複雑な特異点は少し動かすと解消されることが分る．したがって，どんな滑らかな写像も少しだけ動かすことによって，曲面のどんな点の近傍でも，非特異的になるか，赤道近くでの球面から平面への射影と同様な構造，または上で考察した見かけの輪郭で 3/2 乗型のくさびをもつ曲面からの射影と同様な構造をもつようにできる．

《… と同様な構造》という言葉は次の意味である．つまり，曲面(原像)と平面(像)の上に，(考えている点とその像の近傍に)局所座標を選んで，写像を或る特別な形に書きくだすことができる．正確には，曲面から平面への写像を，上に述べた 3 つの型の点の近傍では，標準形

$y_1 = x_1,\qquad y_2 = x_2\qquad$ (非特異点),

$y_1 = x_1^2,\qquad y_2 = x_2\qquad$ (球面の赤道のような，折り目),

$y_1 = x_1x_2 - x_1^3$,　$y_2 = x_2$　　（くさびを見かけの輪郭にもつ，ひだ）

に帰着できる．ここで，(x_1, x_2) は原像の空間での局所座標，(y_1, y_2) は像の空間での局所座標である．

ここに述べた(H. Whitney に負う)定理の証明と，高次元への一般化は，滑らかな写像の特異点理論に関する諸労作の中で見ることができる．たとえば，V. I. Arnold [8]，R. Thom-H. I. Levine [1]，J. Mather [1]，また，教科書としては，M. Golubitsky-V. Guillemin [1]，Th. Bröcker [1]，福田-野口 [1]，野口 [1] がある．

B. Lagrange 多様体の射影の特異点　さて，n 次元配位多様体と対応する $2n$ 次元相空間，それにその中の n 次元の Lagrange 部分多様体(すなわち，n 次元部分多様体で，相空間のシンプレクティック構造を与える2-形式が，この上で恒等的に0になるもの)を考えよう．

Lagrange 多様体を配位空間に射影すると，1つの滑らかな n 次元多様体から，同じ次元の別の多様体への写像が得られる．

この写像は一般の点では局所微分同相だが，Lagrange 多様体の或る点では微分のランクが下がる．このような点を特異点という．特異点の集合を配位空間へ射影すると，《見かけの輪郭》が得られ，これを Lagrange 多様体の場合に**焦面**(caustics)という．

焦面は複雑な特異点を持つことがあるが，滑らかな写像の特異点の通常の理論でのように，複雑すぎる特異点は少し動かすことによって解消できる．(ここで，少し動かすとは，相空間の Lagrange 多様体を Lagrange 多様体であることを保ったまま少し変形することである.)

こうして，単純で解消不能な特異点だけが残るが，これに対しては標準形を書きくだすことができ，詳細に調べ尽すことができる．一般の位置にあって，何ら特別な対称性を持たない問題を考えるとき，このような単純で解消不能な特異点だけが現われると期待するのは自然である．

たとえば，点光源からでる光が或る滑らかな曲面で反射し，壁面を照らしてできる焦面を考えよう．(ここで，相空間は4次元であって，あらゆる可能な方向で壁面にあたる光線から作られる．Lagrange 部分多様体は光源からでて壁面にあたる光線から作られる.)　光源を動かしてみれば，焦面は一般には簡単

な特異点(3/2 乗型のくさび)しか持たず，もっと複雑な特異点は特別に例外的な位置に光源があるときにしか起らないことが分る．

以下に述べるのは，$n\leq 5$ に対する，$2n$ 次元相空間の n 次元 Lagrange 部分多様体から n 次元配位空間への射影の特異点に対する標準形である．これらの標準形は有限個で，その分類は(かなり神秘的だと思えるのだが)，単純 Lie 群，関数の単純退化臨界点，正多面体，その他の対象の分類と結びついている．$n\geq 6$ のときには，必然的にパラメーターを含んでしまう標準形をもつ特異点がある．より詳細については，V. I. Arnold [10] を参照されたい．

C. 次元 $n\leq 5$ の Lagrange 多様体の射影の典型的な特異点の標準形の一覧表　次の記号を使おう．

$(q_1, \cdots, q_n)$ は配位空間の座標，$(p_1, \cdots, p_n)$ は対応する運動量．

したがって，p と q とで相空間のシンプレクティック座標系をなしている．

Lagrange 多様体は母関数 F を使って，式

$$q_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad p_j = -\frac{\partial F}{\partial q_j}$$

で与えられているとする．ここで，添数 i は集合 $(1, \cdots, n)$ の或る部分集合を，j はその残りの部分を動く．正確には一覧表の中で A_k と表わされる特異点に対しては $i=1$，$j>1$ であり，D_k と E_k で表わされる特異点に対しては $i=1, 2$，$j>2$ である．

このような記号にすると，同じ 1 つの表示 $F(p_i, q_j)$ で次元の違う空間での Lagrange 多様体が与えられていると考えられる．実際には依存していないような変数 q_j を，F にいくらでもつけ加えることができるからである．

さて，典型的な特異点の標準形は次の形をしている．

$n=1$ のときは，

$$A_1 : F = p_1^2; \quad A_2 : F = \pm p_1^3;$$

$n=2$ のときは，上の 2 つに加えて，

$$A_3 : F = \pm p_1^4 + q_2 p_1^2;$$

$n=3$ のときは，上の 3 つに加えて，

$$A_4 : F = \pm p_1^5 + q_3 p_1^3 + q_2 p_1^2;$$

$$D_4 : F = \pm p_1^2 p_2 \pm p_2^3 + q_3 p_2^2;$$

$n=4$ のときは，上の5つに加えて，

$$A_5 : F = \pm p_1{}^6 + q_4 p_1{}^4 + q_3 p_1{}^3 + q_2 p_1{}^2\,;$$
$$D_5 : F = \pm p_1{}^2 p_2 \pm p_2{}^4 + q_4 p_2{}^3 + q_3 p_2{}^2\,;$$

$n=5$ のときは，上の7つに加えて，

$$A_6 : F = \pm p_1{}^7 \pm q_5 p_1{}^5 + q_4 p_1{}^4 + q_3 p_1{}^3 + q_2 p_1{}^2\,;$$
$$D_6 : F = \pm p_1{}^2 p_2 \pm p_2{}^5 + q_5 p_2{}^4 + q_4 p_2{}^3 + q_3 p_2{}^2\,;$$
$$E_6 : F = \pm p_1{}^3 \pm p_2{}^4 + q_5 p_1 p_2{}^2 + q_4 p_1 p_2 + q_3 p_2{}^2.$$

D. 標準形についての検討　A_1 型の点は，非特異である．

A_2 型の特異点は，折り目型の特異点である．実際，Lagrange 多様体上の座標を $(p_1, q_2, \cdots, q_n)$ ととれば，射影は

$$(p_1, q_2, \cdots, q_n) \longmapsto (\pm 3p_1{}^2, q_2, \cdots, q_n)$$

と書かれる．

A_3 型の特異点は，見かけの輪郭に3/2乗型の尖点をもつくさびである．これを確かめるには，対応する2次元 Lagrange 多様体から平面上への写像を

$$(p_1, q_2) \longmapsto (\pm 4p_1{}^3 + 2q_2 p_1, q_2)$$

と書きくだして見ればよい．

A_4 型の特異点は，3次元の場合に初めて現われ，対応する焦面は3次元空間での特異点をもった曲面(図246)であり，これは燕の尾と呼ばれるものである

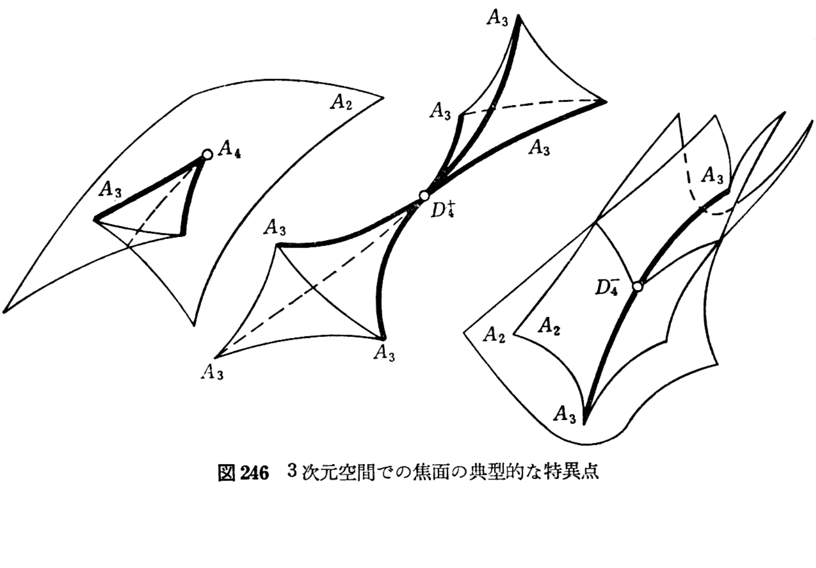


図246　3次元空間での焦面の典型的な特異点

(これはすでに§46でふれたもの).

D_4 型の特異点の焦面は，3次元空間において，1点で接する3つの折り返しの辺(A_3 型)をもつ曲面として表わされる．この際，この折り返しの辺のうち，2辺が虚でもあり得て，D_4 型の焦面には2つの形がある．

E. Lagrange 同値　さて，上に挙げたものが，どういう意味で Lagrange 多様体の射影の典型的な特異点の標準形であるかを述べなければならない．まず，どのような特異点を《同じ構造》のものと考えるかを定義しよう．

Lagrange 多様体を配位空間へ射影する写像を簡略に，**Lagrange 写像**と呼ぼう．2つの同じ次元の多様体の Lagrange 写像 f_1, f_2 が与えられているとする．(対応する n 次元 Lagrange 多様体 M_1, M_2 は，一般には，異なる配位空間 N_1, N_2 の余接バンドル T^*N_1，T^*N_2 である異なった相空間の中にある.) このような2つの Lagrange 写像 f_1, f_2 は，相空間 T^*N_1 から T^*N_2 へのシンプレクティック微分同相 φ があって，φ が T^*N_1 のファイバーを T^*N_2 のファイバーに写し，Lagrange 多様体 M_1 を Lagrange 多様体 M_2 に写しているとき，**Lagrange 同値**であるといわれる．このとき，シンプレクティック微分同相 φ を **Lagrange 同値写像**という．

2つの Lagrange 同値な Lagrange 写像は，原像の空間と像の空間の微分同相によって(または解析でいうように，原像と像での座標変換によって)互いに移り合うことに注意しよう．実際，同値を与えるシンプレクティック微分同相を Lagrange 多様体に制限すれば，原像の微分同相を与えているし，ファイバーをファイバーに写しているのだから像(配位空間)の微分同相も得られる．

とくに，2つの Lagrange 同値な写像の焦面は微分同相であり，したがって，Lagrange 同値での分類によって焦面の分類が得られる．しかし，Lagrange 同値での分類は一般的には焦面の分類より細かい．というのは，焦面が微分同相であることから，写像の同値性はでてこないからである．さらに，Lagrange 同値での分類は原像と像の微分同相による分類よりも細かい．何故なら，すべてのこのような微分同相の対が，相空間のシンプレクティック微分同相で実現されるとは限らないからである．

或る基点 O_1 の近傍で考えた Lagrange 写像 f_1 が，別の Lagrange 写像 f_2 (これも基点 O_2 の近くで考えている)に，**点 O_1 で Lagrange 同値**であるとは，

O_1 の或る近傍での写像 f_1 と O_2 の或る近傍での写像 f_2 との Lagrange 同値写像が存在して，点 O_1 を点 O_2 に写しているときをいう．

これで，次元 $n\leq 5$ のときの Lagrange 写像の特異点の分類定理を定式化することができる．

すべての n 次元 Lagrange 多様体($n\leq 5$)は，その各点で，配位空間への射影が上の一覧表に挙げた Lagrange 写像の 1 つに Lagrange 同値であるような Lagrange 多様体に Lagrange 多様体の範囲内の任意に小さい変形により変形できる．

とくに，2 次元 Lagrange 多様体は，Lagrange 多様体の範囲内でいくらでも小さく変形して，《一般の位置》に移すことができる．つまり，(2 次元)配位空間への射影が，折り目(標準形 A_2 に Lagrange 同値)か，くさび(標準形 A_3 に Lagrange 同値)以外の特異点を持たないようにできる．

この 2 次元 Lagrange 写像についての命題でさえ，一般の(Lagrange でない)写像に対する分類定理からはでないことに注意しよう．何故かというと，第 1 に，Lagrange 写像はすべての滑らかな写像の中では極めて狭いクラスをなしているので，Lagrange 写像に対して典型的な特異点であっても，一般の形の写像に対しては典型的でないことがあり得る($n>2$ では実際にそうなっている)．第 2 には，写像を原像と像の空間の微分同相によって標準形に帰着できても，これが Lagrange 同値写像で実現できるとは限らないのである．

このように，一般の位置にある 2 次元 Lagrange 多様体の焦面は特異点としては 3/2 乗型のくさび(と，横断的に自己交叉する点)しか持たない．これより複雑な特異点はすべて，Lagrange 多様体を少し動かすと消えてしまうが，焦面の折り返し点や自己交叉点は少し動かしても消えないで，少し変形されるだけである．

それに続く特異点の標準形 $A_4, D_4, \cdots$ は，高次元の Lagrange 多様体の焦面の研究や，余り高次元でないがパラメーターに依存している Lagrange 多様体の焦面が，パラメーターと共にどう変化するかを調べるときに，同じようにして用いることができる．

この付録の公式は，**Legendre 特異点**の理論，つまり，波面，Legendre 変換，包絡面，凸包の特異点の理論にも応用されている(付録 4，p. 368 参照)．Lagrange 特異点

や Legendre 特異点の理論は，幾何光学や振動積分の漸近理論[†]への直接の応用ばかりでなく，変分法，非線形偏微分方程式の不連続解の理論，最適化や追跡等の問題にも応用される．R. Thom は特異点の理論や分岐の理論とその応用に対して**カタストロフ理論**という統一的な名称を与えている．

---

†) V. I. Arnold [14] 参照．

付録 13　Korteweg–de Vries 方程式

古典力学における方程式の第1積分のすべてが，はっきりした対称性で説明される(例：Kepler 問題や楕円面上の測地線についての問題などの特有な積分)というわけではない．このような場合には《隠れた対称性》が問題となる．

このような隠れた対称性の興味ある例に Korteweg–de Vries 方程式［以下 KdV 方程式と書く］

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \tag{1}$$

がある．

この非線形偏微分方程式は浅い水の理論から生まれたが†)，後に，この同じ方程式が数理物理学の多くの問題に現われることが分ってきた．

一連の数値実験の結果，無限遠に境界条件 0 を与えたときの，この方程式の解の驚くべき性質が明らかになった．つまり，この解は $t\to+\infty$ や $t\to-\infty$ に際して，一定の速さと形をもつ波である《ソリトン》に分解される．

速度 c で走るソリトンを得るには，方程式(1)に関数 $u=\varphi(x-ct)$ を代入すればよい．そのとき，φ に対する方程式 $\varphi''=3\varphi^2+c\varphi+d$ (d はパラメーター)が得られる．これは 3 次のポテンシャルを持つ Newton 方程式である．相平面 (φ, φ') 上には 1 つの鞍点がある．(0, 0) を鞍点とし，鞍点から鞍点へ向うセパラトリックスは，$x\to\pm\infty$ のとき 0 に収束する解 φ を定める．これがソリトンである．

ソリトンの衝突の際に，かなり複雑な非線形の相互作用が見られる．しかし，数値実験によって，ソリトンの大きさと速度は衝突後も変らないことが分った．このことから，何らかの保存法則が予想されたが，実際に，M. D. Kruskal, N. J. Zabusky, P. D. Lax, C. S. Gardner, J. M. Greene, R. M. Miura は，KdV 方程式に対する一連の第1積分を見出すのに成功した††)．これらの積分は $I_s=\int P_s(u, \cdots, u^{(s)})\,dx$ の形をしている．ここで P_s は多項式である．たとえば，

$$I_{-1} = \int u\,dx, \qquad I_0 = \int u^2 dx, \qquad I_1 = \int \left(\frac{u'^2}{2}+u^3\right)dx,$$

†) D. J. Korteweg–G. de Vries [1].

††) これらに関する解説が M. Kruskal [1] にある．

$$I_2=\int\left(\frac{u''^2}{2}-\frac{5}{2}u^2u''+\frac{5}{2}u^4\right)dx$$

が方程式(1)の第1積分であることは，容易に確かめられる．

第1積分の無限に続く系列が現われることは，次の P. D. Lax [1] の定理によって容易に説明される．x の関数を掛けるという作用素をその関数記号で表わし，x に関する微分作用素を記号 ∂ で表わそう．関数 $u(x)$ をもつ Sturm-Liouville 作用素 $L=-\partial^2+u$ を考えると，直ちに次の定理が確かめられる．

定理 KdV 方程式(1)は方程式 $\dot{u}=[L, A]$ と同値である．ここで，$A=4\partial^3-3(u\partial+\partial u)$ である．——

この Lax の定理から，直ちに次の系が得られる．

系 方程式(1)の解 u をもつ作用素 L は，すべての t に対して，互いにユニタリ同値である．とくに無限遠に境界条件0をおいたときの Sturm-Liouville の固有値問題 $Lf=\lambda f$ の各固有値 λ は，KdV 方程式の第1積分である．——

V. E. Zakharov と L. D. Faddeev [1] は，方程式(1)が完全積分可能な無限次元 Hamilton 系であることを注意し，対応する作用-角変数も示した．無限遠で減少して0になる関数 $u(x)$ のなす空間には，歪スカラー積

$$\omega^2(\partial w, \partial v)=\frac{1}{2}\int(w\partial v-v\partial w)\,dx$$

により，シンプレクティック構造が与えられ，方程式(1)の Hamilton 関数は積分 I_1 である．いい換えれば，方程式(1)は x の関数の作る或る関数空間での Hamilton 方程式

$$\dot{u}=\frac{d}{dx}\frac{\delta I_1}{\delta u}$$

の形で書かれるのである†)．

各積分 I_s も，このようにして《高次の KdV 方程式》$\dot{u}=Q_s[u]$ を与える．ここで，$Q_s=\dfrac{d}{dx}\dfrac{\delta I_s}{\delta u}$ は $u, u', \cdots, u^{(2s+1)}$ の多項式である．積分 I_s は互いに対合的であり，これに対応する関数空間での流れは互いに可換である．

多項式 P_s, Q_s の具体的な形や，作用-角変数の具体的な形(したがって，方程

---

†) この Hamilton 形式や上の Lax 表現，また非線形 Fourier 変換という3つのアプローチが，KdV 方程式の解法にあるが，それらとその関連性についての解説が H. Flaschka-A. C. Newell [1] にある．

式(1)の解)は，u をポテンシャルとする散乱理論での直接問題と逆問題の解の言葉で述べられる．

多項式 Q_s の具体的な形は Lax の定理を一般化した次の Gardner の定理からも得られる．x を変数とする関数の空間において，$A=\sum p_i\partial^{m-i}$ の形の微分作用素を考えよう．ここで，$p_0=1$ で，残りの係数 p_i は u と，x に関する u の導関数の多項式である．このとき，次のことが分っている．各 s に対して，$2s+1$ 階の微分作用素 A_s であって，Sturm-Liouville 作用素 L との交換子が関数 Q_s を掛けるという作用素になる，つまり $[L, A_s]=Q_s$ となるものが存在する．

以上の条件から，作用素 A_s は A_r $(r<s)$ の 1 次結合を加えることを除いて一意的に定まる．こうして，u と u の導関数の多項式 Q_s も，Q_r $(r<s)$ の 1 次結合を加えることを除いて定まっている．

V. E. Zakharov, A. B. Shabat, L. D. Faddeev 等は，Lax の手法と散乱の逆問題の手法とを使って，多くの物理的に重要な方程式，とりわけ，方程式 $u_{tt}-u_{xx}=\sin u$, $i\psi_t+\psi_{xx}\pm\psi|\psi|^2=0$ を研究した．

S. P. Novikov [1] は，周期的な境界条件のもとで KdV 方程式を調べていて，自由度有限で完全積分可能な系の興味深いクラスを発見した．これらの系は次のように構成される．

第 1 積分の有限個の 1 次結合 $I=\sum c_i I_{n-i}$ $(c_0=1)$ を考える．Hamilton 関数 I に対する関数空間における相流の停留点の集合は，Hamilton 関数 I_s に対する相流，とくに，方程式(1)の相流に関して不変である．

一方，これらの停留点は，方程式 $(d/dx)(\delta I/\delta u)=0$, または $\delta I/\delta u=d$ によって決定される．この後の方程式は，n 次導関数を含む汎関数 $I-dI_{-1}$ に対する Euler-Lagrange の方程式を表わしている†)．したがって，これは $2n$ 次であり，$2n$ 次元 Euclid 空間での Hamilton 方程式系として書き表わすことができる．

こうして得られた自由度 n の Hamilton 系は，互いに対合的な n 個の積分を持っており，適当な作用-角変数を使って完全積分可能であることが分っている．このようにして，KdV 方程式の特殊解の作る有限次元の族が得られる．この族は $3n+1$ 個のパラメーター(相空間の $2n$ 個の座標と，$n+1$ 個のパラメ

---

†) §12, A, B 項参照．

ーター $c_1, \cdots, c_n; d$)に依存している.

Novikov が指摘したように，得られた解は注目すべき性質を持っている. たとえば，周期的な問題ではこれらは次のような関数 $u(x)$ を与える. つまり，周期的な係数をもつ線形微分方程式 $-X''+u(x)X=\lambda X$ は，λ 軸上に有限個のパラメーター共鳴帯(§25 参照)をもつ†).

---

†) 散乱の逆問題の手法が適用できる KdV 方程式の周期解の構成法についての解説が，B. A. Dubrovin–V. B. Matveev–S. P. Novikov [1] にある. KdV 方程式に関して，日本語による優れた解説も出版されている: 田中–伊達 [1]，戸田 [1].

文　献

† 印は訳者が加えたものである

Abraham, R., Marsden, J. E.

[1]† Foundation of Mechanics, Benjamin, 1967. 2nd edition 1978.

Andronov, A., Pontryagin, L.

[1]† Systèmes grossiers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 14 (1937), 247-251.

Anosov, D. V. (Аносов, Д. В.)

[1] Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Труды МИАН им. В. И. Стеклова, 90 (1967). (英訳, Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, 90 (1967), AMS.)

Arnold, V. I. (Арнольд, В. И.)

[1] Малые знаменатели I, Об отображениях окружности на себя, Известия АН СССР, 25-1 (1961), 21-86. (英訳, Small denominators I, Mappings of the circumferrence onto itself, American Mathematical Society Translations Series 2, vol. 46, 213-284.)

[2] Малые знаменатели II, Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, УМН, 18-5 (1963), 3-40. (英訳, Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of the Hamiltonian, Russian Math. Survey, 18-5 (1963), 9-36.)

[3] Малые знаменатели III, Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике, УМН, 18-6 (1963), 81-192. (英訳, Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Russian Math. Survey, 18-6 (1963), 86-192.)

[4] Неустойчивость динамических систем со многими степенями свободы, ДАН АН СССР, 156-1 (1964), 9-12. (英訳, Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Soviet Math., 5 (1964), 581-585.)

[5] Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости, Известия вузов, Математика, 54-5 (1966), 3-5.

[6] Sur la géometrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, Annales de l'Institut Fourier, 26-1 (1966), 319-361.

[7] О характеристическом классе входящем в условия квантования, Функц.

анализ и его приложения, т. 1, вып. 1 (1967), 1–14. (英訳, Characteristic classes enterring in quantization conditions, Functional Analysis and its Applications, 1–1 (1967), 1–13.)

[8] Особенности гладких отображений, УМН, 23–1 (1968), 3–44. (英訳, Singularities of smooth mappings, Russian Math. Survey, 23–1 (1968), 1–43.)

[9] Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости, УМН, 24–3 (147) (1969), 225–226.

[10] Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности, Функц. анализ и его приложения, 6–4 (1972), 3–25. (英訳, Normal forms for functions near the critical points, Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangean singularities, Functional Analysis and its Applications, 6–4 (1972), 254–272.)

[11]† Моды и квазимоды, Функц. анализ и его приложения, 6–2 (1972), 12–20. (英訳, Modes and quasimodes, Functional Analysis and its Applications, 6 (1972), 94–101.)

[12] Лекция о бифуркациях и версальных семействах, УМН, 27–5 (1972), 119–184. (英訳, Lecture on bifurcations and versal families, Russian Math. Survey, 27–5 (1972), 54–123.)

[13] Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей, ПММ, 36–2 (1972), 255–262.

[14]† Замечания о методе стационарной фазы и числах Коксетера, УМН, 28–5 (1973), 17–44. (英訳, Remarks on the stationary phase method and Coxeter numbers, Russian Math. Survey, 28–5 (1973), 19–48.)

[15]† Critical points of smooth functions, Proc. of Int. Congress of Math. Vancouver, 1974.

[16]† Sur les propriétés topologiques des applications globalement canoniques de la mécanique classique, C. R. Acad. Sci. Paris, 1965.

[17]† Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва, Наука, 1978.

Arnold, V. I., Avez, A.

[1]† Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Paris, 1967. (邦訳, 吉田耕作訳, 古典力学のエルゴード問題, 吉岡書店, 1972.)

Beletskii, V. V. (Белецкий, В. В.)

[1] Очерки о движении космических тел, Наука, 1972.

Birkhoff, G. D.

[1] Dynamical Systems, AMS Coll. Publ., vol. 9, New York, 1927.

Bröcker, Th.

[1]† Differential germs and catastrophes, London Math. Soc. Lecture Note Series 17, Cambridge Univ. Press, 1975.

Bruno, A. D. (Брюно, А. Д.)

[1] Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Труды Московского Математического общества, т. 25, т. 26. (英訳, Analytical form of differential equations, Moscow Math. Society, 25 (1971), 131–288, 26 (1972), 199–238.)

Charlier, C. V. L.

[1] Die Mechanik des Himmels, Band 1, 1902, Band 2, 1907, Verlag Veit & Comp. Leipzig, または, La mécanique céleste, 1963, Paris.

Chow, W.-L.

[1]† On compact complex analytic varieties, Amer. J. Math., 71 (1949), 893–914.

Dikii, L. A. (Дикий, Л. А.)

[1] Замечание о гамильтоновых системах, связанных с группой вращений, Функц. анализ и его приложения, 6–4 (1972), 83–84. (英訳, Hamiltonian systems connected with the rotation group, Functional Analysis and its Applications, 6 (1972), 326–327.)

Dubrovin, B. A., Matveev, V. B., Novikov, S. P. (Дубровин, Б. А., Матвеев, В. Б., Новиков, С. П.)

[1]† Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН, 31–1 (1976), 59–136. (英訳, Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite zone linear operators and abelian varieties, Russian Math. Survey, 31–1 (1976), 59–146.)

Duistermaat, J. J.

[1]† Fourier integral operators, Lecture Note, Courant Institute Math. Sci., New York Univ. 1973.

Ebin, D. G., Marsden, J.

[1] Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, Ann. of Math., 92–1 (1970), 102–163.

Faddeev, L. D. (Фаддеев, Л. Д.)

[1] К теории устойчивости стационарных плоско-параллельных течений идеальной жидкости, Краевые задачи математической физики, т. 5. (Записки научных семинаров, ЛОМИ, т. 21) Наука, 1971, 164–172.

Flaschka, H., Newell, A. C.

[1]† Integrable systems of nonlinear evolution equations, Dynamical Systems, Theory and Applications, Lecture Notes in Physics, 38 (1975), Springer.

Fujiwara, D. (藤原大輔)

[1]† 線型偏微分方程式論における漸近的方法，講座基礎数学，岩波書店，1976.

Fukuda, T., Noguchi, H. (福田拓生，野口広)

[1]† 初等カタストロフィー，共立全書 208，共立出版，1976.

Gallavotti, G.

[1]† Lectures on the billiard, Dynamical Systems, Theory and Applications, Lecture Notes in Physics, 38 (1975), 236–295, Springer.

Gelfand, I. M., Fomin, S. V.

[1]† Calculus of Variations, Prentice-Hall, 1963. (邦訳，関根智明訳，変分法，総合図書，1970.)

Golubitsky, M., Guillemin, V.

[1]† Stable Mappings and their Singularities, GTM, 14 (1973), Springer.

Halmos, P. K.

[1] Ergodic Theory, Publications of Mathematical Society of Japan, 3, 1959.

Hatakeyama, Y. (畠山洋二)

[1]† 多様体入門，数学ライブラリー41，森北出版，1976.

Heading, J.

[1] An introduction to phase integral methods, London, 1962.

Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.

[1]† Anschauliche Geometrie, Springer, 1932. (邦訳，芹沢正三訳，直観幾何学，みすず書房，1966.)

Hörmander, L.

[1] Fourier integral operator I, Acta Mathematica, 127 (1971), 79–183.

Jacobi, C.

[1] Vorlesungen über Dynamik, Gesammelte Werke, Supplement Band, Chelsea, 1969.

Kac, M.

[1]† Can one hear the shape of a dram? Amer. Math. Monthly, 73 (1966), No. 4, part II, 1–23.

Karpushkin, V. N. (Карпушкин, В. Н.)

[1] Об асимптотике собственных чисел симметричных многообразий и о наиболее вероятных представлениях конечных групп, Вестник МГУ, Сер. Мат., 1974, No. 2, 9–13. (英訳，On the asymptotic behavior of eigen-values of symmetric manifolds and on the most probable representations of finite groups, Moscow University Mathematics Bulletin.)

Kirillov, A. A.

[1]† Elements of the Theory of Representations, Grund. Math. Wiss., 220 (1976), Springer.

Kolmogorov, A. N. (Колмогорова, А.Н.)

[1] О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, ДАН, 98–4 (1954), 527–530.

Korteweg, D. J., de Vries, G.

[1]† On the change of the form of long waves advancing in a rectangular

canal and a new type of long stationary waves, Phil. Mag., 39 (1895), 422–443.

Kostant, B.

[1]† Quantization and unitary representations, Lecture Notes in Math., 170 (1970), 87–208, Springer.

Krein, M. G. (Крейн, М. Г.)

[1] Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, ДАН, 73 (1950), 445–448.

Kruskal, M.

[1]† Nonlinear wave equations, Dynamical Systems, Theory and Applications, Lecture Notes in Physics, 38 (1975), 310–354, Springer.

Kubo, I. (久保泉)

[1]† 撞球問題, Seminar on Probability, vol. 37, 1972.

[2]† Perturbed billiard systems I, The ergodicity of the motion of a particle in a compound central field, Nagoya Math. J., 61 (1976), 1–57.

Kubo, I., Murata, H. (久保泉, 村田博)

[1]† Perturbed billiard systems II, Bernoulli properties, to appear in Nagoya Math. J., 81 (1981)

Ladyzhenskaya, O. A. (Ладыженская, О. А.)

[1] О разрешимости в малом нестационарных задачах для несжимаемых идеальных и вязких жидкостей и исчезающей вязкости, Краевые задачи математической физики, т. 5. (Записки научных семинаров, ЛОМИ, 21 (1971)) 65–78.

Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М.)

[1] Механика, Физматгиз, 1958. (邦訳, 広重・水戸訳, 力学, 東京図書, 1970.)

Lanford, O.

[1]† Computer pictures of the Lorentz attractor, Lecture Notes in Math., 615 (1977), 113–116, Springer.

Lax, P. D.

[1] Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure and Appl. Math., 21 (1968), 467–490.

Lyubarskii, G. Ya. (Любарский, Г. Я.)

[1] Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, 1958.

Marsden, J. E.

[1]† Attempts to relate Navier-Stokes equations to turbulence, Turbulence Seminar, Berkeley 1976/77, Lecture Notes in Math., 615 (1977), Springer.

Marsden, J., Weinstein, A.

[1] Reduction of symplectic manifolds with symmetries, Reports on Math.

Phys., 5 (1974), 121–130.

Maslov, V. P. (Маслов, В. П.)

[1] Теория возмущений и асимптотические методы, МГУ, 1965. (邦訳, 大内・金子・村田訳, 摂動論と漸近的方法, 岩波書店, 1976.)

Mather, J.

[1] Stability of C^∞-mappings, I–VI. I. Ann. of Math., 87 (1968), II. Ann. of Math., 89 (1969), III. Publ. Math. I. H. E. S., 35 (1968), IV. Publ. Math. I. H. E. S., 37 (1969), V. Advances in Math., 4 (1970), VI. Proc. of Liverpool Symp. I, Springer, Lecture Notes in Math., 193 (1971).

Matsushima, Y. (松島与三)

[1]† 多様体入門, 裳華房, 1965.

Meshalkin, L. D., Sinai, Ya. G. (Мешалкин, Л. Д., Синай, Я. Г.)

[1] Исследование устойчивости стационарного течения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости, Прикладная математика и механика, No. 6 (1961), 1140–1142. (英訳, Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous fluid, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 25–2 (1961), 1700–1705.)

Milnor, J.

[1] Morse Theory, Princeton, 1963. (邦訳, 志賀浩二訳, モース理論, 吉岡書店, 1968.)

Mishchenko, A. S. (Мищенко, А. С.)

[1] Интегралы геодезических потоков на группах Ли, Функц. анализ и его приложения, 4–3 (1970), 73–78. (英訳, Integrals of geodesic flows on Lie groups, Functional Analysis and its Applications, 4 (1970), 232–235.)

Moser, J. K.

[1] On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 11a, No. 1 (1962), 1–20.

[2] A rapidly convergent method and nonlinear differential equations, Annali della Scuola Norm. Super. de Pisa, Ser. III, 20, No. 2 (1966), 265–715, No. 3 (1966), 499–535.

[3] Convergent series expansions for quasi-periodic motions, Math. Ann., 169 (1967), 136–176.

[4]† Lectures on Hamiltonian Systems, AMS, 1968.

Nagano, T. (長野正)

[1]† 大域変分法, 共立講座現代の数学, 共立出版, 1971.

Nekhoroshev, N. N. (Нехорошев, Н. Н.)

[1] О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, Функц. анализ и его приложения, т. 5, вып. 4 (1971), 82–83. (英訳, Behavier of Ha-

miltonian systems close to integrable, Functional Analysis and its Applications, 5 (1971), 338–339.)

Niwa, T., Ootsuki, N. (丹羽敏雄, 大槻舒一)

[1]† 古典力学のエルゴード問題, Seminar on Probability, vol. 30, 1969.

Noguchi, H. (野口広)

[1]† カタストロフィー, サイエンス・ライブラリ, 理工系の数学, サイエンス社, 1977.

Novikov, S. P. (Новиков, С. П.)

[1] Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза 1, Функц. анализ и его приложения, 8–3 (1974), 54–66. (英訳, The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation, Functional Analysis and its Applications, 8 (1974), 236–247.)

Obukhov, A. M. (Обухов, А. М.)

[1] Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа, ДАН, 184–2 (1969).

Ornstein, D., Weiss, B.

[1]† Geodesic flows are Bernoullian, Israel Journal Math., 14 (1973), 184–198. または, Randomness, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Yale Lecture Note.

Poincaré, H.

[1] Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, vol. I, vol. II, vol. III, Gauthier-Villars, 1899.

Pontryagin, L. S. (Понтрягин, Л. С.)

[1]† Обыкновенные дифференциальные уравнения, Наука, 1965. (邦訳, 千葉克裕訳, 常微分方程式, 共立出版, 1968.)

Ratner, M.

[1]† Anosov flows with Gibbs measures are also Bernoullian, Israel Journal Math., 17 (1974), 380–391.

Schiff, L. I.

[1]† Quantum Mechanics, McGraw-Hill, 1955. (邦訳, 井上健訳, 量子力学・上下, 吉岡書店, 1970–1972.)

Shilov, G. E. (Шилов, Г. Е.)

[1] 英訳, Mathematical Analysis; a special course, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, 77, Pergamon, 1965.

Siegel, C. L.

[1] Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer, 1956.

Siegel, C. L., Moser, J. K.

[1] Lectures on Celestial Mechanics, Springer, 1971.

Sinai, Ya. G. (Синай, Я. Г.)

[1] Динамические системы с упругими отображениями, УМН, 25-2(1970), 141-192. (英訳, Dynamical systems with elastic reflections, Russian Math. Survey, 25(1970), 137-189.)

Smale, S.

[1]† Differentiable dynamical systems, Bull. AMS, 73(1969), 747-817.

[2]† Topology and mechanics, Inventiones Mathematicae, 10-4(1970), 305-331, 11-1(1970), 45-64.

Smale, S., Hirsch, M. W.

[1]† Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974. (邦訳, 田村・水谷・新井訳, 力学系入門, 岩波書店, 1976.)

Smith, J.

[1] Mathematical Ideas in Biology, Cambridge, 1968. (邦訳, 押田勇雄監訳, 数理生物学序説, みすず書房, 1970.)

Souriau, J. M.

[1]† Structures des systèmes dynamiques, Dunod, 1970.

Sternberg, S.

[1] Celestial Mechanics I, II, New York, Benjamin, 1969.

Tanaka, S., Date, E. (田中俊一, 伊達悦朗)

[1]† KdV 方程式, 非線型数理物理入門, 紀伊国屋数学叢書, 紀伊国屋書店, 1979.

Thom, R., Levine, H. I.

[1] Singularities of differentiable mappings I, Bonner Math. Schriften, 6, 1959. または, Proc. of Liverpool Sing. Symposium I, Springer, Lecture Notes in Math., 192(1971).

Toda, M. (戸田盛和)

[1]† 非線形格子力学, 応用数学叢書, 岩波書店, 1978.

Uhlenbeck, K.

[1]† Generic properties of eigenfunctions, Amer. J. Math., 98(1976), 1059-1078.

Weil, A.

[1] Introduction à l'étude des variétés kählérienne, Hermann, Paris, 1958.

Weinstein, A.

[1] The invariance of Poincaré's generating function for canonical transformations, Inventiones Mathematicae, 16-3(1972), 202-214.

[2]† Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, Advances in Math., 6(1971), 329-346.

Weiss, B.

[1]† The geodesic flows on surface of negative curvature, Lecture Notes in Physics, 38(1975), Springer.

Whittaker, E. T.

[1]† A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies,

4th ed., Cambridge Univ. Press, 1970.

Williamson, J.

[1] On an algebraic problem, concerning the normal forms of linear dynamical systems, Amer. J. of Math., 58-1 (1936), 141-163.

Zakharov, V. E., Faddeev, L. D. (Захаров, В. Е., Фаддеев, Л. Д.)

[1] Уравнения Кортевега-де Фриза—вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ и его приложения, 5-4 (1971), 18-27. (英訳, Korteweg-de Vries equation is a completely integrable Hamiltonian system, Functional Analysis and its Applications, 5 (1971), 280-287.)

Zaslavskii, G. M., Tchirikov, B. V. (Заславский, Г. М., Чириков, Б. В.)

[1] Стохастическая неустойчивость нелинейных колеваний, УФН, 105-1 (1971), 3-39.

訳者あとがき

本書は，В. И. АРНОЛЬД の МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ(1974)の全訳である．

著者の V. I. Arnold はソ連のみならず世界の中で現在最も影響力の強い指導的な数学者の1人である．研究分野は，天体力学，古典力学，流体力学を始めとする力学系の理論，常微分方程式論，多様体のトポロジー，特異点の理論など幅広い．その研究は極めて現代的であると共に古典に深く根ざしている．なお，天体力学の最大の問題である多体問題の研究によって，ソ連の最高の賞であるレーニン賞を Kolmogorov と共に若くして受けている．彼の手になる論文や報告は数多い．また，A. Avez との共著の Problèmes ergodiques de la mécanique classique(邦訳，古典力学のエルゴード問題，吉岡書店)と Ordinary differential equations(英訳，M. I. T.)の著者としてもよく知られている．

さて，本書の内容であるが，序文にもある通り幾何学的な手法に力点を置いて，古典力学およびそれに関連する分野を扱っている．力学の良書はこれまでにも数多いが，本書は新しく書かれるに十分な理由と価値をもっているといえる．実際，Landau-Lifshitz の教科書のように‘伝統的’なものは新しい数学の発展を取り入れておらず，逆に数学的に完全なものは直観性，具体的内容にとぼしいきらいがあった．本書では単なる計算に終るのではなく，またいたずらに抽象に走ることなく，明解な幾何学的概念や手法でもって力学の具体的問題を扱っている．多くの数学的概念や理論が力学の研究の中から生まれ育った事を考え合わせれば，これは歴史にもかなったものといえよう．

本書はこうして，理論物理を学び研究する者には，力学を通して現代数学の強力な方法と思想にふれることができよう．幸い本書は，数学の予備知識としては，教養課程の微積分と線形代数程度が仮定されているだけであるから，初学者にも十分に理解が可能である．

また，数学ことに多様体論を中心とする幾何学や解析学を学び研究する者にとっては，現代数学の概念や理論を具体的な力学の問題を通じて学ぶことがで

きる.

本書の第2の特徴はその豊富な付録にある. そこで扱われている問題は現在も研究が進行中のものばかりであって, 力学のもつ理論物理や数学に対するつきぬ豊かさを例示している. 例えば, 理想流体の数学的取り扱いをみると, 理想流体の力学を無限次元の Lie 群上の運動——剛体の運動に対する Euler の理論の拡張になっている——として捉え, 付録1で扱われている測地流との関連を示し, 最近の乱流理論との結びつきをも与えている. また, 付録10-12においては, R. Thom の横断性を軸とした一般論に対する豊かな観点や例題を与え, 特異点の理論など臨界的な現象への強力な道具を与えている.

このように, 本書において力学の問題が現代数学との関連の中でみごとに現代的な形で再生されている.

訳に当っては, 性格上, 本文は明解な訳に努め, 付録は内容を正確に伝えることを第1とした. その結果多少くどい言いまわしになった所があるかも知れない. 何分, 分野は多岐に及び訳者の非力も手伝って不十分なところがあるのではとおそれている. 読者諸賢の御指摘を待ちたい. 訳は3人の共同によるが, 最終的な文責は, 本文は安藤に, 付録1-4と11-13は蟹江に, 付録5-10は丹羽にある.

出版に当っては, 岩波書店の荒井秀男氏を始め多くの方々の御世話になった. ここに記して感謝の辞としたい.

なお, ( )は原著者の挿入句で, [ ]が訳者の挿入句である. 原著者の脚注は * で, 訳者のそれは † で示した. 原著では文中に挿入されていた参考文献は便宜のために巻末に一括すると同時に新しい文献も追加した.

1980年4月

訳　　　者

索　引

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

Y

Z

古典力学の数学的方法

1980年5月28日　第1刷発行 ©
1981年4月15日　第2刷発行

定価8500円

訳　者　安藤韶一（あんどう しょういち）
　　　　蟹江幸博（かにえ ゆきひろ）
　　　　丹羽敏雄（にわ としお）

発行者　緑川亨

〒101 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
発行所　株式会社 岩波書店
電話 03-265-4111
振替 東京 6-26240

印刷・精興社　製本・三水舎